1. U Poreznoj upravi Frkljevci ukupno 20 poreznih obveznika treba predati poreznu prijavu. Na temelju podataka iz prethodnih godina utvrđeno je da u prosjeku jedna od četiri porezne prijave **nije** ispravno ispunjena. Uz pretpostavku da su brojevi neispravno ispunjenih poreznih prijava raspodijeljeni prema **binomnoj** razdiobi, Izračunajte:

   a) očekivani broj neispravno ispunjenih poreznih prijava;

   b) vjerojatnost da će sve porezne prijave biti ispravno ispunjene. (Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima** i zaokružite ga na **dvije decimale**.)

   Rješenje: Neka je X binomna slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj neispravno ispunjenih poreznih prijava. Odredimo njezine parametre.

   Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju predanih poreznih prijava, tj. $n = 20$.

   Odredimo vjerojatnost uspjeha u jednom pokusu, odnosno vjerojatnost da slučajno odabrana prijava bude ispravno ispunjena. Iz zadanih podataka zaključujemo da su od ukupno četiri porezne prijave ispravno ispunjene njih tri, pa je $p = \frac{3}{4} = 0.75.$

   Dakle, $X \sim B\left(20, \frac{3}{4}\right).$

   a) Odredimo najprije matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako $E(X) = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15$. To znači da je očekivani broj ispravno ispunjenih poreznih prijava jednak 15. Odatle slijedi da je očekivani broj neispravno ispunjenih poreznih prijava jednak $20 - 15 = 5.$

   b) Tražimo $P(X = 20)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$p_{20} = P(X = 20) = \left(\frac{3}{4}\right)^{20} = \frac{3\ 486\ 784\ 401}{1\ 099\ 511\ 627\ 776} \approx 0.00317 \approx 0.32\%.$$

2. U tvornici električnih žarulja *I bi svjetlo* iz Podbablja utvrdili su da se prosječno proizvede 2% neispravnih žarulja. Na slučajan način izabire se točno 50 uzoraka od kojih svaki sadrži 20 žarulja. Uz pretpostavku da su brojevi neispravnih žarulja raspodijeljene prema **binomnoj** razdiobi, izračunajte:

a) očekivani ukupan broj uzoraka u kojima su **sve** žarulje **ispravne**;

b) vjerojatnost da slučajno odabrani uzorak sadrži barem dvije neispravne žarulje. (Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima** i zaokružite ga na **dvije decimale**.)

Rješenje: Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava broj uzoraka u kojima su **sve** žarulje **ispravne**. Odredimo njezine parametre.

Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju uzoraka. Dakle, $n = 50$.

Izračunajmo vjerojatnost da su u slučajno odabranom uzorku **sve** žarulje **ispravne**. Vjerojatnost da je slučajno odabrana žarulja neispravna iznosi $2\% = \frac{1}{50} = 0.02$. Zbog toga je vjerojatnost da je slučajno odabrana žarulja ispravna jednaka $1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$. Odatle zaključujemo da vjerojatnost da je svih 20 žarulja koje tvore uzorak ispravno iznosi $p = \left(\frac{49}{50}\right)^{20} \approx 0.66761$.

Dakle, $X \sim B(50,\ 0.66761)$.

a) Traženi je broj jednak (matematičkom) očekivanju varijable X. Ono iznosi $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0.66761 \approx 33.4 \approx 33$. Dakle, traženi je broj jednak 33.

b) Promotrimo suprotan događaj, tj. da uzorak sadrži najviše jednu neispravnu žarulju. Izračunajmo vjerojatnost toga događaja. On se razlaže na točno dva disjunktna događaja: da su sve žarulje u uzorku ispravne i da uzorak sadrži točno jednu neispravnu žarulju. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p' = 1 - \left(\left(\frac{49}{50}\right)^{20} + \binom{20}{19} \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{19} \cdot \left(1 - \frac{49}{50}\right) \right) =$$

$$= 1 - \left(\left(\frac{49}{50}\right)^{20} + 29 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{19} \cdot \frac{1}{50} \right) \approx 0.05989 \approx 5.99\%.$$

3. Tvornica alkoholnih pića *Čokanjčić* iz Šljivovca proizvodi rakiju. Uočeno je da 0.5% boca rakije ima volumni udio alkohola manji od deklariranoga. Na slučajan način izabran je uzorak od 1000 boca. Uz pretpostavku da su brojevi boca u kojima je volumni udio alkohola manji od deklariranoga raspodijeljeni prema **Poissonovoj** razdiobi, izračunajte:

a) očekivani broj boca rakije u tom uzorku u kojima je volumni udio alkohola manji od deklariranoga;

b) vjerojatnost da uzorak sadrži najviše četiri boce u kojima je volumni udio alkohola manji od deklariranoga. (Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima** i zaokružite ga na **dvije decimale**.)

Rješenje: Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava broj rakije u kojima je volumni udio alkohola manji od deklariranoga. Odredimo njezin parametar.

Ukupan broj pokusa jednak je ukupnom broju boca u uzorku, tj. $n = 1000$. Vjerojatnost da slučajno odabrana boca ima volumni udio alkohola manji od deklariranoga jednaka je $p = 0.5\% = \frac{0.5}{100} = \frac{5}{1000}$. Zbog toga je:

$$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot \frac{5}{1000} = 5.$$

Dakle, $X \sim Po(5)$.

a) Tražimo matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako njezinom parametru, tj. $E(X) = \lambda = 5$. Dakle, traženi broj je jednak 5.

b) Tražimo $P(X \leq 4)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4}\left(\frac{5^k}{k!} \cdot e^{-5}\right) = \left(\sum_{k=0}^{4}\frac{5^k}{k!}\right) \cdot e^{-5} = \left(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}\right) \cdot e^{-5}$$
$$= \frac{523}{8} \cdot e^{-5} \approx 0.44049 \approx 44.05\%.$$

4. Vjerojatnost pojave kratkoga zastoja pri **dnevnom** emitiranju signala odašiljača iznosi 4%. Pretpostavimo da jedan mjesec ima 30 dana, a da jedna godina ima 365 dana. Uz pretpostavku da su brojevi pojava kratkoga zastoja raspodijeljeni prema **Poissonovoj** razdiobi, izračunajte:

a) očekivani godišnji broj pojava kratkoga zastoja;

b) vjerojatnost da se u jednom **tjednu** (= 7 dana) dogodi barem jedan kratak zastoj. (Iskažite dobiveni rezultat u **postotcima** i zaokružite ga na **dvije decimale**.)

Rješenje: a) Neka je *X* Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan **godišnji** broj pojave zastoja. Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je $n = 365$. Vjerojatnost „uspjeha“ u jednom pokusu je $p = 4\%$. Zbog toga parametar varijable *X* iznosi:

$$\lambda = 365 \cdot 4\% = 14.6.$$

Dakle, $X \sim Po(14.6)$. Traženi je broj jednak (matematičkom) očekivanju varijable *X*, a ono je jednako parametru te varijable. Dakle, $E(X) = 14.6 \approx 15.$

b) Neka je *Y* Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan **tjedni** broj pojave zastoja. Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je $n = 7$. Vjerojatnost „uspjeha“ u jednom pokusu je $p = 4\%$. Zbog toga parametar varijable *Y* iznosi:

$$\lambda = 7 \cdot 4\% = 0.28.$$

Dakle, $Y \sim Po(0.28)$.

Tražena je vjerojatnost jednaka $P(Y \geq 1)$. Koristeći vjerojatnost suprotnoga događaja odmah dobivamo:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{0.28^0}{0!} \cdot e^{-0.28} = 1 - e^{-0.28} \approx 0.24422 \approx 24.42\%.$$

5. Pacijentu je potrebna transplantacija bubrega. Bubreg mora donirati prikladni donator. Vjerojatnost da je slučajno odabrani donator prikladan iznosi 10%. Ispituje se prikladnost svakoga donatora na popisu sve dok se ne pronađe prvi prikladan donator. Izračunajte vjerojatnost da će biti ispitano najviše sedam donatora. Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima** i zaokružite ga na **dvije decimale**.

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj ispitanih donatora. X je geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p = 10\% = 0.1$. Dakle, $X \sim G(0.1)$.

Neka je F pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti. Treba izračunati $P(X \le 7)$. Imamo redom:

$$p = P(X \le 7) = F(7) = 1 - (1 - 0.1)^7 = 1 - 0.9^7 = 0.5217031 \approx 52.17\%.$$

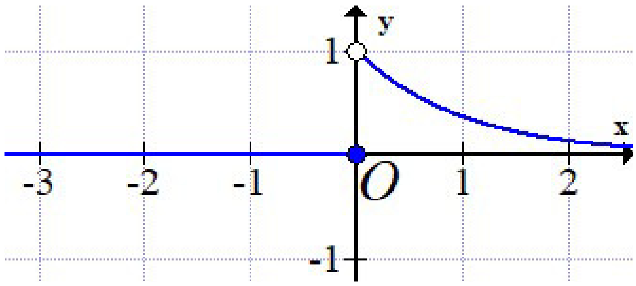
6. Vjerojatnost da će dalmatinski pas („dalmatiner“) na tijelu imati točno 15 pjega iznosi 80%. Na izložbi pasa stručni žiri broji pjege na svakom dalmatinskom psu sve dok ne pronađe psa koji na svojemu tijelu ima točno 15 pjega. Izračunajte vjerojatnost da će stručni žiri morati prebrojati pjege na barem pet pasa. Izrazite dobiveni rezultat u **promilima**.

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj ispitanih pasa. X je geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p = 80\% = 0.8$. Dakle, $X \sim G(0.8)$.

Neka je F pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti. Treba izračunati $P(X \ge 5)$. Imamo redom:

$$p = P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = (1 - 0.8)^4 = 0.2^4 = 0.0016 = 1.6 ‰.$$

7. Na donjoj je slici prikazan dio grafa **funkcije gustoće vjerojatnosti** eksponencijalne slučajne varijable X.



Slika 2.

Odredite (i obrazložite postupak) $P(X < 1)$. Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima** i zaokružite ga na **dvije decimale**.

Rješenje: Pretpostavimo da je $X \sim Ex(a)$, za neki $a > 0$. Iz definicije funkcije gustoće vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable znamo da vrijedi jednakost

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = a.$$

Iz slike se vidi da je

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1,$$

pa zaključujemo da je $a = 1$, odnosno $X \sim Ex(1)$.

Koristeći definiciju funkcije **razdiobe** vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable, zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$F(2) = 1 - e^{-1\cdot 2} = 1 - e^{-2} \approx 0.86466 \approx 86.47\%.$$

8. Na pisač Veleučilišta u Piškorevcima u prosjeku se upute tri zahtjeva za ispis u jednom satu. Pretpostavimo da je trenutak upućivanja zahtjeva za ispis slučajan. Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla koja označava vrijeme (iskazano u **minutama**) između dvaju uzastopnih zahtjeva za ispis. Odredite:

a) očekivano vrijeme (iskazano u **minutama**) proteklo između dva uzastopna zahtjeva za ispis;

b) vjerojatnost da će između dva uzastopna zahtjeva za ispis proći najviše 5 minuta;

c) koliko najmanje minuta, počevši od trenutka upućivanja prvoga zahtjeva, treba čekati na drugi zahtjev tako da vjerojatnost upućivanja drugoga zahtjeva u tom vremenu bude barem 90%.

Rješenje: **a)** Prema podacima u zadatku, u jednom se satu na pisač upute prosječno tri zahtjeva za ispis. To znači da između dvaju zahtjeva protekne prosječno $\frac{1}{3}$ sata = 20 minuta. Ta vrijednost je ujedno i traženo očekivanje varijable X.

b) Na temelju rezultata **a)** podzadatka možemo odrediti parametar varijable X. Naime, znamo da je očekivanje svake eksponencijalne slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti njezina parametra. Tako iz jednadžbe $\frac{1}{a} = 20$ odmah slijedi $a = 0.05,$ pa je $X \sim Exp(0.05).$

Tražena je vjerojatnost jednaka $P(X \le 5).$ Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Koristeći tu funkciju odmah dobivamo:

$$P(X \le 5) = F(5) = 1 - e^{-0.05\cdot 5} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.2212 = 22.12\%.$$

c) Neka je t traženo vrijeme. Znamo da mora vrijediti nejednakost $P(X \le t) \ge 90\%$. Prema **b)** podzadatku je $P(X \le t) = F(t) = 1 - e^{-0.05\cdot t}$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1 - e^{-0.05\cdot t} \ge 90\% = 0.9\,.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$1 - e^{-0.05\cdot t} \ge 0.9 \Leftrightarrow -e^{-0.05\cdot t} \ge 0.9 - 1 \Leftrightarrow e^{-0.05\cdot t} \le 0.1 \Leftrightarrow -0.05 \cdot t \le \ln 0.1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \ge -\frac{\ln 0.1}{0.05} = -20 \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -20 \cdot (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 10) = 20 \cdot \ln 10 \approx 46.052.$$

Dakle, treba čekati najmanje 46 minuta.

9. Najveća siječanjska dnevna temperatura zraka u Konjskom Brdu je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje –2°C, a standardna devijacija 4°C.

a) Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

A = {najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom siječanjskom danu nije bila veća od 0°C};
B = {najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom siječanjskom danu bila je između –5°C i –1°C};
C = {najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom siječanjskom danu bila je strogo veća od –10°C}.

b) Odredite očekivani broj siječanjskih dana u kojima će najveća dnevna temperatura biti strogo pozitivna. Zaokružite dobiveni rezultat na **najbliži** prirodan broj.

Rješenje: Neka je X normalna slučajna varijabla iz zadatka. Prema podacima iz zadatka zaključujemo da je $X \sim N(-2, 4^2)$.

a) Za događaj A vrijedi:

$$P(A) = P(X \le 0).$$

Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \le 0) = F^*\left(\frac{0-(-2)}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{2}\right) = F^*(0.5) = 0.69146.$$

Za događaj B vrijedi:

$$P(B) = P(-5 \le X \le -1).$$

Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned}P(-5 \le X \le -1) &= F^*\left(\frac{-1-(-2)}{4}\right) - F^*\left(\frac{-5-(-2)}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{4}\right) - F^*\left(-\frac{3}{4}\right) = \\ &= F^*(0.25) - F^*(-0.75) = F^*(0.25) - (1 - F^*(0.75)) = F^*(0.25) + F^*(0.75) - 1 = \\ &= 0.59871 + 0.77337 - 1 = 0.37208.\end{aligned}$$

Za događaj C vrijedi:

$$P(C) = P(X > -10).$$

Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X > -10) = 1 - P(X \le -10) = 1 - F^*\left(\frac{-10-(-2)}{4}\right) = 1 - F^*(-2) =$$
$$= 1 - (1 - F^*(2)) = F^*(2) = 0.97725.$$

b) Izračunajmo najprije vjerojatnost da će najveća dnevna temperatura u slučajno odabranom siječanjskom danu biti strogo pozitivna. Dakle, tražimo $P(X > 0)$:

$$P(X > 0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - F^*\left(\frac{0-(-2)}{4}\right) = 1 - F^*(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku broja dana u siječnju u kojima je najveća dnevna temperatura bila strogo pozitivna i ukupnoga broja dana u siječnju. Ukupan broj dana u siječnju bilo koje godine jednak je 31. Označimo li traženi broj s n, odmah dobivamo:

$$n = 31 \cdot P(X > 0) = 31 \cdot 0.30854 = 9.56474 \approx 10.$$

10. Trajanje Majina putovanja na posao je normalna slučajna varijabla čija je standardna devijacija 15 minuta. U 84.134% radnih dana njezino putovanje traje najviše sat vremena.

a) Odredite očekivano trajanje Majina putovanja na posao.

b) Odredite vjerojatnost da će Maja putovati na posao barem sat i pol. (Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima**.)

c) Kada najkasnije (u odnosu na službeni početak radnoga vremena) Maja treba krenuti na posao tako da vjerojatnost njezina pravovremena dolaska na posao bude barem 95%? (Zaokružite rezultat na **najbliži** prirodan broj.)

Rješenje: Neka je Y normalna slučajna varijabla iz zadatka. Znamo da standardna devijacija te varijable iznosi 15 minuta. Dakle, $Y \sim N\left(\mu, 15^2\right)$.

a) Očekivanje μ varijable Y odredit ćemo iz podatka da u 84.134% radnih dana Majino putovanje na posao traje najviše sat vremena, odnosno 60 minuta. To zapravo znači da je $P(Y \le 60) = 0.84134$. Primjenom svojstva $P(X \le a) = F^*(b) \Leftrightarrow \mu = a - \sigma \cdot b$ odmah dobivamo:

$$\mu = 60 - 1 \cdot 15 = 45 \text{ minuta.} \ ,$$

Dakle, $Y \sim N(45, 15^2)$.

b) Trajanje putovanja na posao je sat i pol, odnosno 90 minuta. Tražimo $P(Y \ge 90)$. Dobivamo:

$$P(Y \ge 90) = 1 - P(Y \le 90) = 1 - F^*\left(\frac{90 - 45}{15}\right) = 1 - F^*(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135 = 0.135\%.$$

c) Neka je t traženo vrijeme. Mora vrijediti nejednakost $P(Y \le t) \ge 0.95$. U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.95, pa uzimamo prvu strogo veću vrijednost. To je $F^*(1.65) = 0.95053$.

Dakle, tražimo $t > 0$ takav da vrijedi nejednakost $P(Y \le t) \ge 0.95053 = F^*(1.65)$. Primjenom svojstva $P(X \le a) \ge F^*(b) \Leftrightarrow \mu \le a - \sigma \cdot b$ odmah dobivamo:

$$45 \le t - 15 \cdot 1.65 \Leftrightarrow t \ge 69.75 \Leftrightarrow t_{\min} = 70.$$

Zaključujemo da Maja mora krenuti na posao najkasnije 70 minuta prije službenoga početka radnoga vremena.