DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

2.2. HOMOGENE I ADITIVNE FUNKCIJE – zadaci

1. Ispitajte homogenost realne funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(x, y) = 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x \cdot y^2 + 5 \cdot x^2 \cdot y - 4 \cdot y^3 .$$

Ako je funkcija homogena, odredite njezin stupanj homogeniteta i interpretirajte ga

2. Tzv. *Cobb–Douglasova funkcija proizvodnje* $P : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ definirana je pravilom

$$P(K, R) = 300 \cdot K^{0.8} \cdot R^{0.2},$$

gdje su *P* količina proizvodnje, *K* iznos kapitala i *R* količina rada.

a) Dokažite da je *P* homogena funkcija i odredite njezin stupanj homogeniteta.
b) Ako se iznos kapitala i količina rada *istovremeno* povećaju za 1%, odredite smjer i veličinu relativne promjene količine proizvodnje.

3. Neka su *A*, *B*, *C* > 0 proizvoljni, ali fiksirani. Tzv. *CES–funkcija proizvodnje* $P : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ definirana je pravilom

$$P(K, R) = A \cdot \left[B \cdot K^{-C} + (1 - B) \cdot R^{-C} \right]^{\frac{1}{C}},$$

gdje su *P* količina proizvodnje, *K* iznos kapitala i *R* količina rada.

a) Dokažite da je *P* homogena funkcija i odredite njezin stupanj homogeniteta.
b) Ako se iznos kapitala i količina rada *istovremeno* povećaju za 1%, odredite smjer i veličinu relativne promjene količine proizvodnje.

4. Provjerite jesu li funkcije

a) $f(x) = 2016 \cdot x$,

b) $g(x) = 2016^x$,

c) $h(x) = \ln x$,

aditivne na skupu $\mathbb{R}^+$. Precizno obrazložite sve svoje tvrdnje.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

2.2. HOMOGENE I ADITIVNE FUNKCIJE – zadaci

REZULTATI ZADATAKA

1. Za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo:

$$f(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = 3 \cdot (\alpha \cdot x)^3 - 2 \cdot (\alpha \cdot x) \cdot (\alpha \cdot y)^2 + 5 \cdot (\alpha \cdot x)^2 \cdot (\alpha \cdot y) - 4 \cdot (\alpha \cdot y)^3 =$$
$$= 3 \cdot \alpha^3 \cdot x^3 - 2 \cdot \alpha^3 \cdot x \cdot y^2 + 5 \cdot \alpha^3 \cdot x^2 \cdot y - 4 \cdot \alpha^3 \cdot y^3 = \alpha^3 \cdot f(x, y)$$

pa zaključujemo da je *f* homogena funkcija i da je njezin stupanj homogenosti $k = 3$. To znači da ako se vrijednosti obiju nezavisnih varijabli istovremeno povećaju za 1%, onda će se vrijednost funkcije povećati za 3%.

2.

a) Za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo:

$$P(\alpha \cdot K, \alpha \cdot R) = 300 \cdot (\alpha \cdot K)^{0.8} \cdot (\alpha \cdot R)^{0.2} = 300 \cdot \alpha^{0.8} \cdot K^{0.8} \cdot \alpha^{0.2} \cdot R^{0.2} = \alpha \cdot P(K, R),$$

pa je P homogena funkcija čiji je stupanj homogenosti $\alpha = 1$.

b) Ako se količina kapitala i količina rada istovremeno povećaju za 1%, količina proizvodnje će se povećati za 1%.

3.

a) Za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo:

$$P(\alpha \cdot K, \alpha \cdot R) = A \cdot \left[B \cdot (\alpha \cdot K)^{-C} + (1 - B) \cdot (\alpha \cdot R)^{-C} \right]^{-\frac{1}{C}} = A \cdot \left[B \cdot \alpha^{-C} \cdot K^{-C} + (1 - B) \cdot \alpha^{-C} \cdot R^{-C} \right]^{-\frac{1}{C}} =$$
$$= (\alpha^{-C})^{-\frac{1}{C}} \cdot A \cdot \left[B \cdot K^{-C} + (1 - B) \cdot R^{-C} \right]^{-\frac{1}{C}} = \alpha \cdot P(K, R)$$

pa je P homogena funkcija čiji je stupanj homogenosti $\alpha = 1$.

b) Ako se količina kapitala i količina rada istovremeno povećaju za 1%, količina proizvodnje će se povećati za 1%.

4. Za $x, y \in \mathbb{R}^+$ je očito $x + y \in \mathbb{R}^+$. Stoga relacija 1.) vrijedi.

Provjerimo valjanost jednakosti 2). Imamo:

a) $f(x + y) = 2016 \cdot (x + y) = 2016 \cdot x + 2016 \cdot y = f(x) + f(y)$,

b) $g(x + y) = 2016^{x+y} = 2016^x \cdot 2016^y = f(x) \cdot f(y) \neq f(x) + f(y)$,

c) $h(x + y) = \ln(x + y) \neq \ln x + \ln y = f(x) + f(y)$.

Zaključujemo da je funkcija *f* aditivna, a da funkcije *g* i *h* nisu aditivne na $\mathbb{R}^+$.