2.5. LOKALNI I GLOBALNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI

LOKALNI I GLOBALNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI I NJIHOVE PRIMJENE U EKONOMIJI.

2.5.1. POJAM LOKALNOGA EKSTREMA

- U *Gospodarskoj matematici* 1 naučili smo određivati lokalne ekstreme realne funkcije jedne realne varijable. To su bili *lokalni minimum* i *lokalni maksimum*.
- Slobodno, ali neprecizno govoreći, *lokalni minimum* je najmanja vrijednost funkcije na nekom otvorenom intervalu. Preciznije, kažemo da funkcija *f ima lokalni minimum u točki c* ako postoji otvoreni interval I oko točke c takav da za svaki $x \in I$, $x \neq c$, vrijedi $f(x) > f(c)$.
- Analogno, *lokalni maksimum* je najveća vrijednost funkcije na nekom otvorenom intervalu. Preciznije, kažemo da funkcija *f ima lokalni maksimum u točki c* ako postoji otvoreni interval I oko točke c takav da za svaki $x \in I$, $x \neq c$, vrijedi $f(x) < f(c)$.
- U oba slučaja vrijednost $f(c)$ nazivamo *ekstremnim vrijednostima*.

2.5.2. ODREĐIVANJE LOKALNIH EKSTREMA

- Lokalni ekstremi derivabilne funkcije jedne realne varijable relativno jednostavno se mogu odrediti pomoću prve i druge derivacije te funkcije.
- **Problem**: Kako postupiti u slučaju funkcija više varijabli? Za njih pojam "obične" derivacije nije definiran.
- **Odgovor**: Koristimo *parcijalne derivacije* 1. i 2. reda. Parcijalne derivacije 1. reda već smo upoznali u točki 3.4.
- Sve parcijalne derivacije 2. reda dobijemo tako da svaku parcijalnu derivaciju prvoga reda deriviramo (kao "običnu" funkciju jedne realne varijable) po svakoj varijabli.
- Mi ćemo promatrati slučaj diferencijabilne funkcije dviju varijabli. Ta funkcija ima dvije parcijalne derivacije 1. reda i tri (a ne četiri!) parcijalne derivacije 2. reda.

2.5.2. ODREĐIVANJE LOKALNIH EKSTREMA

- Preciznije, neka je $z = f(x, y)$. Tada su:
- z_x = parcijalna derivacija funkcije z po varijabli x.
- z_y = parcijalna derivacija funkcije z po varijabli y.
- z_{xx} = parcijalna derivacija funkcije z_x po varijabli x.
- z_{xy} = parcijalna derivacija funkcije z_x po varijabli y.
- z_{yx} = parcijalna derivacija funkcije z_y po varijabli x.
- z_{yy} = parcijalna derivacija funkcije zy po varijabli y.
- Može se pokazati da vrijedi tzv. *Schwarzova lema*:
- $z_{xy} = z_{yx}$.
- Zbog toga imamo dvije parcijalne derivacije 1. reda (z_x i z_y) i tri parcijalne derivacije drugoga reda (z_{xx}, z_{xy} i z_{yy}).

2.5.2. ODREĐIVANJE LOKALNIH EKSTREMA

- Uz navedene oznake, algoritam za određivanje lokalnih ekstrema funkcije dviju varijabli možemo iskazati ovako:
- **Ulaz**: Funkcija $z = f(x, y)$.
- **Korak 1.** Odrediti z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} i z_{yy}.
- **Korak 2.** Riješiti *sustav jednadžbi* $z_x = 0$, $z_y = 0$. Neka je (x_0, y_0) bilo koje rješenje toga sustava.
- **Korak 3.** Izračunati vrijednosti $h_{11} := z_{xx}(x_0, y_0)$, $h_{12} := z_{xy}(x_0, y_0)$, $h_{21} := h_{12}$ i $h_{22} := z_{yy}(x_0, y_0)$.
- **Korak 4.** Formirati matricu $H = [h_{ij}] \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Ta matrica naziva se *Hesseova matrica*.
- **Korak 5.** Izračunati $h := \det(H)$. Tu determinantu nazivamo *Hessian* funkcije f.

2.5.2. ODREĐIVANJE LOKALNIH EKSTREMA

- **<u>Korak 6.</u>** Ako su $h_{11} > 0$ i $h > 0$, onda funkcija f ima *lokalni minimum* u točki (x_0, y_0).
- Ako su $h_{11} < 0$ i $h > 0$, onda funkcija f ima *lokalni maksimum* u točki (x_0, y_0).
- Ako je $h < 0$, onda funkcija f *nema lokalni ekstrem* u točki (x_0, y_0). (Vrijednost broja h_{11} nije bitna.)
- Ako je $h = 0$, onda *ne možemo zaključiti* ima li funkcija f lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) ili nema. (Vrijednost broja h_{11} opet nije bitna.)
- U prva dva slučaja kažemo da je $f(x_0, y_0)$ *ekstremna vrijednost*.
- U ovom kolegiju promatrat ćemo samo slučajeve kod kojih je $h > 0$, odnosno u kojima postoji ekstremna vrijednost.

2.5.3. GLOBALNI EKSTREMI

- Algoritmom opisanim u točki 2.3. određujemo isključivo lokalne ekstreme funkcije dvije varijable. Ti ekstremi ne moraju biti (i najčešće nisu) *globalni ekstremi* te funkcije.
- Formalno, kažemo da funkcija $f : A \to B$ ima *globalni minimum* u točki $x_0 \in A$ ako za svaki $x \in A$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq f(x_0)$.
- Kažemo da funkcija $f : A \to B$ ima *globalni maksimum* u točki $x_0 \in A$ ako za svaki $x \in A$ vrijedi nejednakost $f(x) \leq f(x_0)$.
- Problem određivanja globalnih ekstrema je puno teži od problema određivanja lokalnih ekstrema. Ne postoji relativno jednostavan algoritam koji rješava ovaj problem.

2.5.4. GLOBALNI EKSTREMI NEPREKIDNE FUNKCIJE NA KOMPAKTNOM SKUPU

- Ipak, u posebnim slučajevima globalne ekstreme možemo odrediti koristeći algoritam iz točke 3.5.2.
- Kažemo da je skup S *kompaktan* ako je omeđen i zatvoren. Ugrubo govoreći, pojam *omeđenosti* podrazumijeva da postoji kugla K takva da je $S \subseteq K$, a pojam *zatvorenosti* podrazumijeva da postoji najmanje jedna točka $x \in S$ takva da svaka kugla koja ima središte u x ima barem jednu točku izvan S.
- Može se pokazati da su svi standardni ravninski likovi (dužina, pravokutnik, trokut, krug, kružnica, elipsa itd.) kompaktni skupovi.
- Na takvim skupovima vrlo je podesno promatrati određivanje globalnih ekstrema *neprekidnih* funkcija. U ekonomiji najčešće koristimo funkcije koje su neprekidne na svojoj domeni.

2.5.4. GLOBALNI EKSTREMI NEPREKIDNE FUNKCIJE NA KOMPAKTNOM SKUPU

- Vrijedi sljedeći poučak:
- *Neka su A kompaktan skup i* $f : A \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada f na skupu A postiže oba globalna ekstrema* (i globalni minimum i globalni maksimum).
- *Ako f ima barem jednu stacionarnu točku koja pripada skupu A, u toj točki se mora postići globalni ekstrem.*
- *Ako f nema stacionalnu točku koja pripada skupu A, onda se globalni ekstremi postižu na rubu skupa A.* (Takve slučajeve nećemo razmatrati.)
- Dakle, u slučaju kad tražimo globalne ekstreme neprekidne funkcije na kompaktnom skupu, najčešće će biti dovoljno odrediti *stacionarne točke*, izračunati vrijednosti funkcije *f* u tim točkama i na temelju izračunanih vrijednosti odrediti točku globalnoga minimuma, odnosno globalnoga maksimuma.
- Time možemo pojednostavniti postupak određivanja ekstrema opisan u točki 3.5.2. jer u ovom slučaju *nije potrebno* računati Hesseovu matricu i njezinu determinantu.