

## 2. REALNE FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

2.1. FUNKCIJE DVIJU ILI VIŠE VARIJABLI. PRIRODNO  
PODRUČJE DEFINICIJE FUNKCIJE DVIJU VARIJABLI.  
NULTOČKE FUNKCIJE DVIJU VARIJABLI.  
GRAF FUNKCIJE DVIJU VARIJABLI:

## 2.1.1. POJAM FUNKCIJE DVIJU ILI VIŠE VARIJABLI

- Međusobnu zavisnost različitih ekonomskih veličina (npr. količina potražnje nekoga proizvoda, cijena toga proizvoda i sl.) često nije moguće opisati pomoću realne funkcije jedne realne varijable (kao u *Gospodarskoj matematici* 1).
- U takvim slučajevima jedna veličina (*zavisna veličina*) ovisi o barem dvije različite veličine (koje se nazivaju *nezavisne veličine*).
- Zbog toga uvodimo pojam *realne funkcije dviju ili više realnih varijabli*.

## 2.1.2. SKUPOVI $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^n$

- Za bilo koji prirodan broj  $n$  definiramo skup
- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ .
- $\mathbb{R}^n$  je zapravo skup svih *uređenih  $n$ -torki realnih brojeva*, tj. strukture koja se sastoji od  $n$  realnih brojeva pri čemu točno znamo koji od njih pišemo prvi, koji drugi itd.
- Posebno, za  $n = 2$  dobivamo skup svih *uređenih parova* realnih brojeva:
- $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ .
- Za  $n = 3$  dobivamo skup svih *uređenih trojki* realnih brojeva:
- $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ .

## 2.1.3. DEFINICIJA FUNKCIJE $n$ REALNIH VARIJABLI

- Neka je  $n$  proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj.
- Neka su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $B \subseteq \mathbb{R}$  proizvoljni skupovi.
- *Realna funkcija*  $f: A \rightarrow B$  je pridruživanje koje *svakoj* uređenoj  $n$ -torki iz skupa  $A$  pridružuje *točno jedan* element skupa  $B$  prema nekom unaprijed zadanom propisu (pravilu).
- Skup  $A$  naziva se *prirodno područje definicije* ili *domena* funkcije  $f$ .
- Skup  $B$  naziva se *područje vrijednosti* ili *kodomena* funkcije  $f$ .
- Kao i za realne funkcije jedne varijable, tako i za realne funkcije više varijabli moramo znati:
  - prirodno područje definicije (domenu);
  - područje vrijednosti (kodomenu);
  - pravilo pridruživanja.

## 2.1.4. NAPOMENA

- U definiciji funkcije  $f$  zahtijeva se da *svakom* elementu skupa  $A$  bude pridružen *točno jedan* element skupa  $B$ .
- To **ne** znači da za svaki element skupa  $B$  postoji element skupa  $A$  koji mu je pridružen. Moguće je da isti element skupa  $B$  ima više parova u skupu  $A$ .
- “Najgori” slučaj:  $f = \text{const.}$ , tj. svim elementima skupa  $A$  pridružen je isti element skupa  $B$ .

## 2.1.5. ZAPIS REALNE FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

- Činjenicu da funkcija  $f$  uređenoj  $n$ -torki  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  iz skupa  $A$  pridružuje broj  $z$  iz skupa  $B$  zapisujemo u obliku:
- $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- Vrlo često broj  $z$  ne želimo označavati posebnim slovom, pa – analogno kao u *Gospodarskoj matematici* 1 – pišemo npr.
- $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .

## 2.1.6. NULTOČKE REALNE FUNKCIJE VIŠE REALNIH VARIJABLI

- Pretpostavimo da je  $0 \in B$ , tj. da 0 pripada kodomeni funkcije  $f$ .
- *Svaka* uređena  $n$ -torka  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  iz skupa  $A$  (tj. iz prirodnoga područja definicije funkcije  $f$ ) takva da je  $f(x) = 0$  naziva se *nultočka funkcije  $f$* .
- Kao i realna funkcija jedne realne varijable, i realna funkcija više realnih varijabli može ili imati barem jednu nultočku ili nemati niti jednu nultočku.
- Kod realne funkcije jedne realne varijable određivanje nultočke te funkcije svodi se na rješavanje (ne)algebarske jednadžbe s jednom nepoznanicom.
- Kod realne funkcije više realnih varijabli također se dobiva jedna (ne)algebarska jednadžba, ali s više nepoznanica. Stoga za njezino “klasično” rješavanje moramo poznavati dodatne algebarske tehnike, “trikove” i sl.
- Nultočke funkcije jedne ili više realnih varijabli moguće je određivati koristeći računalni program *Maxima* (izbornik: *Equations*, opcija: *Solve*).

## 2.1.7. NAPOMENA

- U *Gospodarskoj matematici* 1 je skup svih nultočaka realne funkcije jedne realne varijable je najčešće bio konačan podskup skupa  $\mathbb{R}$ .
- Skup svih nultočaka realne funkcije više realnih varijabli je najčešće beskonačan skup. Njegov grafički prikaz mogu biti npr. krivulja u ravnini, ploha u prostoru i sl.



## 2.1.8. GRAF REALNE FUNKCIJE VIŠE REALNIH VARIJABLI

- Formalno, *graf* realne funkcije  $f$  s  $n$  realnih varijabli definira se kao skup:
- $\Gamma_f = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), z): z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$
- Za  $n = 2$  graf funkcije  $f$  je (najčešće) *ploha* u prostoru, dok za  $n \geq 3$  nije moguće dati “vizualni” grafički prikaz
- Grafičke prikaze funkcija *dviju* varijabli možemo crtati koristeći računalni program *Maxima* (izbornik: *Plot*, opcija: *Plot 3d...*)