DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

2.5. LOKALNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI – zadaci

***Napomena*:** U svim rješenjima zadataka precizno obrazložite sve svoje tvrdnje.

1. Odredite sve lokalne ekstreme funkcije $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(x, y) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 430.$$

2. Pretpostavimo da je u Kraljevini Bušbumbuj potražnja za slatkišem *Keksić* dana izrazom

$$p_1(x) = -\frac{1}{5} \cdot x + 100.$$

Potražnja za istim slatkišem u Kraljevini Dajdamdaš dana je izrazom

$$p_2(y) = -\frac{1}{15} \cdot y + 200.$$

Pritom su x i y količine potražnje (u komadima), a p_1 i p_2 jedinične cijene (u €). Izračunajte količine potražnje za koje se postiže najveći ukupan prihod proizvođača slatkiša *Keksić* u objema državama. Koliko iznosi taj optimalan prihod?

3. Zadane su funkcija ukupnih troškova

$$T(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 3 \cdot Q_2^2 + Q_1 \cdot Q_2 + 10$$

i prodajne cijene proizvoda

$$p_1 = 7 \text{ €},$$
$$p_2 = 20 \text{ €}.$$

Izračunajte količinu proizvodnje svakoga proizvoda tako da ostvarena ukupna dobit bude maksimalna. Koliko iznosi ta optimalna ukupna dobit?

4. Zadane su cijene dvaju dobara u zavisnosti o količinama potražnje

$$p_1(Q_1) = 15 - Q_1,$$
$$p_2(Q_2) = 10 - Q_2.$$

Funkcija ukupnih troškova zadana je pravilom

$$T(Q_1, Q_2) = 5 \cdot Q_1 + 4 \cdot Q_2 + 5.$$

Izračunajte količinu proizvodnje svakoga dobra tako da ukupna ostvarena dobit bude maksimalna. Koliko iznosi ta optimalna dobit?

2.5. LOKALNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI – zadaci

5. Zadana je funkcija ukupnih troškova

$$T(Q_1, Q_2) = 2 \cdot Q_1^2 + Q_2^2 + Q_1 \cdot Q_2.$$

Proizvodnim planom predviđeno je da ukupna proizvodnja obaju proizvoda bude točno 20 komada. Izračunajte količinu proizvodnje svakoga proizvoda tako da ukupni troškovi budu minimalni. Koliko iznose ti optimalni ukupni troškovi?

6. Tvrtka *Drp-komerc* d.o.o. iz Špičkovine proizvodi dvije vrste sokova: *Malinko* i *Šljivko*. Funkcije potražnje i funkcija ukupnih troškova zadane su pravilima

$$T(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2 \cdot Q_2^2 + 10,$$
$$Q_1(p_1, p_2) = 48 - 2 \cdot p_1 - p_2,$$
$$Q_2(p_1, p_2) = 44 - p_1 - p_2.$$

Pritom su p_1 i Q_1 jedinična cijena (u kn), odnosno količina soka *Malinko*, a p_2 i Q_2 jedinična cijena (u kn), odnosno količina soka *Šljivko*. Izračunajte količinu proizvodnje svakoga soka tako da ukupna dobit ostvarena prodajom obiju vrsta sokova bude maksimalna. Koliko iznosi ta optimalna ukupna dobit?

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

2.5. LOKALNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI – zadaci

REZULTATI ZADATAKA

1. **a)** Odredimo najprije sve potrebne parcijalne derivacije zadane funkcije:

$$\begin{aligned}
&f_x(x, y) = 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y,\\
&f_y(x, y) = 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x,\\
&f_{xx}(x, y) = 12 \cdot x,\\
&f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -36,\\
&f_{yy}(x, y) = 12 \cdot y.
\end{aligned}$$

Kandidate za stacionarne točke dobivamo rješavajući sustav

$$\begin{cases} f_x = 0, \\ f_y = 0, \end{cases}$$

odnosno sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y = 0, \\ 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x = 0. \end{cases}$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo:

$$\begin{aligned}
&6 \cdot x^2 - 36 \cdot y - (6 \cdot y^2 - 36 \cdot x) = 0,\\
&6 \cdot (x^2 - y^2) + 36 \cdot (x - y) = 0, \quad / : 6\\
&(x^2 - y^2) + 6 \cdot (x - y) = 0,\\
&(x - y) \cdot (x + y) + 6 \cdot (x - y) = 0,\\
&(x - y) \cdot (x + y + 6) = 0.
\end{aligned}$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

I. $x - y = 0$. Otuda je $y = x$, pa uvrštavanjem u bilo koju jednadžbu sustava dobivamo

$$\begin{aligned}
&6 \cdot x^2 - 36 \cdot x = 0, \quad / : 6\\
&x^2 - 6 \cdot x = 0,\\
&x \cdot (x - 6) = 0,\\
&x_1 = 0,\ x_2 = 6.
\end{aligned}$$

Pripadne vrijednosti nepoznanice y su

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1 = 0,\\
&y_2 = x_2 = 6,
\end{aligned}$$

pa dobivamo dvije stacionarne točke:

$$S_1 = (0,0),\ S_2 = (6,6).$$

II. $x + y + 6 = 0$. Odavde je $y = -x - 6$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$6 \cdot x^2 - 36 \cdot (-x - 6) = 0, \quad / : 6$$
$$x^2 + 6 \cdot x + 36 = 0.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 36 = -108,$$

pa promatrana jednadžba nema realnih rješenja. Stoga u ovom slučaju ne dobivamo nijednu stacionarnu točku.

Izračunajmo pripadne Hesseove matrice i njihove determinante:

$$H(0,\ 0) = \begin{bmatrix} 0 & -36 \\ -36 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h_{11} = 0,\ \det(H(0,0)) = -1296,$$
$$H(6,\ 6) = \begin{bmatrix} 72 & -36 \\ -36 & 72 \end{bmatrix} \Rightarrow h_{11} = 72,\ \det(H(6,6)) = 3888.$$

Primijetimo da je det(H(0, 0)) < 0, pa zaključujemo da točka S_1 nije točka lokalnoga ekstrema funkcije *f*. (Vrijednost $h_{11} = 0$ je nebitna.)

Nadalje, primijetimo da smo za točku $S_2 = (6,6)$ dobili: $h_{11} = 72 > 0$, $\det(H(6,6)) = 3888 > 0$. Odatle zaključujemo da funkcija f u točki $S_2 = (6,6)$ ima lokalni minimum. Taj lokalni minimum je jednak

$$f(6,\ 6) = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 430 = -2.$$

2. Neka su Q_1 i Q_2 redom optimalne količine potražnje u Kraljevini Bušbumbuj, odnosno Kraljevini Dajdamdaš. Ukupan prihod u objema kraljevinama jednak je

$$P(Q_1, Q_2) = p_1(Q_1) \cdot Q_1 + p_2(Q_2) \cdot Q_2 = \left(-\frac{1}{5} \cdot Q_1 + 100\right) \cdot Q_1 + \left(-\frac{1}{15} \cdot Q_2 + 200\right) \cdot Q_2 =$$
$$= -\frac{1}{5} \cdot Q_1^2 - \frac{1}{15} \cdot Q_2^2 + 100 \cdot Q_1 + 200 \cdot Q_2.$$

Tražimo globalni maksimum ove funkcije na njezinoj domeni. Odredimo najprije tu domenu. Q_1 i Q_2 su količine potražnje, pa one ne mogu biti strogo negativne. Dakle, mora vrijediti nejednakost

$$Q_1,\ Q_2 \geq 0.$$

Međutim, funkcije p_1 i p_2 su funkcije potražnje, pa njihove vrijednosti također ne mogu biti strogo negativne. To znači da mora vrijediti nejednakost

$$p_1, p_2 \geq 0,$$

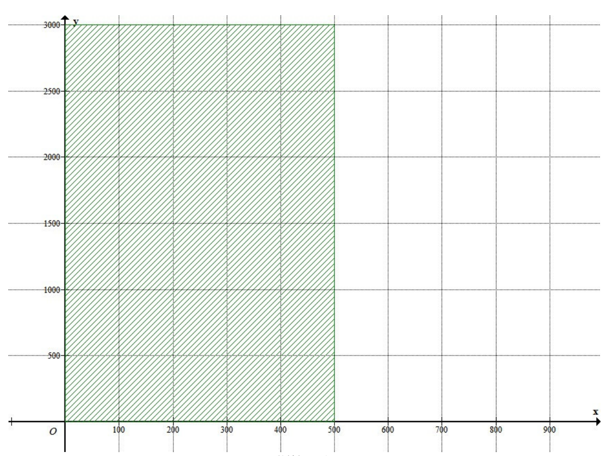
odnosno, zbog pravila kojima su zadane te funkcije, da moraju vrijediti nejednakosti

$$\begin{cases} -\frac{1}{5} \cdot x + 100 \geq 0, \\ -\frac{1}{15} \cdot y + 200 \geq 0. \end{cases}$$

(U drugom slučaju smo nezavisnu varijablu također označili s *x*.) U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini nacrtamo područje *D* određeno nejednakostima

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ -\frac{1}{5} \cdot x + 100 \geq 0, \\ -\frac{1}{15} \cdot y + 200 \geq 0. \end{cases}$$

Dobivamo Sliku 1.



Slika 1.

Vidimo da je *D* pravokutnik čiji su vrhovi točke (0, 0), (500, 0), (500, 3000) i (0, 3000). Prema primjedbi s predavanja, taj pravokutnik je kompaktan skup. Nadalje, funkcija *P* je polinom 2. stupnja u dvije varijable, pa je *P* neprekidna funkcija. Stoga funkcija *P* na skupu *D* postiže i globalni minimum i globalni maksimum. Nas zanima samo globalni maksimum.

Odredimo stacionarne točke funkcije P. U tu svrhu odredimo sve potrebne parcijalne derivacije te funkcije:

$$P_{Q_1}(Q_1, Q_2) = -\frac{2}{5} \cdot Q_1 + 100,$$
$$P_{Q_2}(Q_1, Q_2) = -\frac{2}{15} \cdot Q_2 + 200.$$

Rješavamo sustav

$$\begin{cases} P_{Q_1} = 0, \\ P_{Q_2} = 0, \end{cases}$$

odnosno sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} -\frac{2}{5} \cdot Q_1 + 100 = 0, \\ -\frac{2}{15} \cdot Q_2 + 200 = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe lagano dobivamo Q_1 = 250, a iz druge Q_2 = 1500. Stoga je S = (250, 1500) jedina stacionarna točka funkcije P. Ta točka očito pripada području D, pa odmah zaključujemo da funkcija P u točki S postiže globalni ekstrem. Odredimo o kojemu ekstremu se radi. Izračunamo vrijednost funkcije u točki P i vrijednost funkcije u nekoj drugoj točki iz skupa D, npr. u točki O = (0, 0):

$$P(250,\ 1500) = -\frac{1}{5} \cdot 250^2 - \frac{1}{15} \cdot 1500^2 + 100 \cdot 250 + 200 \cdot 1500 = 162\ 500,$$
$$P(0,\ 0) = -\frac{1}{5} \cdot 0^2 - \frac{1}{15} \cdot 0^2 + 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 = 0,$$

pa zaključujemo da funkcija P u točki (250, 1500) ima globalni maksimum 162 500. (Umjesto točke (0, 0) mogli smo uzeti bilo koju drugu točku iz skupa D različitu od S. Zbog činjenice (0, 0) $\in S$ i oblika funkcije P, bilo je najjednostavnije uzeti tu točku i usporediti vrijednost funkcije P u toj točki s vrijednošću funkcije P u točki S.)

Dakle, optimalan prihod u iznosu od 162 500 € postiže se tako da se u Kraljevini Bušbumbuj proda 250 komada slatkiša *Keksić*, a u Kraljevini Dajdamdaš 1500 komada toga slatkiša.

3. Neka su Q_1 i Q_2 tražene optimalne količine. Ako se proizvede Q_1 proizvoda po cijeni od 7 €, ukupni prihod od prodaje svih tih proizvoda iznosi 7 · Q_1 €. Analogno, ako se proizvede Q_2

proizvoda po cijeni od 20 €, ukupni prihod od prodaje svih tih proizvoda iznosi 20 · Q_2 €. Stoga ukupan prihod nastao prodajom obiju vrsta proizvoda iznosi

$$P(Q_1,Q_2)=7\cdot Q_1+20\cdot Q_2 \text{ €} .$$

Ukupna dobit jednaka je razlici funkcije ukupnoga prihoda i funkcije ukupnih troškova:

$$\begin{aligned}
&D(Q_1,Q_2)=P(Q_1,Q_2)-T(Q_1,Q_2)=7\cdot Q_1+20\cdot Q_2-(Q_1^2+3\cdot Q_2^2+Q_1\cdot Q_2+10),\\
&D(Q_1,Q_2)=-Q_1^2-3\cdot Q_2^2-Q_1\cdot Q_2+7\cdot Q_1+20\cdot Q_2+10.
\end{aligned}$$

Tražimo globalni maksimum ove funkcije. Znamo da za vrijednosti Q_1 i Q_2 vrijedi nejednakost $Q_1,\ Q_2\geq 0$. U tom je slučaju i $P(Q_1,Q_2)=7\cdot Q_1+20\cdot Q_2\geq 0$ jer su oba pribrojnika nenegativni realni brojevi. Dakle, domena D_D funkcije D je skup $(\mathbb{R}^+)^2$, a taj skup nije kompaktan (jer nije ni omeđen, ni zatvoren). Stoga u ovom slučaju ne promatramo neprekidnu funkciju na kompaktnom skupu, pa ne možemo primijeniti razmatranje analogno onome iz Zadatka 2.

Odredimo najprije lokalne ekstreme uobičajenim načinom. Nađimo sve potrebne parcijalne derivacije funkcije D:

$$\begin{aligned}
&D_{Q_1}(Q_1,Q_2)=-2\cdot Q_1-Q_2+7,\\
&D_{Q_2}(Q_1,Q_2)=-6\cdot Q_2-Q_1+20,\\
&D_{Q_1Q_1}(Q_1,Q_2)=-2,\\
&D_{Q_1Q_2}(Q_1,Q_2)=D_{Q_2Q_1}(Q_1,Q_2)=-1,\\
&D_{Q_2Q_2}(Q_1,Q_2)=-6.
\end{aligned}$$

Primijetimo odmah da je

$$\begin{aligned}
&H(Q_1,Q_2)=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 6\end{bmatrix},\\
&h_{11}=-2,\ \det(H(Q_1,Q_2))=-2\cdot 6-(-1)\cdot(-1)=-13,
\end{aligned}$$

i to za bilo koju točku (Q_1, Q_2) ∈ D_D. Odatle zaključujemo da će funkcija D poprimiti globalni maksimum u svojoj stacionarnoj točki (ako takva točka postoji, naravno).

Da bismo odredili stacionarnu točku, riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases}D_{Q_1}=0,\\ D_{Q_2}=0,\end{cases}$$

odnosno sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} -2 \cdot Q_1 - Q_2 + 7 = 0, \\ -6 \cdot Q_2 - Q_1 + 20 = 0. \end{cases}$$

Lako dobivamo (Q_1, Q_2) = (2, 3). Dakle, funkcija D ima globalni minimum u točki (2, 3) i taj minimum iznosi:

$$D(2,\ 3) = -2^2 - 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 10 = 47.$$

Zaključimo: treba proizvesti 2 količinske jedinice prvoga proizvoda i 3 količinske jedinice drugoga proizvoda. Pripadna optimalna dobit iznosi 47 n.j.

4. Neka su Q_1 i Q_2 tražene optimalne količine. Ako se proizvede Q_1 proizvoda po cijeni od 15 – Q_1 n.j., ukupni prihod od prodaje svih tih proizvoda iznosi (15 – Q_1) · Q_1 n.j. Analogno, ako se proizvede Q_2 proizvoda po cijeni od 10 – Q_2 n.j. , ukupni prihod od prodaje svih tih proizvoda iznosi (10 – Q_2) · Q_2. Stoga ukupan prihod nastao prodajom obiju vrsta proizvoda iznosi

$$P(Q_1, Q_2) = (15 - Q_1) \cdot Q_1 + (10 - Q_2) \cdot Q_2 = -Q_1^2 - Q_2^2 + 15 \cdot Q_1 + 10 \cdot Q_2 ..$$

Ukupna dobit jednaka je razlici funkcije ukupnoga prihoda i funkcije ukupnih troškova:

$$D(Q_1, Q_2) = P(Q_1, Q_2) - T(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - Q_2^2 + 15 \cdot Q_1 + 10 \cdot Q_2 - (5 \cdot Q_1 + 4 \cdot Q_2 + 5),$$
$$D(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - Q_2^2 + 10 \cdot Q_1 + 6 \cdot Q_2 - 5.$$

Odredimo domenu ove funkcije. Ponovno imamo prirodan uvjet $Q_1,\ Q_2 \geq 0$. Međutim, vrijednosti svake funkcije prihoda trebaju biti nenegativne, pa mora vrijediti nejednakost

$$p_1, p_2 \geq 0,$$

odnosno moraju vrijediti nejednakosti

$$15 - Q_1 \geq 0,$$
$$10 - Q_2 \geq 0.$$

Stoga je domena funkcije D područje određeno nejednakostima

$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0,$$
$$15 - x \geq 0,$$
$$10 - y \geq 0.$$

Nacrtamo li pripadne krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobit ćemo Sliku 2.

Slika 2.

Dakle, domena funkcije D je pravokutnik čiji su vrhovi točke (0, 0), (15, 0), (15, 10) i (0, 10). Taj pravokutnik je kompaktan skup. Funkcija D je polinom 2. stupnja u dvije varijable, pa je ta funkcija neprekidna. Stoga ona na dobivenom pravokutniku, odnosno na svojoj domeni postiže obje ekstremne vrijednosti, tj. i globalni minimum i globalni maksimum. Nas zanima samo globalni maksimum.

Odredimo najprije sve potrebne parcijalne derivacije funkcije D:

$$D_{Q_1}(Q_1, Q_2) = -2 \cdot Q_1 + 10,$$
$$D_{Q_2}(Q_1, Q_2) = -2 \cdot Q_2 + 6.$$

Nađimo stacionarne točke funkcije D. Riješimo sustav

$$\begin{cases} D_{Q_1} = 0, \\ D_{Q_2} = 0, \end{cases}$$

odnosno sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} -2 \cdot Q_1 + 10 = 0, \\ -2 \cdot Q_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Lako se dobije (Q_1, Q_2) = (5, 3). Ta točka očito pripada domeni funkcije D. Da bismo utvrdili postiže li u toj točki funkcija D globalni minimum ili globalni maksimum, izračunamo:

$$D(5,\ 3) = -5^2 - 3^2 + 10 \cdot 5 + 6 \cdot 3 - 5 = 29,$$
$$D(0,\ 0) = -0^2 - 0^2 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 5 = -5.$$

(Opet smo mogli odabrati i neku drugu točku različitu od točke (5, 3), ali najjednostavnije je odabrati točku (0, 0) koja pripada domeni funkcije D.) Preostaje nam zaključiti:

Treba proizvesti 5 količinskih jedinica prvoga dobra i 3 količinske jedinice drugoga dobra. Pripadna optimalna ukupna dobit iznosi 29 n.j.

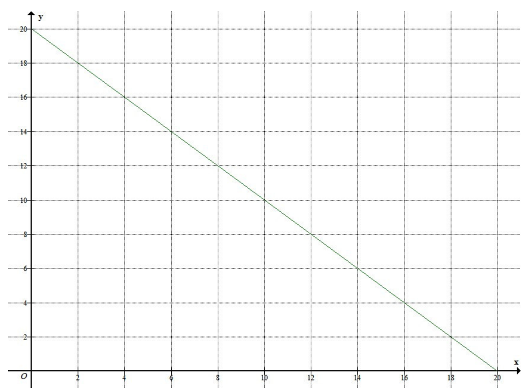
5. Neka su Q_1 i Q_2 tražene optimalne količine. Tražimo globalni minimum funkcije *T*. Odredimo najprije domenu te funkcije. Prirodni uvjet je ponovno $Q_1,\ Q_2 \geq 0.$ Budući da ukupna proizvodnja obaju proizvoda mora biti jednaka 20, mora vrijediti jednakost

$$Q_1 + Q_2 = 20.$$

Stoga je domena funkcije *T* područje određeno (ne)jednakostima:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Nacrtamo to područje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo Sliku 3.



Slika 3.

Dakle, domena funkcije *D* je dužina čiji su vrhovi točke (20, 0) i (0, 20). Ta dužina je kompaktan skup. Funkcija *T* je polinom 2. stupnja u dvije varijable, pa je ta funkcija neprekidna. Stoga ona na svojoj domeni poprima obje ekstremne vrijednosti, tj. i globalni minimum i globalni maksimum. Nas zanima samo globalni minimum.

Ovaj problem je najjednostavnije riješiti svođenjem na određivanje ekstrema funkcije jedne realne varijable. Iz uvjeta $Q_1 + Q_2 = 20$ izrazimo npr. varijablu Q_2:

$$Q_2 = 20 - Q_1$$

i uvrstimo dobiveni izraz u pravilo funkcije *T*:

$$T(Q_1) = 2 \cdot Q_1^2 + (20 - Q_1)^2 + Q_1 \cdot (20 - Q_1) = 2 \cdot Q_1^2 + 400 - 40 \cdot Q_1 + Q_1^2 + 20 \cdot Q_1 - Q_1^2,$$
$$T(Q_1) = 2 \cdot Q_1^2 - 20 \cdot Q_2 + 400.$$

Ova kvadratna funkcija postiže globalni minimum za $Q_1 = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5$ i taj minimum je jednak $T(5) = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 400 = 350$. Pripadna vrijednost varijable Q_2 iznosi $Q_2 = 20 - 5 = 15$. Stoga zaključujemo:

Treba proizvesti 5 komada prvoga proizvoda i 15 komada drugoga proizvoda. Pripadni optimalni troškovi iznose 350 n.j.

6. Neka su Q_1 i Q_2 optimalne količine. Budući da su te količine izražene kao funkcije jediničnih cijena, a da je funkcija troškova izražena kao funkcija količina, trebamo izraziti jedinične cijene kao funkcije optimalnih količina. Iz sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} Q_1 = 48 - 2 \cdot p_1 - p_2, \\ Q_2 = 44 - p_1 - p_2 \end{cases}$$

odnosno iz tom sustavu ekvivalentnoga sustava

$$\begin{cases} 2 \cdot p_1 + p_2 = 48 - Q_1, \\ p_1 + p_2 = 44 - Q_2 \end{cases}$$

oduzimanjem druge jednadžbe od prve jednadžbe dobivamo

$$p_1 = 4 - Q_1 + Q_2 .$$

Uvrštavanjem ove jednadžbe u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$p_2 = 44 - Q_2 - p_1 = 44 - Q_2 - (4 - Q_1 + Q_2) = 40 + Q_1 - 2 \cdot Q_2 .$$

Dakle, rješenje sustava je $(p_1, p_2) = (-Q_1 + Q_2 + 4,\ Q_1 - 2 \cdot Q_2 + 40)$. Dalje nastavljamo kao u rješenjima prethodnih zadataka. Ukupni prihod nastao prodajom svih proizvedenih količina obaju proizvoda iznosi

$$P(Q_1, Q_2) = p_1 \cdot Q_1 + p_2 \cdot Q_2 = (-Q_1 + Q_2 + 4) \cdot Q_1 + (Q_1 - 2 \cdot Q_2 + 40) \cdot Q_2 .$$
$$P(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - 2 \cdot Q_2^2 + 2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 + 4 \cdot Q_1 + 40 \cdot Q_2 .$$

Stoga je pripadna ukupna dobit jednaka

$$D(Q_1, Q_2) = P(Q_1, Q_2) - T(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - 2 \cdot Q_2^2 + 2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 + 4 \cdot Q_1 + 40 \cdot Q_2 - (Q_1^2 + 2 \cdot Q_2^2 + 10),$$
$$D(Q_1, Q_2) = -2 \cdot Q_1^2 - 4 \cdot Q_2^2 + 2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 + 4 \cdot Q_1 + 40 \cdot Q_2 - 10.$$

Tražimo globalni maksimum ove funkcije na njezinoj domeni. Odredimo tu domenu.

Na varijable Q_1 i Q_2 postavljamo prirodan uvjet $Q_1,\ Q_2 \geq 0$. Međutim, i jedinične cijene obaju proizvoda moraju biti nenegativni realni brojevi, pa mora vrijediti nejednakost

$$p_1,\ p_2 \geq 0,$$

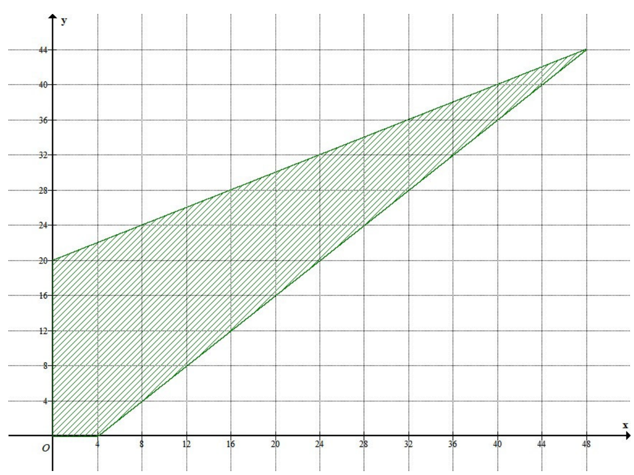
odnosno moraju vrijediti nejednakosti

$$\begin{cases} -Q_1 + Q_2 + 4 \geq 0, \\ Q_1 - 2 \cdot Q_2 + 40 \geq 0. \end{cases}$$

Stoga je domena funkcije *D* područje određeno nejednakostima

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ -x + y + 4 \geq 0, \\ x - 2 \cdot y + 40 \geq 0. \end{cases}$$

Nacrtajmo to područje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo Sliku 4.



Slika 4.

Primjećujemo da je domena funkcije *D* četverokut kojemu su vrhovi točke (0, 0), (4, 0), (48, 44) i (0, 20). Taj četverokut je kompaktan skup. Funkcija *D* je polinom 2. stupnja u dvije varijable, pa je ta funkcija neprekidna. Stoga ona na skupu *D* postiže oba globalna ekstrema, odnosno i globalni minimum i globalni maksimum. Nas zanima samo globalni maksimum.

Odredimo sve potrebne parcijalne derivacije funkcije *D*:

$$D_{Q_1}(Q_1, Q_2) = -4 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2 + 4,$$
$$D_{Q_2}(Q_1, Q_2) = -8 \cdot Q_2 + 2 \cdot Q_1 + 40.$$

Nađimo stacionarne točke funkcije *D*. U tu svrhu riješimo sustav

$$\begin{cases} D_{Q_1} = 0, \\ D_{Q_2} = 0, \end{cases}$$

odnosno sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} -4 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2 = -4, \\ 2 \cdot Q_1 - 8 \cdot Q_2 = -40. \end{cases}$$

Lako dobivamo $(Q_1,\ Q_2) = (4,\ 6)$. Ta točka očito pripada domeni funkcije *D*. Provjerimo je li riječ o globalnom maksimumu. Računamo:

$$D(4,\ 6) = -2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 40 \cdot 6 - 10 = 118,$$
$$D(0,\ 0) = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 40 \cdot 0 - 10 = -10,$$

pa zaključujemo da se radi o točki globalnoga maksimuma. (I opet smo umjesto (0, 0) mogli uzeti bilo koju drugu točku iz *D*, ali ovaj izbor je bio najjednostavniji.) Izračunajmo i pripadne optimalne cijene:

$$(p_1, p_2) = (-4 + 6 + 4,\ 4 - 2 \cdot 6 + 40) = (6,\ 32)\ .$$

Zaključimo:

Treba proizvesti 4 litre soka *Malinko* po jediničnoj cijeni od 6 kn i 6 litara soka *Šljivko* po jediničnoj cijeni od 32 kn. Optimalna ukupna dobit iznosi 118 kn.