2.4. OSNOVE HARMONIJSKE ANALIZE

RAZVOJ PERIODIČNE FUNKCIJE U FOURIEROV RED

2.4.1. POJAM HARMONIJSKE ANALIZE

- Podsjetnik: Kažemo da je realna funkcija f *periodična s temeljnim periodom* $T > 0$ ako je
- $\min\{t > 0 \colon (\forall x \in D(f))\,(f(x+t) = f(x))\} = T$.
- Tipični primjeri periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije. Temeljni period funkcija $\sin x$ i $\cos x$ jednak je $2 \cdot \pi$, a temeljni period funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ jednak je π.
- U mnogim tehničkim problemima nameće se potreba da se relativno složena periodična funkcija aproksimira *zbrojem trigonometrijskih funkcija* (tj. relativno jednostavnim harmonijskim titranjima).
- Problemima određivanja ovakvih aproksimacija, te algoritmima za rješavanje takvih problema bavi se *harmonijska analiza*.

2.4.2. DIRICHLETOVI UVJETI

- U općem slučaju (tj. za bilo koju periodičku funkciju) pitanje njezine aproksimacije zbrojem trigonometrijskih funkcija još uvijek nije potpuno riješeno.
- U praktički najvažnijim slučajevima problem aproksimacije riješen je za funkcije koje zadovoljavaju tzv. *Dirichletove uvjete*.
- **Pretpostavka:** Zadana je funkcija $f\colon [-l, l] \to \mathbb{R}$.
- **Uvjet 1.** Funkcija f ima konačno mnogo točaka prekida i ti prekidi su prekidi prve vrste (tzv. "*skokovi*").
- **Uvjet 2.** f je po dijelovima monotona, tj. f ima konačno mnogo strogih lokalnih ekstrema na segmentu $[-l, l]$.
- Uvjeti 1. i 2. nazivaju se **Dirichletovi uvjeti**. Oni se odnose *isključivo* na segment $[-l, l]$.
- Primijetimo da, prema definiciji periodične funkcije, navedeni segment *nije prirodna domena* funkcije f, nego njezin pravi podskup.

2.4.2. FOURIEROV RED

- *Pretpostavka*: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ je funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete.
- Funkciju f možemo aproksimirati *trigonometrijskim redom*, tj. redom oblika

$$\sum a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x),$$

- gdje su a_n i b_n *koeficijenti* reda.
- Može se pokazati da je tada pripadni trigonometrijski red konvergentan za svaki $x \in [-\pi, \pi]$. Međutim, njegov zbroj *ne mora* biti jednak $f(x)$ (kao što je to bio slučaj s Taylorovim redom).

2.4.2. FOURIEROV RED

- Za svaku točku prekida y vrijedi:
- $S(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to y-} f(x) + \lim_{x \to y+} f(x) \right),$
- gdje je $S(y)$ zbroj trigonometrijskoga reda u točki y.
- Na krajevima segmenta zbroj pripadnoga reda jednak je

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to (-\pi)+} f(x) + \lim_{x \to \pi-} f(x) \right).$$

2.4.2. FOURIEROV RED

- U praksi je važno periodičnu funkciju f *aproksimirati trigonometrijskim polinomom*.
- Grubo i neprecizno rečeno, trigonometrijski polinom dobijemo uzmemo li konačan „dio” pripadnoga trigonometrijskoga reda.
- Precizno rečeno, *trigonometrijski polinom stupnja* m dobijemo uzimajući prvih $2 \cdot m + 1$ članova trigonometrijskoga reda:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{m} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) \right) = a_0 + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \sin x + \ldots + a_m \cdot \cos(m \cdot x) + b_m \cdot \sin(m \cdot x)$$

- Što je stupanj m veći, aproksimacija funkcije f trigonometrijskim polinomom je bolja.

2.4.2. FOURIEROV RED

- *Pretpostavka*: $f : [x_0,\ x_0 + T] \to \mathbb{R}$ je T-periodična funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete.
- Tada tu funkciju na segmentu $[x_0,\ x_0 + T]$ možemo aproksimirati redom oblika

$$\sum a_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T} \cdot x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T} \cdot x\right),$$

- gdje su a_n i b_n *koeficijenti* reda.
- I tada je pripadni trigonometrijski red konvergentan za svaki $x \in [-l,\ l]$. Međutim, njegov zbroj (ponovno) *ne mora* biti jednak $f(x)$.

2.4.2. FOURIEROV RED

- Za svaku točku prekida $y \in [x_0, \ x_0 + T]$ (ponovno) vrijedi:
- $$S(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to y-} f(x) + \lim_{x \to y+} f(x) \right),$$
- gdje je $S(y)$ zbroj trigonometrijskoga reda u točki y.
- Na krajevima segmenta zbroj pripadnoga reda jednak je

$$S(x_0) = S(x_0 + T) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to x_0+} f(x) + \lim_{x \to (x_0+T)-} f(x) \right).$$

2.4.3. FOURIEROVI KOEFICIJENTI

- U općem se slučaju *Fourierovi koeficijenti* razvoja funkcije f u Fourierov red na segmentu $[-l, l]$ računaju prema sljedećim Eulerovim formulama:

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T} \cdot x\right) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T} \cdot x\right) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4.3. FOURIEROVI KOEFICIJENTI

- *Pretpostavka*: $l = \pi$, tj. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.
- Tada se *Fourierovi koeficijenti* razvoja funkcije f u Fourierov red na segmentu $[-\pi, \pi]$ računaju prema sljedećim Eulerovim formulama:

$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4.4. NAPOMENE

- 1. „Slobodni” član a_0 jednak je *srednjoj* (prosječnoj) *vrijednosti funkcije f na segmentu* $[x_0, x_0 + T]$.
- 2. Ako je funkcija f na segmentu $[x_0, x_0 + T]$ definirana *po dijelovima*, pri računanju Fourierovih koeficijenata treba podijeliti taj interval na odgovarajuće dijelove, te izračunati integrale iz formula za Fourierove koeficijente kao zbroj integrala izračunanih za pojedine dijelove segmenta
- 2. Ako je funkcija *f parna*, vrijedi: $b_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- Ako je funkcija *f neparna*, vrijedi: $a_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.
- Podsjetnik: Funkcija f je *parna* ako za svaki $x \in D(f)$ vrijedi $f(x) = f(-x)$, a *neparna* ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$.
- 3. Svaku T-periodičnu funkciju definiranu na segmentu $[0, T/2]$ ili $[-T/2, 0]$, možemo *proširiti po* (*ne*)*parnosti* na segment $[-T/2, T/2]$ (i dalje prirodno na cijeli skup $\mathbb{R}$).
- Drugim riječima, polaznu funkciju f definiranu na segmentu $[0, T/2]$ ili $[-T/2, 0]$ možemo proširiti na cijeli segment $[-T/2, T/2]$ (i dalje prirodno na cijeli skup $\mathbb{R}$) tako da dobijemo ili parnu ili neparnu funkciju na tom segmentu (a potom i na $\mathbb{R}$).

2.4.4. NAPOMENE

- 4. Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *parna* T-periodična funkcija, onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

- Ako je f *neparna* funkcija, onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 0.$$

- 5. Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neparna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda za svaki $k\in\mathbb{Z}$ vrijedi jednakost $f(k\cdot\pi)=0$.
- 6. Trigonometrijski polinom stupnja $m\in\mathbb{N}$ čiji su koeficijenti Fourierovi koeficijenti naziva se *Fourierov polinom stupnja m* i označava s F_m.
- U praksi se periodične funkcije aproksimiraju Fourierovim polinomima.

2.4.5. KORISNI IDENTITETI

I. $\cos(k\cdot\pi)=\begin{cases}-1, \text{ za neparne } k\in\mathbb{Z},\\ 1, \text{ za parne } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

II. $\sin(k\cdot\pi)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$

III. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\cos(l\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=0,\ \forall k,l\in\mathbb{Z}.$

IV. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\begin{cases}0, \text{ za } k\neq 0,\\ 2\cdot\pi, \text{ za } k=0.\end{cases}$

V. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\cos(l\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\sin(l\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\begin{cases}0, \text{ za } k,l\in\mathbb{Z},\ k\neq l,\\ \pi, \text{ za } k=l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

VI. $\int\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$

VII. $\int\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$

VIII. $\int x\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}\cdot\big(\sin(n\cdot x)-n\cdot x\cdot\cos(n\cdot x)\big)+C,\ C\in\mathbb{R}.$

IX. $\int x\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}\cdot\big(\cos(n\cdot x)+n\cdot x\cdot\sin(n\cdot x)\big)+C,\ C\in\mathbb{R}.$

X. $\int x^2\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{n^3}\cdot\big((2-n^2\cdot x^2)\cdot\cos(n\cdot x)+2\cdot n\cdot x\cdot\sin(n\cdot x)\big)+C,\ C\in\mathbb{R}.$

XI. $\int x^2\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{n^3}\cdot\big(2\cdot n\cdot x\cdot\cos(n\cdot x)+(n^2\cdot x^2-2)\cdot\sin(n\cdot x)\big)+C,\ C\in\mathbb{R}.$

1. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **neparna** $T-$periodična funkcija. Izračunajte $f\left(k\cdot\frac{T}{2}\right)$, za svaki $k\in\mathbb{Z}$.

Rješenje: Pokažimo najprije da iz neparnosti funkcije *f* slijedi $f(0)=0$. Iz definicije neparnosti funkcije *f* zaključujemo da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi jednakost:

$$f(-x)=-f(x).$$

Ova jednakost vrijedi i za $x=0$, pa uvrštavanjem te vrijednosti u gornju jednakost dobijemo:

$$\begin{aligned}
&f(-0)=-f(0),\\
&f(0)=-f(0),\\
&f(0)+f(0)=0,\\
&2\cdot f(0)=0,\\
&f(0)=0.
\end{aligned}$$

Odatle zbog $T-$periodičnosti slijedi:

$$f(k\cdot T)=f(0+k\cdot T)=f(0)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f za neparne višekratnike broja $\frac{T}{2}$. Izračunajmo najprije $f\left(\frac{T}{2}\right)$. Iz neparnosti funkcije *f* slijedi:

$$f\left(\frac{-T}{2}\right)=-f\left(\frac{T}{2}\right),$$

a iz $T-$periodičnosti:

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{-T}{2}\right)=f\left(\frac{-T}{2}+T\right),\\
&f\left(\frac{-T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right).
\end{aligned}$$

Lijeve strane tih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Tako iz

$$-f\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)$$

slijedi $f\left(\frac{T}{2}\right)=0$.

Iz $f\left(\frac{-T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)$ slijedi

$$f\left(\frac{-T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)=0.$$

Sada možemo izračunati vrijednosti funkcije f za neparne višekratnike broja $\frac{T}{2}$:

$$f\left((2\cdot k+1)\cdot\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}+k\cdot T\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)=0.$$

Dakle, vrijednost funkcije f za *bilo kakav* (parni ili neparni) *cjelobrojni* višekratnik broja $\frac{T}{2}$ jednaka je nuli. Zapišimo to pregledno ovako:

$$f\left(k\cdot\frac{T}{2}\right)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Napomena 1. Izravna posljedica zadatka 1. je sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja 1. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **neparna** $(2\cdot\pi)-$periodična funkcija. Tada vrijedi jednakost:

$$f(k\cdot\pi)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

2. Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi:

a) $\int \cos(a \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) + C$;

Rješenje: Primijenimo metodu zamjene. Zamijenimo:

$$t := a \cdot x,$$
$$\mathrm{d}t = a \cdot \mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{d}t.$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \cos(a \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= \int \cos t \cdot \frac{1}{a} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \cos t \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sin t = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) + C;\end{aligned}$$

b) $\int \sin(a \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{-1}{a}\right) \cdot \cos(a \cdot x) + C.$

Rješenje: Identičnom zamjenom kao u a) podzadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \sin(a \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= \int \sin t \cdot \frac{1}{a} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \sin t \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{a} \cdot (-\cos t) = \\ &= \frac{-1}{a} \cdot \cos(a \cdot x) + C.\end{aligned}$$

3. Dokažite da za sve $k, l \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq 0, \\ 2 \cdot \pi, & \text{za } k = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Primijetimo da su sva tri integrala vezana uz segment $[-\pi, \pi]$ koji je simetričan s obzirom na 0. Podsjetimo da za funkciju g integrabilnu na takvu segmentu vrijede tvrdnje:

$$g \text{ parna funkcija} \Rightarrow \int_{\pi}^{\pi} g(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} g(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{-\pi}^{0} g(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

$$g \text{ neparna funkcija} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \mathrm{d}x = 0.$$

Funkcija

$$g_1(x) = \sin(k \cdot x)$$

je neparna funkcija jer zbog neparnosti sinusa vrijedi:

$$\begin{aligned} g_1(-x) &= \sin(k \cdot (-x)) = \\ &= \sin(-k \cdot x) = \\ &= -\sin(k \cdot x) = \\ &= -g_1(x). \end{aligned}$$

Iz toga svojstva odmah slijedi jednakost

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = 0.$$

Nadalje, i funkcija

$$g_3(x) = \sin(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x)$$

je neparna funkcija jer, zbog neparnosti sinusa i parnosti kosinusa, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} g_3(-x) &= \sin(k \cdot (-x)) \cdot \cos(l \cdot (-x)) = \\ &= \sin(-k \cdot x) \cdot \cos(-l \cdot x) = \\ &= (-\sin(k \cdot x)) \cdot \cos(l \cdot x) = \end{aligned}$$

$$= -\sin(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) =$$
$$= -g_3(x).$$

Iz toga svojstva odmah slijedi jednakost

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = 0.$$

Preostaje dokazati drugu jednakost. U tu ćemo svrhu iskoristiti rezultat zadatka 1. Najprije primijetimo da je funkcija

$$g_2(x) = \cos(k \cdot x)$$

parna jer, koristeći parnost funkcije kosinus, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} g_2(-x) &= \cos(k \cdot (-x)) = \\ &= \cos(-k \cdot x) = \\ &= \cos(k \cdot x) = \\ &= g_2(x). \end{aligned}$$

Za $k \neq 0$ tako slijedi:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x) \right) \Bigg|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{k} \cdot (\sin(k \cdot x)|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{k} \cdot (\underbrace{\sin(k \cdot \pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(k \cdot 0)}_{=\sin 0 = 0}) = \\ &= \frac{2}{k} \cdot (0 - 0) = \\ &= 0, \end{aligned}$$

dok za $k = 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \cos 0 \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot (x)|_0^{\pi} = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot (\pi - 0) =$$
$$= 2 \cdot \pi.$$

Napomena 2. Primijetite da u dokazu prve i treće jednakosti nigdje nismo koristili pretpostavku da su $k, l \in \mathbb{Z}$. Dokaz je proizašao iz svojstva neparnosti određene trigonometrijske funkcije. To znači da te jednakosti vrijede za svaki $k, l \in \mathbb{R}$.

Analogan zaključak, međutim, za drugu jednakost nije istinit. Naime, u njezinu smo dokazu koristili rezultat zadatka 1. u kojemu smo morali pretpostaviti da je $k \in \mathbb{Z}$.

4. Dokažite da za sve $k, l \in \mathbb{Z}$ takve da je $k \ge l$ vrijede jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, \text{ za } k > l, \\ \pi, \text{ za } k = l \neq 0, \\ 2 \cdot \pi, \text{ za } k = l = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, \text{ za } k > l \text{ i } k = l = 0, \\ \pi, \text{ za } k = l \neq 0. \end{cases}$$

Rješenje: Primijetimo da, zbog komutativnosti umnoška realnih brojeva, za *bilo koji* umnožak oblika $\sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x)$ možemo pretpostaviti da su k i l označeni tako da vrijedi nejednakost $k \ge l$. Naime, ako ta nejednakost ne vrijedi, jednostavno zamijenimo poredak faktora, čime se vrijednost umnoška neće promijeniti. Dakle, pretpostavka $k \ge l$ ni na koji način ne utječe na rezultat, već je uvedena samo radi određenosti.

Najprije razriješimo trivijalni slučaj $k = l = 0$ u objema jednakostima. Dakle, pretpostavimo da je $k = l = 0$. Tada odmah imamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(0 \cdot x)}_{=\cos 0 = 1} \cdot \underbrace{\cos(0 \cdot x)}_{=\cos 0 = 1} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \mathrm{d}x = (x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \pi - (-\pi) = \\ &= 2 \cdot \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(0 \cdot x)}_{=\sin 0 = 0} \cdot \underbrace{\sin(0 \cdot x)}_{=\sin 0 = 0} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 0 \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sada pretpostavimo da je $k = l \neq 0$. Primijenit ćemo formule za pretvorbu kvadrata sinusa, odnosno kosinusa, u trigonometrijske funkcije dvostrukoga argumenta:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x),$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x).$$

Koristeći te jednakosti i rezultate zadataka 1. i 2. dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\cdot x)\cdot\cos(l\cdot x)\cdot \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot k\cdot x)\right)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= (\text{zbog } k\neq 0) = \\
&= \left.\left(\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4\cdot k}\cdot\sin(2\cdot k\cdot x)\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{1}{4\cdot k}\cdot\sin(2\cdot k\cdot\pi)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4\cdot k}\cdot\sin(-2\cdot k\cdot\pi)\right) = \\
&= (\text{zbog } 2\cdot k\in\mathbb{Z} \text{ i zadatka 1.}) = \\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{1}{4\cdot k}\cdot 0+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4\cdot k}\cdot 0 = \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\cdot x)\cdot\sin(l\cdot x)\cdot \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\cdot x)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot k\cdot x)\right)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= (\text{zbog } k\neq 0) = \\
&= \left.\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4\cdot k}\cdot\sin(2\cdot k\cdot x)\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4\cdot k}\cdot\sin(2\cdot k\cdot\pi)-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4\cdot k}\cdot\sin(-2\cdot k\cdot\pi)\right) = \\
&= (\text{zbog } 2\cdot k\in\mathbb{Z} \text{ i zadatka 1.}) = \\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4\cdot k}\cdot 0+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4\cdot k}\cdot 0 = \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Preostaje razriješiti najteži slučaj $k > l$. (Pritom l može biti jednak 0.) Primijenit ćemo formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u njihov zbroj. Podsjetimo, te formule glase:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right).$$

Najprije primijetimo da su obje podintegralne funkcije parne. Doista, zbog parnosti funkcije kosinus i neparnosti funkcije sinus, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \cos(k \cdot (-x)) \cdot \cos(l \cdot (-x)) &= \cos(-k \cdot x) \cdot \cos(-l \cdot x) = \\ &= \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(k \cdot (-x)) \cdot \sin(l \cdot (-x)) &= \sin(-k \cdot x) \cdot \sin(-l \cdot x) = \\ &= (-\sin(k \cdot x)) \cdot (-\sin(l \cdot x)) = \\ &= \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x), \end{aligned}$$

pri čemu ovi identiteti (ponovno) vrijede za svaki $k, l \in \mathbb{R}$.

Koristeći ove identitete dokažimo prvu jednakost. Imamo redom:

$$\begin{aligned} I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x &= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\cos(k \cdot x - l \cdot x\right) + \cos(k \cdot x + l \cdot x) \right) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{0}^{\pi} \cos((k-l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos((k+l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \right) = \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos((k-l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos((k+l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Prema pretpostavci je $k > l$, pa su brojevi $k - l$ i $k + l$ cijeli brojevi različiti od nule. Tako dalje slijedi:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{k-l} \cdot \sin((k-l) \cdot x) \right)\Bigg|_0^{\pi} + \left(\frac{1}{k+l} \cdot \sin((k+l) \cdot x) \right)\Bigg|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{k-l} \cdot \left((\sin(k-l) \cdot x)\Big|_0^{\pi} \right) + \frac{1}{k+l} \cdot \left((\sin(k+l) \cdot x)\Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{k-l} \cdot (\underbrace{\sin((k-l) \cdot \pi)}_{=0} - \underbrace{\sin((k-l) \cdot 0)}_{=\sin 0 = 0}) + \frac{1}{k+l} (\underbrace{\sin((k+l) \cdot \pi)}_{=0} - \underbrace{\sin((k+l) \cdot 0)}_{=\sin 0 = 0}) = \\ &= \frac{1}{k-l} \cdot 0 + \frac{1}{k+l} \cdot 0 = \\ &= 0 + 0 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na analogan način dokazujemo i drugu jednakost. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\cos(k \cdot x - l \cdot x) - \cos(k \cdot x + l \cdot x) \right) \right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{0}^{\pi} \cos((k-l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} \cos((k+l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \right) = \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos((k-l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} \cos((k+l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dobili smo iste integrale kao u slučaju umnoška kosinusa, pri čemu je jedina razlika što ih ovdje oduzimamo. Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\pi} \cos((k-l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} \cos((k+l) \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 0 - 0 = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Time su obje tvrdnje potpuno dokazane.

5. Koristeći rezultate prethodnih zadataka izvedite **Eulerove formule za Fourierove koeficijente** $(2\cdot\pi)$-periodične realne funkcije f na segmentu $[-\pi,\pi]$. (Pretpostavite da f zadovoljava Dirichletove uvjete.)

Rješenje: Pretpostavimo da vrijedi jednakost:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x)).$$

Fiksirajmo proizvoljni $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Pomnožimo gornju jednakost sa $\cos(k\cdot x)$ i integrirajmo lijevu i desnu stranu od $-\pi$ do π. Na desnoj strani provodimo otprije poznato integriranje „član po član“ koje smijemo provesti kod konvergentnih redova (a promatrani Fourierov red pripada u takve). Dobivamo:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x))\right)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x))\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cdot\cos(n\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x+b_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x\right).$$

Prema rezultatu zadatka 2., svi integrali koje množe b_n-ovi jednaki su nuli.

Prema rezultatu zadatka 3., integrali koje množe a_n jednaki su nuli osim u slučaju $k=n$. Tada red na desnoj strani ima točno jedan član različit od nule. Ako je $k=n=0$, taj član je jednak $a_0\cdot 2\cdot\pi$, a ako je $k=n\neq 0$, taj član je jednak $a_n\cdot\pi$. Tako dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=a_0\cdot 2\cdot\pi,$$

$$a_0=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=a_n\cdot\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\mathrm{d}x,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Preostaje izvesti koeficijente uz sinuse višestrukih kutova. Fiksirajmo proizvoljni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pomnožimo jednakost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)).$$

sa $\sin(k \cdot x)$ i integrirajmo lijevu i desnu stranu od $-\pi$ do π. Na desnoj strani ponovno provodimo integriranje „član po član". Dobivamo:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)) \right) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \cos(n \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \cdot \sin(n \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \right).
\end{aligned}$$

Prema rezultatu zadatka 2., svi integrali koje množe a_n-ovi jednaki su nuli.

Prema rezultatu zadatka 3., integrali koje množe a_n jednaki su nuli osim u slučaju $k = n$. Tada red na desnoj strani ima točno jedan član različit od nule i on je jednak $b_n \cdot \pi$. Tako dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = b_n \cdot \pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Time je izvod u potpunosti dovršen.

Napomena 3. Potpuno analogan izvod može se provesti i u općem slučaju, tj. ako je f funkcija čiji je temeljni period T definirana na temeljnom segmentu $[x_0, x_0 + T]$. U tom su slučaju argumenti funkcija sinus i kosinus izrazi $\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T} \cdot x$, gdje je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naime, kako znamo iz *Matematike* 1, kružna frekvencija (koeficijent uz varijablu x) računa se prema izrazu $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, pa su njezini (cjelobrojni) višekratnici oblika

$$\omega = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}.$$

Detalje toga izvoda ovdje izostavljamo.

Napomena 4. Gornji izvod potječe od znamenita švicarskoga matematičara Leonharda Eulera iz 1777. godine, pa su po njemu izvedene formule i dobile ime.

6. Dokažite: Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **parna** $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete, onda su koeficijenti u njezinu razvoju u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$ dani formulama:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x, \\ b_n &= 0, \end{aligned}\right\}\forall n\in\mathbb{N}.$$

Rješenje: Ponovno koristimo tvrdnje:

$$g \text{ parna funkcija} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^{\pi} g(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{-\pi}^{0} g(x)\cdot \mathrm{d}x,$$

$$g \text{ neparna funkcija} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot \mathrm{d}x = 0.$$

Ako je f parna funkcija, onda je i $f(x)\cdot\cos(n\cdot x)$ parna funkcija jer vrijedi:

$$\begin{aligned} f(-x)\cdot\cos(n\cdot(-x)) &= \text{(jer je } f \text{ parna)} = \\ &= f(x)\cdot\cos(-n\cdot x) = \\ &= \text{(jer je cos parna)} = \\ &= f(x)\cdot\cos(n\cdot x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tako korištenjem prve od dviju gore navedenih tvrdnji slijedi:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot 2\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Na potpuno analogan način (korištenjem drugoga dijela iste tvrdnje) dokaže se:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(Učinite to sami za vježbu.)

Nadalje, ako je f parna funkcija onda je $f(x) \cdot \sin(n \cdot x)$ neparna funkcija jer vrijedi:

$$\begin{aligned} f(-x) \cdot \sin(n \cdot (-x)) &= \text{(jer je } f \text{ parna)} = \\ &= f(x) \cdot \sin(-n \cdot x) = \\ &= \text{(jer je sin neparna)} = \\ &= -f(x) \cdot \sin(n \cdot x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sada tvrdnja za koeficijente b_n slijedi izravnom primjenom druge od gore dviju navedenih tvrdnji.

7. Dokažite: Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **neparna** $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete, onda su koeficijenti u njezinu razvoju u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$ dani formulama:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0,\\ b_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x, \end{aligned}\right\}\forall n\in\mathbb{N}.$$

Rješenje: Ponovno koristimo tvrdnje:

$$g \text{ parna funkcija} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^{\pi} g(x)\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot\int_{-\pi}^{0} g(x)\cdot\mathrm{d}x,$$

$$g \text{ neparna funkcija} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot\mathrm{d}x = 0.$$

Ako je f neparna funkcija, onda je i $f(x)\cdot\cos(n\cdot x)$ neparna funkcija jer vrijedi:

$$\begin{aligned} f(-x)\cdot\cos(n\cdot(-x)) &= (\text{jer je } f \text{ neparna}) = \\ &= -f(x)\cdot\cos(-n\cdot x) = \\ &= (\text{jer je cos parna}) = \\ &= -f(x)\cdot\cos(n\cdot x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sada tvrdnje za koeficijente a_0 i a_n slijede izravnom primjenom druge od gore dviju navedenih tvrdnji.

Nadalje, ako je f neparna funkcija, onda je $f(x)\cdot\sin(n\cdot x)$ parna funkcija jer vrijedi:

$$\begin{aligned} f(-x)\cdot\sin(n\cdot(-x)) &= (\text{jer je } f \text{ neparna}) = \\ &= -f(x)\cdot\sin(-n\cdot x) = \\ &= (\text{jer je sin neparna}) = \\ &= -f(x)\cdot(-\sin(n\cdot x)) = \\ &= f(x)\cdot\sin(n\cdot x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tako korištenjem prve od dviju gore navedenih tvrdnji slijedi:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Na potpuno analogan način (korištenjem drugoga dijela iste tvrdnje) dokaže se:

$$
b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Napomena 5. Rezultati zadataka 6. i 7. su potpuno očekivani. U razvoju parne funkcije u Fourierov red ne mogu se pojaviti neparne funkcije oblika $\sin(n \cdot x)$. Analogno, razvoj neparne funkcije u Fourierov red ne može sadržavati parne funkcije (konstantu a_0 i funkcije oblika $\cos(n \cdot x)$).

8. Neka je $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna $(2\cdot\pi)-$periodična funkcija. Pretpostavimo da su $a_1, a_2, \ldots$ Fourierovi koeficijenti uz kosinuse višestrukih kutova u razvoju funkcije g u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$. Izračunajte zbroj reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Rješenje: Neka je

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x)\right)$$

Fourierov razvoj funkcije g u red na segmentu $[-\pi,\pi]$. Iz činjenice da je g neprekidna na $\mathbb{R}$ slijedi da je g neprekidna na $[-\pi,\pi]$. Zbog toga u svakoj točki $c\in[-\pi,\pi]$ pripadni Fourierov red konvergira prema $g(c)$.

Posebno, za $c=0$ trigonometrijski red

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot 0)+b_n\cdot\sin(n\cdot 0)\right)$$

konvergira prema $g(0)$. No,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot 0)+b_n\cdot\sin(n\cdot 0)\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cdot 1+b_n\cdot 0\right)=\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\end{aligned},$$

pa zaključujemo da $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ konvergira prema $g(0)$.

Dakle, traženi je zbroj jednak $g(0)$.

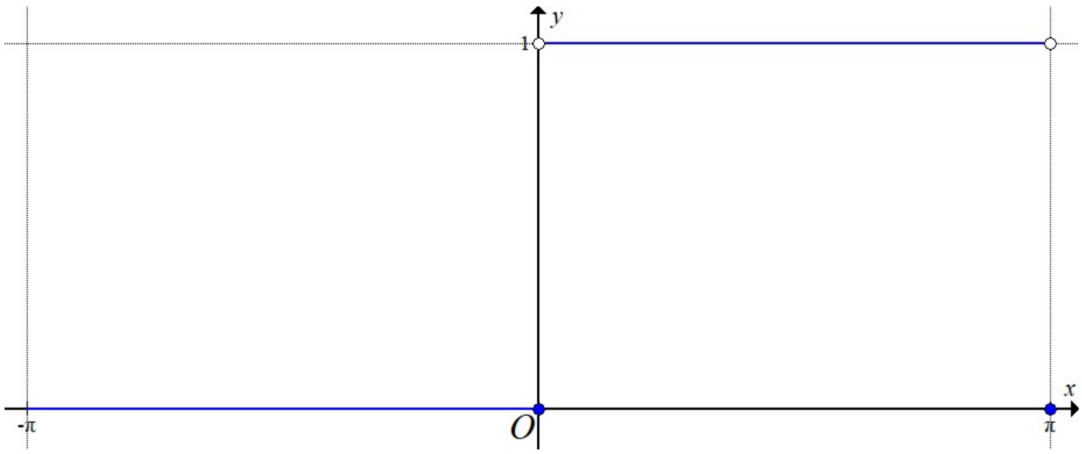
9. Za svaku od sljedećih $(2\cdot\pi)-$periodičkih realnih funkcija grafički provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\pi]$, pa napišite prva četiri člana (različita od nule) pripadnoga Fourierova reda na istom segmentu:

a) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x\in[-\pi,0];\\ 1, \text{ za } x\in\langle 0,\ \pi\rangle;\end{cases}$

Rješenje: Da bi funkcija f bila u potpunosti definirana na segmentu $[-\pi,\pi]$, moramo izračunati $f(\pi)$. Naime, tu vrijednost ne možemo izračunati ni po jednom od navedenih dvaju pravila jer $\pi\notin[-\pi,0]$ i $\pi\notin\langle 0,\pi\rangle$. Međutim, možemo (i hoćemo) iskoristiti $(2\cdot\pi)-$periodičnost funkcije *f*, pa povezati $f(\pi)$ s $f(-\pi)$, a tu vrijednost znamo odrediti:

$$\begin{aligned} f(\pi) &= (\text{zbog } (2\cdot\pi)\text{-periodičnosti}) = \\ &= f(\pi-2\cdot\pi) = \\ &= f(-\pi)=0. \end{aligned}$$

Sada možemo nacrtati graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. On je prikazan na slici 1. Vidimo da *f* ima točno dvije točke prekida (to su $x=0$ i $x=\pi$), a nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 1.

Preostaje izračunati Fourierove koeficijente prema Eulerovim formulama. U slučaju funkcije definirane po dijelovima (kakva je *f*) računanje može biti tehnički sporo i mukotrpno. Međutim, u ovom će nas slučaju „izvući“ trivijalno svojstvo određenoga integrala $\int_a^b 0\cdot \mathrm{d}x=0.$ Ono će nam omogućiti da računamo određene integrale samo na onim dijelovima na kojima je funkcija različita od nule. U ovom zadatku imamo (samo) jedan takav dio: to je interval $\langle 0,\pi\rangle$. Zbog omeđenosti funkcije *f*, ne moramo se opterećivati time što je funkcija za $x=0$ i $x=\pi$ definirana pravilom različitim od onoga koje vrijedi na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$. (Kratko kažemo da nam dvije navedene točke ne utječu na vrijednost određenoga integrala.) Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi} 1\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left((x)\Big|_0^{\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot(\pi-0) = \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} \cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot(\sin(n\cdot x))\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot(\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}-\underbrace{\sin(n\cdot 0)}_{=\sin 0=0}) = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} \sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos(n\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \\
&= \frac{-1}{n\cdot\pi}\cdot(\cos(n\cdot x))\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{-1}{n\cdot\pi}\cdot(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}-\underbrace{\cos(n\cdot 0)}_{=\cos 0=1}) = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\cdot\pi}.
\end{aligned}$$

Posljednji izraz možemo dodatno pojednostavniti uočimo li da vrijedi tvrdnja:

$$(-1)^{n+1}+1=\begin{cases}2, \text{ ako je } n \text{ neparan,}\\ 0, \text{ ako je } n \text{ paran.}\end{cases}$$

Zbog toga je:

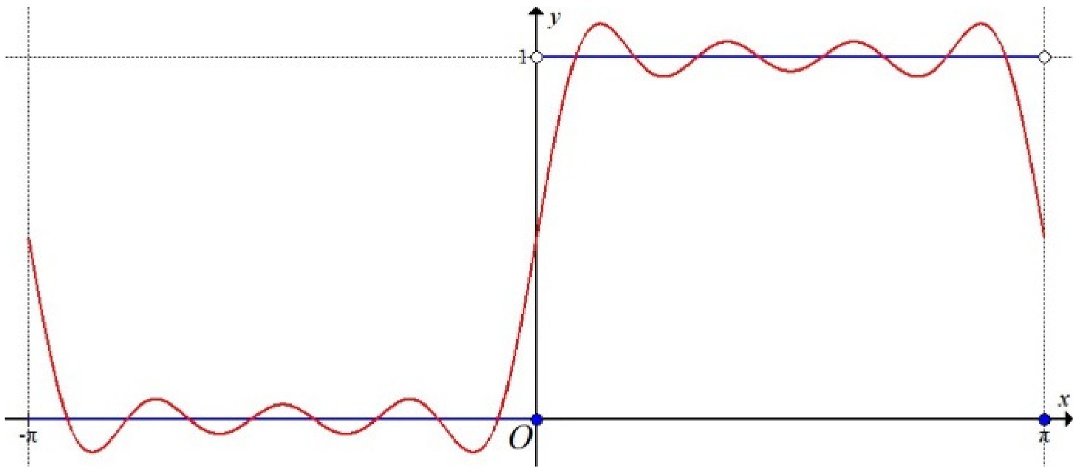
$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n\cdot\pi}, \text{ ako je } n \text{ neparan,}\\ 0, \text{ ako je } n \text{ paran.}\end{cases}$$

Tako razvoj funkcije f u Fourierov red sadrži slobodni član a_0 i članove oblika $b_n\cdot\sin((2\cdot n+1)\cdot x)$ (gledamo samo sinuse neparnih višekratnika varijable x jer su koeficijenti uz sinuse parnih višekratnika jednaki nuli.). Lako izračunamo:

$$b_1=\frac{2}{1\cdot\pi}=\frac{2}{\pi},\quad b_3=\frac{2}{3\cdot\pi},\quad b_5=\frac{2}{5\cdot\pi},\quad b_7=\frac{2}{7\cdot\pi},\ldots$$

pa konačno dobijemo:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\sin x+\frac{2}{3\cdot\pi}\cdot\sin(3\cdot x)+\frac{2}{5\cdot\pi}\cdot\sin(5\cdot x)+\ldots=\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((2\cdot k+1)\cdot x\right)}{2\cdot k+1}.\end{aligned}$$



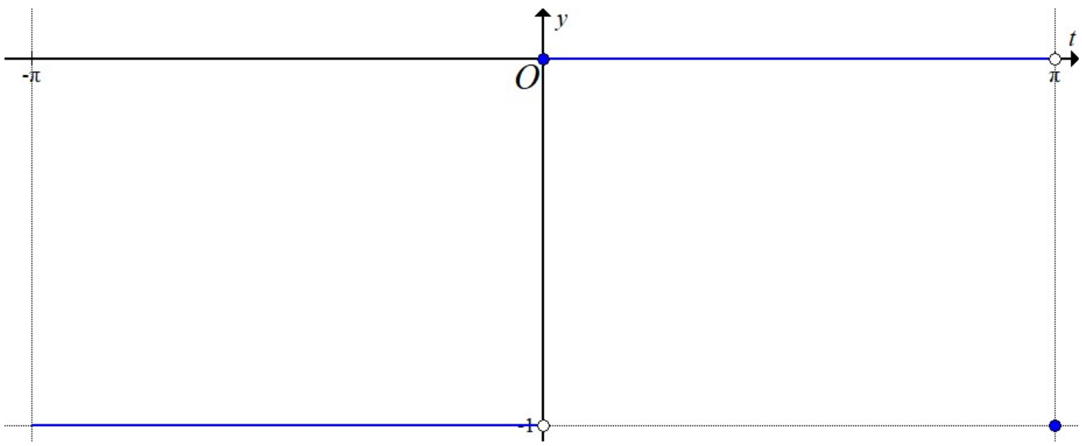
Slika 2.

b) $g(t)=\begin{cases}-1, \text{ za } t\in[-\pi,0\rangle; \\ 0, \text{ za } t\in[0,\pi\rangle;\end{cases}$

Rješenje: Da bi funkcija *g* bila u potpunosti definirana na segmentu $[-\pi,\pi]$, moramo izračunati $g(\pi)$. Naime, tu vrijednost ne možemo izračunati ni po jednom od navedenih dvaju pravila jer $\pi\notin[-\pi,0\rangle$ i $\pi\notin[0,\pi\rangle$. Međutim, možemo (i hoćemo) iskoristiti $(2\cdot\pi)-$periodičnost funkcije *g*, pa povezati $f(\pi)$ s $f(-\pi)$, a tu vrijednost znamo odrediti:

$$\begin{aligned} g(\pi) &= (\text{zbog } (2\cdot\pi)-\text{periodičnosti}) = \\ &= g(\pi-2\cdot\pi) = \\ &= g(-\pi) = \\ &= -1. \end{aligned}$$

Sada možemo nacrtati graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. On je prikazan na slici 3. Vidimo da *g* ima točno dvije točke prekida (to su $t=0$ i $t=\pi$), a nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 3.

Preostaje izračunati Fourierove koeficijente prema Eulerovim formulama. Postupit ćemo analogno kao u prethodnom podzadatku. Umjesto na cijelom segmentu $[-\pi,\pi]$, integrale ćemo računati na intervalu $[-\pi,0\rangle$ jer je (samo) na tom intervalu zadana funkcija različita od nule. Pritom nećemo paziti na granice intervala integracije, niti na točku $t=\pi$ u kojoj je funkcija također različita od 0. Niti jedna od tih triju točaka ne utječe na vrijednost određenoga integrala. Zbog toga imamo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot(-t)\Big|_{-\pi}^{0} = \\ &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot(0-(-(-\pi))) = \\ &= \frac{-1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{-1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{-1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot t)\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \\ &= \frac{-1}{n\cdot\pi}\cdot(\sin(n\cdot t))\Big|_{-\pi}^{0} = \\ &= \frac{-1}{n\cdot\pi}\cdot(\underbrace{\sin(n\cdot 0)}_{=0}-\underbrace{\sin(n\cdot(-\pi))}_{=-\sin(n\cdot\pi)=0}) = \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{-1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\sin(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \\ &= \frac{-1}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{n}\cdot\cos(n\cdot t)\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \\ &= \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot(\cos(n\cdot t))\Big|_{-\pi}^{0} = \\ &= \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot(\underbrace{\cos(n\cdot 0)}_{=\cos 0=1}-\underbrace{\cos(n\cdot(-\pi))}_{=\cos(n\cdot\pi)=(-1)^n}) = \\ &= \frac{1-(-1)^n}{n\cdot\pi}. \end{aligned}$$

Posljednji izraz možemo dodatno pojednostavniti uočimo li da vrijedi tvrdnja:

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Zbog toga je:

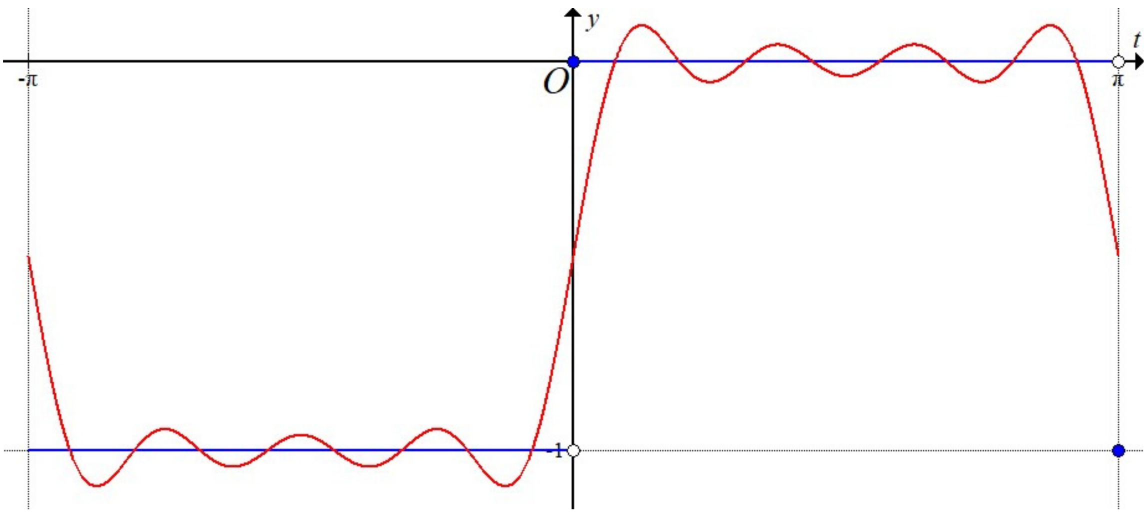
$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n \cdot \pi}, \text{ ako je } n \text{ neparan,} \\ 0, \text{ ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Tako razvoj funkcije g u Fourierov red sadrži slobodni član a_0 i članove oblika $b_n \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot t)$ (gledamo samo sinuse neparnih višekratnika varijable t jer su koeficijenti uz sinuse parnih višekratnika te varijable jednaki nuli.). Lako izračunamo:

$$b_1 = \frac{2}{1 \cdot \pi} = \frac{2}{\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{3 \cdot \pi}, \quad b_5 = \frac{2}{5 \cdot \pi}, \quad b_7 = \frac{2}{7 \cdot \pi}, \ldots$$

pa konačno dobijemo:

$$g(t) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sin t + \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot t) + \frac{2}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot t) + \ldots =$$
$$= \frac{-1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2 \cdot k + 1) \cdot t\right)}{2 \cdot k + 1}.$$



Slika 4.

Napomena 6. Općenito vrijedi sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja 2. Neka su $A \neq 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodična funkcija sa svojstvom:

$$f(x) = \begin{cases} A, \text{ za } x \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right], \\ 0, \text{ za } x \in \left\langle \dfrac{-T}{2}, 0 \right\rangle \end{cases}$$

i

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cdot\cos\left(\frac{2\cdot n\cdot\pi}{T}\cdot x\right)+b_n\cdot\sin\left(\frac{2\cdot n\cdot\pi}{T}\cdot x\right)\right)$$

razvoj funkcije f u Fourierov red na segmentu $\left[\frac{-T}{2},\frac{T}{2}\right]$.

Tada vrijede jednakosti:

$$a_0=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to\left(\frac{-T}{2}\right)+}f(x)+\lim_{x\to\left(\frac{T}{2}\right)-}f(x)\right)=$$
$$=\frac{A}{2}.$$

Analogna tvrdnja vrijedi za bilo koju valjanu „kombinaciju“ otvorenih, poluotvorenih, poluzatvorenih i zatvorenih intervala u definiciji funkcije f.

Dokaz: „Slobodni“ Eulerov koeficijent a_0 definiran je pomoću određenoga integrala funkcije f na segmentu $\left[\frac{-T}{2},\frac{T}{2}\right]$. Budući da vrijednost određenoga integrala $\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot \mathrm{d}x$ ne ovisi o vrijednostima $f\left(\frac{-T}{2}\right), f(0)$ i $f\left(\frac{T}{2}\right)$, zaključujemo da tvrdnja 2. vrijedi za spomenute „kombinacije“ intervala.

Primijetimo da funkcija f zadovoljava oba Dirichletova uvjeta jer ima točno dvije točke prekida i nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga postoji razvoj te funkcije u Fourierov red na segmentu $\left[\frac{-T}{2},\frac{T}{2}\right]$.

Dokažimo najprije jednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to\left(\frac{-T}{2}\right)+}f(x)+\lim_{x\to\left(\frac{T}{2}\right)-}f(x)\right)=\frac{A}{2}.$$

Imamo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to\left(\frac{-T}{2}\right)+}f(x)+\lim_{x\to\left(\frac{T}{2}\right)-}f(x)\right)=\frac{1}{2}\cdot(0+A)=\frac{A}{2},$$

što smo i tvrdili.

Preostaje dokazati jednakost

$$a_0 = \frac{A}{2}.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_{\frac{-T}{2}}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \mathrm{d}x \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_{\frac{-T}{2}}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} A \cdot \mathrm{d}x \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(0 + (A \cdot x)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \frac{T}{2} - A \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot A \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{2},
\end{aligned}$$

što smo i tvrdili.

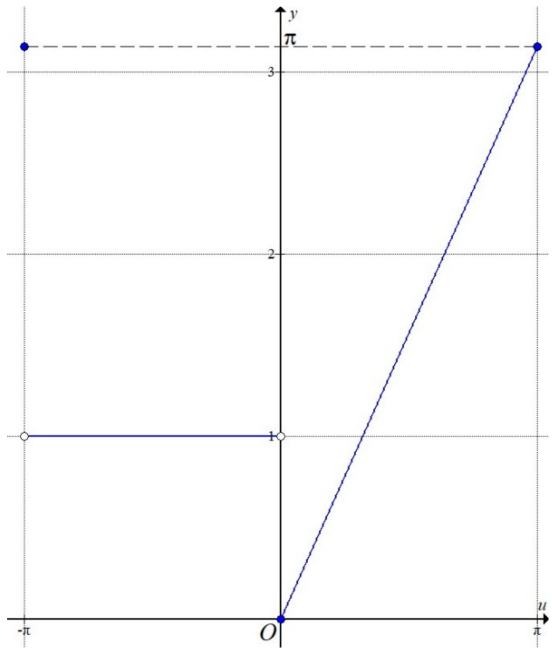
Potpuno analogni dokazi provode se i u svakoj od ostalih „kombinacija“ spomenutih u iskazu tvrdnje. Provedite ih sami za vježbu.

c) $h(u)=\begin{cases}1, \text{ za } u\in\langle-\pi,0\rangle;\\ u, \text{ za } u\in[0,\pi].\end{cases}$

Rješenje: Analogno kao u rješenju **b)** podzadatka, da bi funkcija *h* bila u potpunosti definirana na segmentu $[-\pi,\pi]$, moramo izračunati $h(-\pi)$. Naime, tu vrijednost ne možemo izračunati ni po jednom od navedenih dvaju pravila jer $-\pi\notin\langle-\pi,0\rangle$ i $-\pi\notin[0,\pi]$. Međutim, možemo (i hoćemo) iskoristiti $(2\cdot\pi)-$periodičnost funkcije *h*, pa povezati $h(-\pi)$ s $h(\pi)$, a tu vrijednost znamo odrediti:

$$\begin{aligned}h(-\pi)&=(\text{zbog }(2\cdot\pi)-\text{periodičnosti})=\\&=h(-\pi+2\cdot\pi)=\\&=h(\pi)=\\&=\pi.\end{aligned}$$

Sada možemo nacrtati graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. On je prikazan na slici 5. Vidimo da *h* ima prekid u točkama $u=-\pi$ i $u=0$, te strogi lokalni minimum 0 za $u=0$. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 5.

Zadana funkcija nije identički jednaka nulfunkciji ni na jednom podintervalu segmenta $[-\pi,\pi]$, pa ćemo Fourierove koeficijente prema Eulerovim formulama morati računati tako da određeni integral od $-\pi$ do π rastavimo na zbroj dva integrala: prvi integral će imati područje integracije $\langle-\pi,0\rangle$, a drugi $[0,\pi]$. Opet se nećemo obazirati na uglate i „šiljaste“ zagrade jer, zbog očite (obostrane) omeđenosti funkcije

h na segmentu $[-\pi, \pi]$, uključivanje/isključivanje rubnih točaka intervala $\langle -\pi, 0\rangle$ ne utječe na konačnu vrijednost integrala. Koristeći rezultate prethodnih zadataka imamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} u\cdot \mathrm{d}u\right) =$$
$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left((u)\Big|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{1}{2}\cdot u^2\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(0-(-\pi)+\left(\frac{1}{2}\cdot\pi^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos(n\cdot u)\cdot \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} u\cdot\cos(n\cdot u)\cdot \mathrm{d}u\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot u)\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{1}{n^2}\cdot(\cos(n\cdot u)+n\cdot u\cdot\sin(n\cdot u))\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2\cdot\pi}\cdot(n\cdot(\underbrace{\sin 0}_{=0} - \underbrace{\sin(n\cdot(-\pi))}_{=-\sin(n\cdot\pi)=0})) + \underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} + n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - (\underbrace{\cos 0}_{=1}+0))$$
$$= \frac{(-1)^n-1}{n^2\cdot\pi} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2\cdot\pi}, \text{ ako je } n \text{ neparan,} \\ 0, \text{ ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin(n\cdot u)\cdot \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} u\cdot\sin(n\cdot u)\cdot \mathrm{d}u\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(\left(\frac{-1}{n}\right)\cdot\cos(n\cdot u)\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{1}{n^2}\cdot(\sin(n\cdot u)-n\cdot u\cdot\cos(n\cdot u))\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2\cdot\pi}\cdot((-n)\cdot(\underbrace{\cos 0}_{=1} - \underbrace{\cos(n\cdot(-\pi))}_{=\cos(n\cdot\pi)=(-1)^n})) + \underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} - (\underbrace{\sin 0}_{=0}-0)) =$$
$$= \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot\left(-1+(-1)^n\cdot(1-\pi)\right) =$$

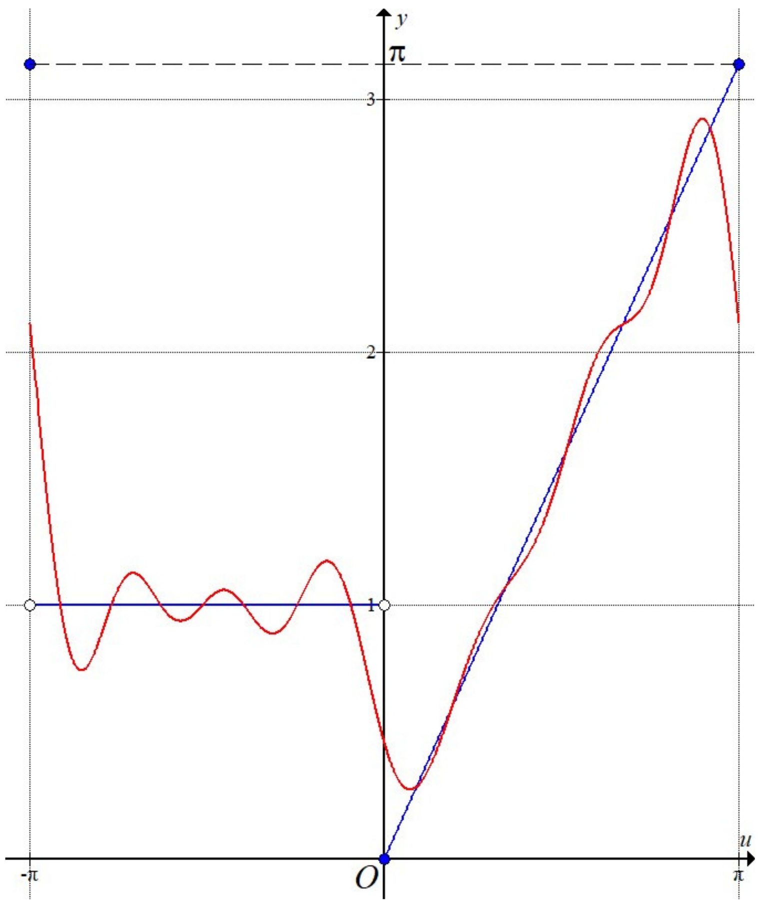
$$=\begin{cases}\dfrac{\pi-2}{n\cdot\pi}, & \text{ako je } n \text{ neparan,}\\ \dfrac{-1}{n}, & \text{ako je } n \text{ paran.}\end{cases}$$

Računanjem lagano dobijemo (ne pišemo članove koji su jednaki nuli):

$$a_1=\frac{-2}{\pi},\ a_3=\frac{-2}{9\cdot\pi},\ a_5=\frac{-2}{25\cdot\pi},\ a_7=\frac{-2}{49\cdot\pi},\ldots$$
$$b_1=\frac{\pi-2}{\pi},\ b_2=\frac{-1}{2},\ b_3=\frac{\pi-2}{3\cdot\pi},\ b_4=\frac{-1}{4},\ldots$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$h(u)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\cos u+\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\cdot\sin u-\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot u)-\frac{2}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot u)+\left(\frac{\pi-2}{3\cdot\pi}\right)\cdot\sin(3\cdot u)+\ldots=$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\cos u+\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\cdot\sin u-\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot u)-\frac{2}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot u)+\left(\frac{\pi-2}{3\cdot\pi}\right)\cdot\sin(3\cdot u)+\ldots$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\left((2\cdot k+1)\cdot u\right)}{(2\cdot k+1)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\sin(k\cdot u)}{k}-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((2\cdot k+1)\cdot u\right)}{2\cdot k+1}.$$



Slika 6.

Napomena 7. Primijetite da su zbrojevi reda u točkama prekida u netom riješenom podzadatku redom jednaki:

$$\begin{aligned} S(-\pi) = S(\pi) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{u \to (-\pi)+} h(u) + \lim_{u \to \pi-} h(u) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1 + \pi) = \\ &= \frac{\pi - 1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{u \to 0-} h(u) + \lim_{u \to 0+} h(u) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 0) = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odredite analogne zbrojeve i u ostalim dvama podzadacima.

10. Neparna $(2\cdot\pi)-$periodična funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$f(x)=\frac{\pi}{4},\ \forall x\in\langle 0,\pi\rangle.$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi,\pi]$ Fourierovim polinomom F_7 7. stupnja.

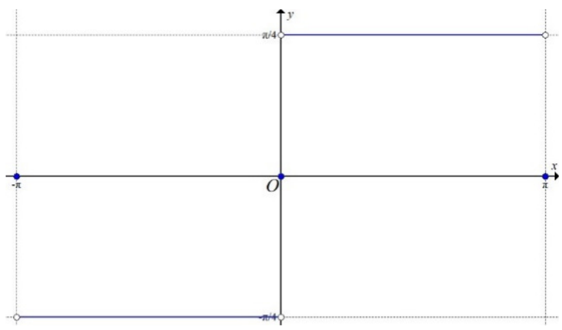
c) Koristeći rezultat b) podzadatka izračunajte egzaktnu vrijednost zbroja $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2\cdot k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$.

Rješenje: a) Prema pretpostavci, f je neparna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, pa iz rezultata zadatka 1. slijedi da je $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=0$.

Preostaje odrediti pravilo funkcije f na intervalu $\langle-\pi,0\rangle$. Neparnost funkcije f možemo interpretirati i ovako: „Međusobno suprotnim x-evima pridruženi su međusobno suprotni y-i." Ako je $x\in\langle 0,\pi\rangle$, onda je $-x\in\langle-\pi,0\rangle$. Svakom $x\in\langle 0,\pi\rangle$ pridružen je broj $\frac{\pi}{4}$, pa je, zbog neparnosti, broju $-x\in\langle-\pi,0\rangle$ pridružen broj $\frac{-\pi}{4}$. Dakle, pravilo funkcije f glasi:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & \text{za } x\in\langle 0,\pi\rangle;\\ \frac{-\pi}{4}, & \text{za } x\in\langle-\pi,0\rangle;\\ 0, & \text{za } x\in\{-\pi,0,\pi\}\end{cases}$$

Graf funkcije f na segmentu $[-\pi,\pi]$ prikazan je na slici 7.



Slika 7.

Vidimo da f ima prekid u točkama $x=-\pi$, $x=0$ i $x=\pi$, a nema niti jedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Primijenimo rezultat zadatka 7. U tom smo zadatku dokazali da, ako je f neparna funkcija, onda za svaki $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ vrijedi $a_n=0$, tj. njezin razvoj u Fourierov red sadrži samo sinuse višestrukih kutova. To znači da treba odrediti (samo) koeficijente b_n prema inačici Eulerove formule koju smo dokazali u istom zadatku.

Da bismo odredili te koeficijente, moramo izabrati hoćemo li funkciju f integrirati na segmentu $[0,\pi]$ ili na segmentu $[-\pi,0]$. Zbog stroge pozitivnosti te funkcije na prvom od tih dvaju segmenata, nešto jednostavnija je integracija funkcije na segmentu $[0,\pi]$, pa ćemo odabrati upravo taj segment. Tako imamo:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{n}\cdot\cos(n\cdot x)\right)\Big|_0^{\pi}=\\
&=\left(\frac{-1}{2\cdot n}\right)\cdot(\cos(n\cdot x)\Big|_0^{\pi}=\\
&=\left(\frac{-1}{2\cdot n}\right)\cdot(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}-\underbrace{\cos(n\cdot 0)}_{=1})=\\
&=\left(\frac{-1}{2\cdot n}\right)\cdot((-1)^n-1)=\\
&=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2\cdot n}=\\
&=\begin{cases}\frac{1}{n},\ \text{ako je } n \text{ neparan,}\\ 0,\ \text{ako je } n \text{ paran.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Dakle, traženi razvoj u red sadrži samo sinuse neparnih višekratnika varijable x, pa slijedi:

$$b_1=\frac{1}{1}=1,\ b_3=\frac{1}{3},\ b_5=\frac{1}{5},\ b_7=\frac{1}{7},\ldots\Rightarrow$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2\cdot n+1)\cdot x)}{2\cdot n+1}=\sin x+\frac{1}{3}\cdot\sin(3\cdot x)+\frac{1}{5}\cdot\sin(5\cdot x)+\frac{1}{7}\cdot\sin(7\cdot x)+\ldots\Rightarrow$$

$$F_7(x)=\sin x+\frac{1}{3}\cdot\sin(3\cdot x)+\frac{1}{5}\cdot\sin(5\cdot x)+\frac{1}{7}\cdot\sin(7\cdot x).$$

c) U Fourierov razvoj u red dobiven u b) podzadatku uvrstimo $x = \frac{\pi}{2}$. Dobijemo:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2 \cdot n + 1} = \\ = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} + \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + \frac{1}{7} \cdot \underbrace{\sin\left(7 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} + \ldots,$$

a odatle, zbog

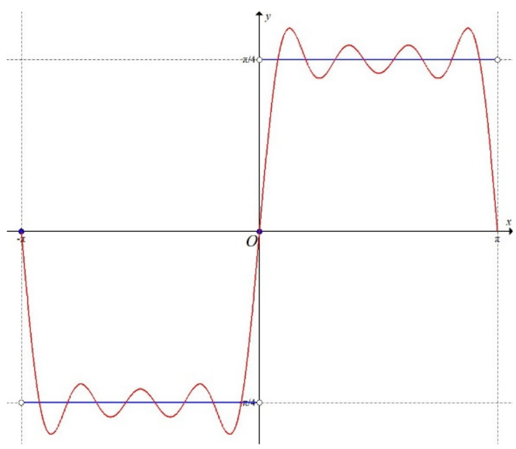
$$\frac{\pi}{2} \in \langle 0, \pi \rangle \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

i

$$\sin\left((2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right) = \\ = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot \pi)}_{=(-1)^n} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot \pi)}_{=0} = \\ = 1 \cdot (-1)^n + 0 \cdot 0 = \\ = (-1)^n,$$

izravno slijedi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \\ = \frac{\pi}{4}.$$



Slika 8.

11. $(2 \cdot \pi)-$periodična funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo:

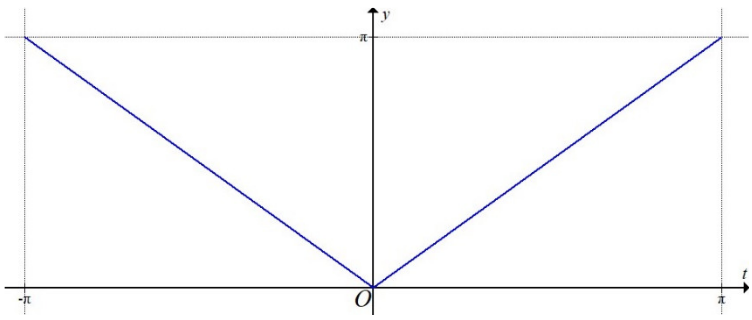
$$g(t) = |t|, \ \forall t \in [-\pi, \pi].$$

a) Isključivo grafički provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi, \pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja.

c) Koristeći rezultat b) podzadatka, izračunajte egzaktne vrijednosti zbrojeva redova $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$ i $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2 \cdot k + 1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots$.

Rješenje: a) Graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$ prikazan je na slici 9.



Slika 9.

g je neprekidna na $[-\pi, \pi]$ te ima strogi lokalni minimum 0 za $t = 0$. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Najprije primijetimo da je zadana funkcija parna. Prema rezultatu zadatka 6., to znači da njezin razvoj u Fourierov red sadrži slobodni član a_0 i kosinuse višestrukih kutova (tj. članove oblika $a_n \cdot \cos(n \cdot x)$), dok su svi Fourierovi koeficijenti uz sinuse višestrukih kutova jednaki nuli (tj. vrijedi: $b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$).

Prema rezultatu istoga (6.) zadatka, ne trebamo računati određene integrale na cijelom segmentu $[-\pi, \pi]$, nego na nekoj od dviju polovica toga segmenta: ili na segmentu $[-\pi, 0]$ ili na segmentu $[0, \pi]$. Teorija kaže da je potpuno svejedno koji od tih dvaju segmenata odaberemo, ali praksa kaže malo drugačije. Iz definicije funkcije apsolutne vrijednosti znamo da ona „pušta na miru“ sve nenegativne realne brojeve, što znači da u ovom slučaju vrijedi:

$$g(t) = t, \ \forall t \in [0, \pi].$$

Zbog toga ćemo kao segment integracije odabrati $[0,\pi]$. Krećemo sa računanjem i koristimo preinačene Eulerove formule koje smo izveli u rješenju zadatka 6.:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} t\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t^2\right)\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(t^2\right)\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\pi^2-0^2\right) = \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos(n\cdot t)+n\cdot t\cdot\sin(n\cdot t)\right)\right)\Big|_0^{\pi}\right) = \\
&= \frac{2}{n^2\cdot\pi}\cdot\left((\cos(n\cdot t)+n\cdot t\cdot\sin(n\cdot t))\Big|_0^{\pi}\right) = \\
&= \frac{2}{n^2\cdot\pi}\cdot(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}+n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}-(\underbrace{\cos(n\cdot 0)}_{=\cos 0=1}+\underbrace{n\cdot 0\cdot\sin(n\cdot 0)}_{=0})) \\
&= \frac{2}{n^2\cdot\pi}\cdot\left((-1)^n-1\right) = \\
&= \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2\cdot\pi}, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vidimo da, osim slobodnoga člana, razvoj zadane funkcije u Fourierov red sadrži (samo) kosinuse neparnih višestrukih kutova. Sada lako izračunamo:

$$a_1 = \frac{-4}{\pi},\ a_3 = \frac{-4}{9\cdot\pi},\ a_5 = \frac{-4}{25\cdot\pi},\ a_7 = \frac{-4}{49\cdot\pi},\ldots$$

pa je konačno:

$$F_7(t) = \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\cos t-\frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot t)-\frac{4}{25\cdot\pi}\cdot\cos(5\cdot t)-\frac{4}{49\cdot\pi}\cdot\cos(7\cdot t).$$

c) Iz rezultata prethodnoga podzadatka slijedi:

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos\left((2 \cdot k + 1) \cdot t\right)}{(2 \cdot k + 1)^2}$$

U ovu jednakost uvrstimo $t = \pi$. Očito je $g(\pi) = \pi$, pa dobijemo:

$$g(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \cdot \underbrace{\cos(3 \cdot \pi)}_{=-1} - \frac{4}{25 \cdot \pi} \cdot \underbrace{\cos(5 \cdot \pi)}_{=-1} - \frac{4}{49 \cdot \pi} \cdot \underbrace{\cos(7 \cdot \pi)}_{=-1} - \ldots \Rightarrow$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\right)$$

Prebacimo $\frac{\pi}{2}$ na lijevu stranu jednakosti i podijelimo je sa $\frac{4}{\pi}$. Dobijemo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2 \cdot k + 1)^2} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \\ &= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = . \\ &= \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Nadalje, označimo

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Znamo da je taj red Dirichletov za $p = 2$. Prema rezultatu zadatka 10. iz točke 2.2. zaključujemo da je taj red konvergentan. To znači da njegove članove možemo grupirati i mijenjati im poredak, tj. da smijemo primijeniti svojstva komutativnosti i asocijativnosti. Zbog toga postupimo ovako:

$$\begin{aligned}S &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots = \\ &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right).\end{aligned}$$

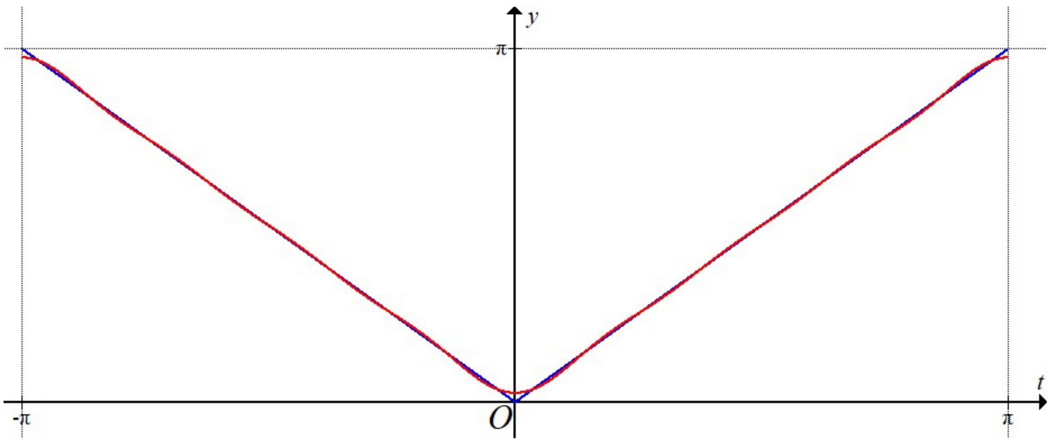
Iz prve okrugle zagrade izlučimo $\frac{1}{2^2}$, a druga je – prema rezultatu prethodnoga zadatka – jednaka $\frac{\pi^2}{8}$. Tako dobivamo:

$$S = \frac{1}{2^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) + \frac{\pi^2}{8},$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{3}{4} \cdot S = \frac{\pi^2}{8},$$

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$



Slika 10

12. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2-periodična funkcija sa svojstvom:

$$f(x)=(-2)\cdot|x|,\ \forall x\in[-1,1].$$

Razvijte funkciju f u Fourierov red na segmentu $[-1,1]$.

Rješenje: Uočimo najprije da je funkcija f parna. Zbog toga njezin razvoj u Fourierov red na zadanom segmentu sadrži slobodni član a_0 i kosinuse višestrukih kutova (tj. članove oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot x)$), a ne sadrži članove oblika $b_n\cdot\sin(n\cdot x)$ jer je $b_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Također, analogno kao u prethodnom zadatku zaključujemo da vrijedi svojstvo:

$$f(x)=(-2)\cdot x,\ \forall x\in[0,1].$$

U ovom zadatku primjenjujemo formule za Fourierov razvoj u red *bilo koje* periodične funkcije definirane na $\mathbb{R}$, a čiji su temeljni period T i temeljni segment $\left[\frac{-T}{2},\frac{T}{2}\right]$ (vidjeti npr. *Repetitorij matematike za studente elektrotehnike*, str. 54.) Tako najprije dobivamo:

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{1}\cdot\int_0^1(-2)\cdot x\cdot\mathrm{d}x=\\
&=(-2)\cdot\int_0^1 x\cdot\mathrm{d}x=\\
&=(-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\Big|_0^1=\\
&=(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2\right)\Big|_0^1=\\
&=(-1)\cdot\left(1^2-0^2\right)=\\
&=-1,
\end{aligned}$$

a potom

$$a_n = (-2)\cdot 2\cdot \int_0^1 x\cdot\cos\left(n\cdot\pi\cdot x\right)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{zamjena:} \\ t := \pi\cdot x, \\ x = \dfrac{t}{\pi} \\ \mathrm{d}t = \pi\cdot \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\cdot \mathrm{d}t \\ 0 \to \pi\cdot 0 = 0, \\ 1 \to \pi\cdot 1 = \pi \end{Bmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi}\cdot\cos(n\cdot t)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{-4}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi} t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{-4}{\pi^2}\cdot\left(\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos(n\cdot t)+n\cdot t\cdot\sin(n\cdot t)\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{-4}{n^2\cdot\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} + n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - (\underbrace{\cos(n\cdot 0)}_{=\cos 0 = 1} + \underbrace{n\cdot 0\cdot\sin(n\cdot 0)}_{=0})\right) =$$

$$= \frac{-4}{n^2\cdot\pi^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right) =$$

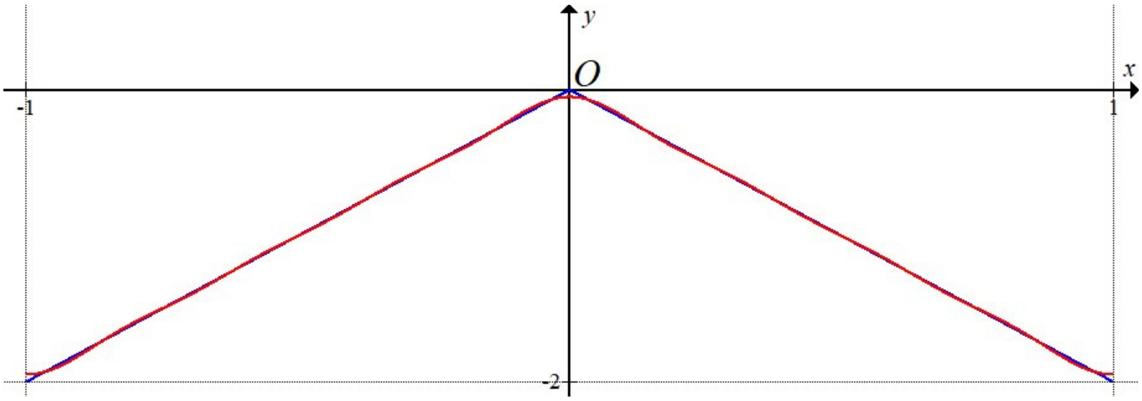
$$= \begin{cases} \dfrac{8}{n^2\cdot\pi^2}, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Dakle, Fourierov razvoj u red sadrži slobodni član a_0 i kosinuse neparnih višekratnika izraza $\pi\cdot x$, pa taj razvoj glasi:

$$a_1 = \frac{8}{\pi^2},\ a_3 = \frac{8}{9\cdot\pi^2},\ a_5 = \frac{8}{25\cdot\pi^2},\ a_7 = \frac{8}{49\cdot\pi^2}, \ldots \Rightarrow$$

$$f(x) = -1 + \frac{8}{\pi^2}\cdot\cos(\pi\cdot x) + \frac{8}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos(3\cdot\pi\cdot x) + \frac{8}{25\cdot\pi^2}\cdot\cos(5\cdot\pi\cdot x) + \ldots$$

$$= -1 + \frac{8}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2\cdot n+1)\cdot\pi\cdot x)}{(2\cdot n+1)^2}.$$



Slika 11.

13. $(2\cdot\pi)-$ periodična realna funkcija f ima svojstvo:

$$f(x)=\begin{cases}1012\cdot(x+\sin x), \ \forall x\in\langle-\pi,\pi\rangle,\\ 0, \text{ za } x\in\{-\pi,\pi\}.\end{cases}$$

Izračunajte zbroj koeficijenata uz $\cos(2024\cdot x)$ i $\sin(2024\cdot x)$ u razvoju funkcije f u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$.

Rješenje: Funkcije $\sin x$ i x su neparne funkcije, pa je i funkcija $f-$ kao njihov zbroj – neparna funkcija. To znači da Fourierov razvoj te funkcije u red ne sadrži slobodni član a_0, kao i nijedan član oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot x)$. Posebno, to znači da je i koeficijent uz $\cos(2024\cdot x)$ jednak 0, tj. $a_{2024}=0$.

Preostaje izračunati koeficijent uz $\sin(2024\cdot x)$, tj. b_{2024}. Primijetimo da ako je

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\cdot\sin(n\cdot x)$$

razvoj funkcije $f_1(x)=x$ u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$, onda je

$$f(x)=1012\cdot\left((b_1+1)\cdot\sin x+\sum_{n=2}^{+\infty}b_n\cdot\sin(n\cdot x)\right)$$

razvoj zadane funkcije u Fourierov red. Naime, razvoj funkcije sin x u Fourierov red sadrži točno jedan član – to je sin x – pa zbrajanjem (konvergentnih!) Fourierovih redova dobivamo gornju jednakost.

Tako zaključujemo da je b_{2024} jednak Eulerovom koeficijentu uz $\sin(2024\cdot x)$ u razvoju funkcije $f_1(x)=1012\cdot x$ u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sada lako dobivamo:

$$\begin{aligned}
b_{2024}&=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}1012\cdot x\cdot\sin(2024\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\
&=\frac{2024}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2024^2}\cdot\left(\sin(2024\cdot x)-2024\cdot x\cdot\cos(2024\cdot x)\right)\Big|_0^{\pi}\right)=\\
&=\frac{1}{2024\cdot\pi}\cdot\left(\left(\underbrace{\sin(2024\cdot\pi)}_{=0}-2024\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(2024\cdot\pi)}_{=1}\right)-\left(\underbrace{\sin(2024\cdot\pi)}_{=0}-\underbrace{2024\cdot0\cdot\cos(2024\cdot0)}_{=0}\right)\right)=\\
&=\frac{1}{2024\cdot\pi}\cdot(-2024\cdot\pi)=-1.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$a_{2024}+b_{2024}=0+(-1)=-1.$$

14. $(2\cdot\pi)-$periodična realna funkcija f ima svojstvo:

$$f(x)=\cos x+x^2,\ \forall x\in[-\pi,\pi].$$

Izračunajte zbroj koeficijenata uz $\cos(2\cdot x)$ i $\sin(2\cdot x)$ u razvoju funkcije f u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$.

Rješenje: Funkcije $\cos x$ i x^2 su parne funkcije, pa je i funkcija f – kao njihov zbroj – parna funkcija. To znači da Fourierov razvoj te funkcije u red ne sadrži nijedan član oblika $b_n\cdot\sin(n\cdot x)$. Posebno, to znači da je i koeficijent uz $\sin(2\cdot x)$ jednak 0, tj. $b_2=0.$

Preostaje izračunati koeficijent uz $\cos(2\cdot x)$, tj. a_2. Primijetimo da ako je

$$x^2=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot\cos(n\cdot x)$$

razvoj funkcije $f_1(x)=x^2$ u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$, onda je

$$f(x)=a_0+(a_1+1)\cdot\cos x+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n\cdot\cos(n\cdot x)$$

razvoj zadane funkcije u Fourierov red. Naime, razvoj funkcije cos x u Fourierov red sadrži točno jedan član – to je cos x – pa zbrajanjem (konvergentnih!) Fourierovih redova dobivamo gornju jednakost.

Tako zaključujemo da je a_2 jednak Eulerovom koeficijentu uz $\cos(2\cdot x)$ u razvoju funkcije $f_1(x)=x^2$ u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sada lako dobivamo:

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos(2\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2^2}\cdot\left(\left(2\cdot x^2-1\right)\cdot\sin(2\cdot x)+2\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)\right)\Big|_0^{\pi}\right)=\\
&=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\left(\left(2\cdot\pi^2-1\right)\cdot\underbrace{\sin(2\cdot\pi)}_{=0}+2\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(2\cdot\pi)}_{=1}\right)-\left(\left(2\cdot 0^2-1\right)\cdot\underbrace{\sin(2\cdot 0)}_{=0}+\underbrace{2\cdot 0\cdot\cos(2\cdot 0)}_{=0}\right)\right)=\\
&=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot(2\cdot\pi)=1.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$a_2+b_2=1+0=1.$$