DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

4.3. RJEŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA POMOĆU RAČUNALOGA PROGRAMA *WinQSB* – rješenja primjera

Primjer 1.

Označimo redom:

x_1 – masa *Cementka* proizvedena na liniji 1;
x_2 – masa *Cementka* proizvedena na liniji 2;
y_1 – masa *Cementkine* proizvedena na liniji 1;
y_2 – masa *Cementkine* proizvedena na liniji 2.

a) Prema podatcima iz zadatka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$$

pod uvjetima

$$0.5 \cdot x_1 + 0.4 \cdot y_1 \leq 16,$$
$$0.8 \cdot x_2 + 0.7 \cdot y_2 \leq 24,$$
$$x_1 + y_1 \leq 20,$$
$$x_2 + y_2 \leq 25,$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0.$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobiva se $\left(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*\right)$ = (12, 8, 25, 0) i z^* = 45. Dakle, optimalan dnevni plan proizvodnje je: *na liniji* 1 *proizvesti* 12 kg *Cementka i* 25 *kg Cementkine*, *a na liniji* 2 *proizvesti* 8 kg *Cementka*. Ukupna optimalna dnevna proizvodnja je z^* = 45 kg obiju vrsta cementa.

b) Ako se na svakoj liniji mora proizvesti barem 1 kg svake vrste cementa, onda promijenimo posljednji uvjet u

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 1.$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobivamo novo optimalno rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*\right)$ = (12.8, 7.2, 24, 1) i z^* = 45. Novi optimalan dnevni plan proizvodnje glasi: *na liniji* 1 *proizvesti* 12.8 kg *Cementka i* 24 *kg Cementkine*, *a na liniji* 2 *proizvesti* 7.2 kg *Cementka i* 1 kg *Cementkine*. Ukupna optimalna dnevna proizvodnja je z^* = 45 kg obiju vrsta cementa.

Uočavamo da se masa *Cementka* koja se proizvodi na liniji 1 povećala za $\frac{12.8-12}{12} \cdot 100 \approx 6.67$ %, masa *Cementka* koja se proizvodi na liniji 1 smanjila se za $\frac{8-7.2}{8} \cdot 100 = 10$ %, dok se masa *Cementkine* koja se proizvodi na liniji 2 smanjila za $\frac{25-24}{25} \cdot 100 = 4$ %. Optimalna dnevna proizvodnja obiju vrsta cementa pritom se nije promijenila.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

4.3. RJEŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA POMOĆU RAČUNALOGA PROGRAMA *WinQSB* – rješenja primjera

Primjer 2.

Neka su x_1, x_2, x_3 i x_4 redom broj TV-spotova, broj dnevnih oglasa, broj radijskih spotova u trajanju od 30 sekundi i broj radijskih spotova u trajanju od 60 sekundi.

a) Prema podatcima iz zadatka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 10 \cdot x_1 + 11.43 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 4.8 \cdot x_4$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered}
22.5 \cdot x_1 + 13.5 \cdot x_2 + 1.15 \cdot x_3 + 6.6 \cdot x_4 \le 200, \\
x_1, x_2 \le 7, \\
x_3 \le 14, \\
x_4 \le 12, \\
x_3 + x_4 \ge 5, \\
1.15 \cdot x_3 + 6.6 \cdot x_4 \le 50, \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}_0.
\end{gathered}$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobije se optimalno rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (3, 7, 14, 3) i z^* = 180.41. Dakle, optimalna strategija je: *platiti* 3 TV-*spota*, 7 *dnevnih oglasa*, 14 *radijskih spotova u trajanju od* 30 *sekundi* i 3 *radijska spota u trajanju od* 60 *sekundi*. Optimalan ukupni broj potencijalnih gledatelja/čitatelja/slušatelja iznosi 180 410. Primijetimo da će ovom strategijom stranci tjedno preostati iznos od 2 100.00 kn (taj iznos očitamo iz stupca *Slack or Surplus* za pripadni uvjet).

b) Prema podatcima iz zadatka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 22.5 \cdot x_1 + 13.5 \cdot x_2 + 1.15 \cdot x_3 + 6.6 \cdot x_4$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered}
22.5 \cdot x_1 + 13.5 \cdot x_2 + 1.15 \cdot x_3 + 6.6 \cdot x_4 \le 200, \\
x_1, x_2 \le 7, \\
x_3 \le 14, \\
x_4 \le 12, \\
x_3 + x_4 \ge 5, \\
1.15 \cdot x_3 + 6.6 \cdot x_4 \le 50, \\
10 \cdot x_1 + 11.43 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 4.8 \cdot x_4 \ge 150, \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}_0.
\end{gathered}$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobije se optimalno rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (0, 7, 14, 3) i z^* = 130.4. Dakle, optimalna strategija je: *platiti* 7 *dnevnih oglasa*, 14 *radijskih spotova u trajanju od* 30 *sekundi* i 3 *radijska spota u trajanju od* 60 *sekundi*. Optimalni tjedni troškovi promidžbe iznose 130 400 kn.

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

4.3. RJEŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA POMOĆU RAČUNALOGA PROGRAMA *WinQSB* – rješenja primjera

Primjer 3.

Označimo s x_1, x_2 i x_3 redom broj kataloga s tvrdim uvezom, broj kataloga sa srednje tvrdim uvezom i broj kataloga s mekim uvezom. Prema podatcima iz zadatka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 60 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered} 12\,000 \leq 3 \cdot x_1 + 2.5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 30\,000, \\ x_1 \geq 2000, \\ x_2 \geq 1500 \\ x_3 \geq 1000, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{N}_0. \end{gathered}$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobivamo optimalno rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ = (2080, 1504, 1000) i z^* = 240 000. Dakle, optimalan plan tiska i uvezivanja kataloga je: *tiskati i uvezati* 2080 *kataloga s tvrdim uvezom*, 1504 *kataloga sa srednje tvrdim uvezom i* 1000 *kataloga s mekim uvezom*. Optimalni ukupni troškovi tiska i uvezivanja iznose 240 000 kn. Primijetimo da će stroj za tiskanje i uvezivanje raditi točno 200 sati (taj podatak očitamo iz stupca *Slack or Surplus* za pripadni uvjet), što je donja granica financijske isplativnosti rada stroja.

Primjer 4.

Za svaki $i \in [5]$ neka je x_i obujam soka vrste i. Tada je obujam smjese jednak $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Prema složenom računu smjese, volumni udio soka od naranče u dobivenoj smjesi jednak je

$$V_n = \frac{40\% \cdot x_1 + 5\% \cdot x_2 + 100\% \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5},$$

volumni udio soka od grejpa jednak je

$$V_g = \frac{40\% \cdot x_1 + 10\% \cdot x_2 + 100\% \cdot x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5},$$

dok je volumni udio soka od kupine jednak

$$V_k = \frac{20\% \cdot x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}.$$

Prema uvjetima zadatka moraju vrijediti nejednakosti

$$V_n \geq 20\%,\ V_g \geq 10\%,\ V_k \geq 5\%,$$

pa uvrštavanjem u gornje jednakosti dobivamo:

$$40\% \cdot x_1 + 5\% \cdot x_2 + 100\% \cdot x_3 \geq 20\% \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5),$$
$$40\% \cdot x_1 + 10\% \cdot x_2 + 100\% \cdot x_4 \geq 10\% \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5),$$
$$20\% \cdot x_2 \geq 5\% \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

Odatle se sređivanjem dobiva

$$0.2 \cdot x_1 - 0.15 \cdot x_2 + 0.8 \cdot x_3 - 0.2 \cdot x_4 - 0.2 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$0.3 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 - 0.1 \cdot x_3 + 0.9 \cdot x_4 - 0.1 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$-0.05 \cdot x_1 + 0.15 \cdot x_2 - 0.05 \cdot x_3 - 0.05 \cdot x_4 - 0.05 \cdot x_5 \geq 0.$$

a) Matematički model promatranoga problema glasi:

$$\text{minimizirati } z = 7.5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5$$

pod uvjetima

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 500,$$
$$0.2 \cdot x_1 - 0.15 \cdot x_2 + 0.8 \cdot x_3 - 0.2 \cdot x_4 - 0.2 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$0.3 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 - 0.1 \cdot x_3 + 0.9 \cdot x_4 - 0.1 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$-0.05 \cdot x_1 + 0.15 \cdot x_2 - 0.05 \cdot x_3 - 0.05 \cdot x_4 - 0.05 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$0 \leq x_1 \leq 200,$$
$$0 \leq x_2 \leq 400,$$
$$0 \leq x_3 \leq 100,$$
$$0 \leq x_4 \leq 50,$$
$$0 \leq x_5 \leq 800.$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobivamo optimalno rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right)$ = (31.25, 125, 81.25, 0, 262.5) i z^* = 3028.125. Dakle, optimalan koncept miješanja glasi: *pomiješati* 31.25 *litara soka* 1, 125 *litara soka* 2, 81.25 *litara soka* 3 *i* 262.5 *litara soka* 5. Optimalna cijena smjese iznosi 3028.13 kn ili približno 6.06 kn/litra.

b) Postavimo li zahtjev da se prigodom pravljenja smjese mora pomiješati najmanje 10 litara svake vrste soka, matematički model promatranoga problema glasi:

$$\text{minimizirati } z = 7.5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5$$

pod uvjetima

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 500,$$
$$0.2 \cdot x_1 - 0.15 \cdot x_2 + 0.8 \cdot x_3 - 0.2 \cdot x_4 - 0.2 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$0.3 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 - 0.1 \cdot x_3 + 0.9 \cdot x_4 - 0.1 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$-0.05 \cdot x_1 + 0.15 \cdot x_2 - 0.05 \cdot x_3 - 0.05 \cdot x_4 - 0.05 \cdot x_5 \geq 0,$$
$$10 \leq x_1 \leq 200,$$
$$10 \leq x_2 \leq 400,$$
$$10 \leq x_3 \leq 100,$$

$$10 \le x_4 \le 50,$$
$$10 \le x_5 \le 800.$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobivamo optimalno rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right)$ = (10, 125, 89.75, 10, 265.25) i z^* = 3039.00. Dakle, optimalan koncept miješanja glasi: *pomiješati* 10 *litara soka* 1, 125 *litara soka* 2, 89.75 *litara soka* 3, 10 *litara soka* 4 *i* 265.25 *litara soka* 5. Optimalna cijena smjese iznosi 3039.00 kn ili približno 6.08 kn/litra.

Uočavamo da se, u odnosu na prvotno optimalno rješenje, obujam soka 1 smanjio za $\frac{31.25-10}{31.25}\cdot 100 = = 68\%$, obujam soka 2 ostao je nepromijenjen, obujam soka 3 povećao se za $\frac{89.75-81.25}{81.25}\cdot 100 \approx \approx 10.46\%$, obujam soka 5 povećao se za $\frac{265.25-262.5}{262.5}\cdot 100 \approx 1.05\%$, dok se optimalna cijena smjese povećala za $\frac{3039-3028.125}{3028.125}\cdot 100 \approx 0.36\%$.

Primjer 5.

Za svaki $i \in [6]$ neka je x_i ukupan broj radnika koji počinju rad u i–toj smjeni. Prema podatcima iz zadatka dobiva se sljedeći matematički model:

minimizirati $z = 30 \cdot (x_1 + x_6) + 30 \cdot (x_1 + x_2) + 20 \cdot (x_2 + x_3) + 20 \cdot (x_3 + x_4) + 25 \cdot (x_4 + x_5) + 30 \cdot (x_5 + x_6) = 60 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 + 45 \cdot x_4 + 55 \cdot x_5 + 60 \cdot x_6$

pod uvjetima

$$x_1 + x_2 \ge 2,$$
$$x_2 + x_3 \ge 5,$$
$$x_3 + x_4 \ge 6,$$
$$x_4 + x_5 \ge 7,$$
$$x_5 + x_6 \ge 4,$$
$$x_6 + x_1 \ge 3,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N}_0.$$

Pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobije se $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\right)$ = (2, 0, 5, 4, 3, 1) i z^* = 725. Dakle, optimalan plan angažiranja radnika po osmosatnim smjenama glasi: *smjenu s početkom u* 00:00 *sati počinju* 2 *radnika*, *smjenu s početkom u* 08:00 *sati počinje* 5 *radnika*, *smjenu s početkom u* 12:00 *sati počinje* 4 *radnika*, *smjenu s početkom u* 16:00 *sati počinje* 3 *radnika*, *a smjenu s početkom u* 20:00 *sati počinje* 1 *radnik*. Optimalni trošak plaćanja radnih sati iznosi 725 kn.

Primjer 6.

Za svaki i = 1, 2 i za svaki j = 1, 2, 3 neka je x_{ij} količina uzoraka prevezenih iz C_i u P_j.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINSKOM POSLOVANJU

4.3. RJEŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA POMOĆU RAČUNALOGA PROGRAMA *WinQSB* – rješenja primjera

a) Prema podatcima iz zadatka dobiva se sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 2 \cdot x_{11} + 3 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23}$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8, \\ x_{11} + x_{21} = 7, \\ x_{12} + x_{22} = 6, \\ x_{13} + x_{23} = 5, \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbf{N}_0. \end{gathered}$$

Rješavanjem pomoću računalnoga programa *WinQSB* dobiva se $\left(x_{11}^*, x_{12}^*, x_{13}^*, x_{21}^*, x_{22}^*, x_{23}^*\right)$ = (4, 6, 0, 3, 0, 5) i z^* = 68 €. Dakle, optimalan plan transporta je: *iz distribucijskoga centra C_1 prevesti* 4 *boce na prodajno mjesto P_1 i* 6 *boca na prodajno mjesto P_2, a iz distribucijskoga centra C_2 prevesti* 3 *boce na prodajno mjesto P_1 i* 5 *boca na prodajno mjesto P_3*. Optimalni ukupni troškovi prijevoza iznose 68 €.

b) Postavimo li uvjet da se iz svakoga distribucijskoga centra na svako prodajno mjesto mora prevesti barem jedna boca vina, dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 2 \cdot x_{11} + 3 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23}$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8, \\ x_{11} + x_{21} = 7, \\ x_{12} + x_{22} = 6, \\ x_{13} + x_{23} = 5, \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbf{N}. \end{gathered}$$

c) omoću računalnoga programa *WinQSB* dobivamo $\left(x_{11}^*, x_{12}^*, x_{13}^*, x_{21}^*, x_{22}^*, x_{23}^*\right)$= (4, 5, 1, 3, 1, 4). Dakle, optimalan plan transporta je: *iz distribucijskoga centra C_1 prevesti* 4 *boce na prodajno mjesto P_1*, 5 *boca na prodajno mjesto P_2 i* 1 *bocu na prodajno mjesto P_3, a iz distribucijskoga centra C_2 prevesti* 3 *boce na prodajno mjesto P_1*, 1 *bocu na prodajno mjesto P_2 i* 4 *boce na prodajno mjesto P_3*. Optimalni ukupni troškovi prijevoza iznose 71 €.

Uočimo da se novim optimalnim planom iz distribucijskoga centra C_1 na prodajno mjesto P_2 prevozi za $\frac{6-5}{6} \cdot 100 \approx 16.67\%$ manje boca, a iz distribucijskoga centra C_2 na prodajno mjesto P_3 za $\frac{5-4}{5} \cdot 100 = 20\%$ manje boca, dok su se optimalni troškovi povećali za $\frac{71-68}{68} \cdot 100 \approx 4.41\%$.