 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>zadaci za ponavljanje gradiva</b> <b>15. 1. 2021.</b>
---	---	---

1. Odredite vjerojatnost da u jednom kolu LOTO 7/35 **svi** izvučeni brojevi budu **složeni**. Izrazite dobiveni rezultat u postotcima i zaokružite ga na dvije decimale.


**Napomena:** Broj 1 nije ni prost, ni složen.

*Rješenje:* Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju različitih sedmeročlanih podskupova 35-članoga skupa, tj.  $\binom{35}{7}$ .

Svi ne-složeni brojevi iz skupa  $[35] := \{1, 2, \dots, 34, 35\}$  tvore skup  $S = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ . Ima ih ukupno 12. Zbog toga se u skupu  $[35]$  nalaze ukupno  $35 - 12 = 23$  složena broja. Tako zaključujemo da je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak ukupnom broju različitih sedmeročlanih podskupova 23-članoga skupa, tj.  $\binom{23}{7}$ .

Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{\binom{23}{7}}{\binom{35}{7}} = \frac{1311}{35\,960} \approx 0.03646 \approx 3.65\%.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>zadaci za ponavljanje gradiva</b> <b>15. 1. 2021.</b>
---	---	---

2. Odredite vjerojatnost da u jednom kolu LOTO 6/45 **barem jedan** izvučeni broj bude neparan. (Dopunski broj zanemarujemo.) Izrazite dobiveni rezultat u postotcima i zaokružite ga na dvije decimale.

*Rješenje:* Neka je  $A = \{\text{barem jedan izvučeni broj je neparan}\}$ . Tada je:


$$A^c = \{\text{svi izvučeni brojevi su parni}\}.$$

Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju različitih šesteročlanih podskupova 45-članoga skupa, tj.  $\binom{45}{6}$ .

U skupu  $[45] := \{1, 2, \dots, 44, 45\}$  ima ukupno 22 parna broja. To su 2, 4, ..., 42 i 44. Zbog toga je ukupan broj ishoda **povoljnih za  $A^c$**  jednak ukupnom broju različitih šesteročlanih podskupova 22-članoga skupa, tj.  $\binom{22}{6}$ .

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{22}{6}}{\binom{45}{6}} = \frac{34\,937}{35\,260} \approx 0.99083 \approx 99.08\%.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>zadaci za ponavljanje gradiva</b> <b>15. 1. 2021.</b>
---	---	---

3. Ako se odreknete znanja i džokera, pa odgovore na posljednja četiri pitanja u kvizu *Tko želi biti milijunaš?* odlučite pogađati slučajno i nezavisno, kolika je vjerojatnost da ćete postati milijunaš?

*Podsjetnik:* Na svako pitanje ponuđena su točno četiri odgovora od kojih je točno jedan ispravan.

*Rješenje:* Vjerojatnost da ćemo ispravno odgovoriti na *svako* pitanje jednaka je  $\frac{1}{4}$ .

Zbog pretpostavljene nezavisnosti događaja, tražena je vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}.$$

4. Kolika je vjerojatnost da će, ako budu pogađali, i natjecatelj i lovac u kvizu *Potjera* pogrešno odgovoriti na prvo pitanje?

*Podsjetnik:* Na svako pitanje ponuđena su točno tri odgovora od kojih je točno jedan ispravan. Natjecatelj i lovac odgovaraju na pitanje nezavisno jedan o drugom.

*Rješenje:* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su odgovori označeni slovima  $A$ ,  $B$  i  $C$ , te da je ispravan odgovor označen slovom  $A$ . (Ako nije, jednostavno označimo odgovore tako da ispravan odgovor bude označen tim slovom.)

Odgovore natjecatelja i lovca možemo modelirati uređenim parovima  $(N, L)$ , pri čemu su  $N, L \in \{A, B, C\}$ . Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju navedenih uređenih parova, tj.  $3 \cdot 3 = 9$ .

Povoljne ishode možemo modelirati uređenim parovima  $(N, L)$ , pri čemu su  $N, L \in \{B, C\}$ . Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je ukupnom broju tih uređenih parova, tj.  $2 \cdot 2 = 4$ .

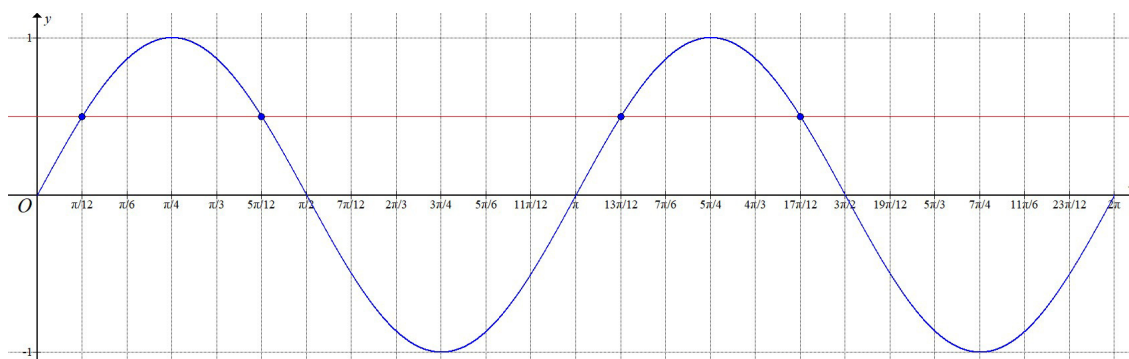
Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{4}{9}.$$

5. Na slučajan način biramo točno jedan broj  $x$  iz intervala  $[0, 2 \cdot \pi]$ . Izračunajte vjerojatnost da za izabrani broj vrijedi nejednakost  $2 \cdot \sin(2 \cdot x) - 1 < 0$ .

*Rješenje:* Primijenit ćemo geometrijsku vjerojatnost. U ovome je slučaju  $\Omega = [0, 2 \cdot \pi]$ , pa je njegova mjera  $m(\Omega) = 2 \cdot \pi - 0 = 2 \cdot \pi$ .

Zadana nejednakost je ekvivalentna nejednakosti  $\sin(2 \cdot x) < \frac{1}{2}$ . Zbog toga nacrtajmo graf (harmonijske) funkcije  $h(x) = \sin(2 \cdot x)$  na segmentu  $[0, 2 \cdot \pi]$ . (Ovdje smo skup  $\Omega$  „proširili“ dodajući mu broj  $2 \cdot \pi$ , ali taj postupak nema utjecaja na konačan rezultat.) Dobivamo donju sliku.



Slika 1.

Skup svih rješenja jednadžbe  $\sin(2 \cdot x) = \frac{1}{2}$  na intervalu  $[0, 2 \cdot \pi]$  je:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12} \cdot \pi, \frac{13}{12} \cdot \pi, \frac{17}{12} \cdot \pi \right\}.$$

Zbog toga je skup svih povoljnih ishoda

$$A = \left[0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12} \cdot \pi, \frac{13}{12} \cdot \pi\right) \cup \left(\frac{17}{12} \cdot \pi, 2 \cdot \pi\right).$$

Mjera toga skupa jednaka je:

$$m(A) = \left(\frac{\pi}{12} - 0\right) + \left(\frac{13}{12} \cdot \pi - \frac{5}{12} \cdot \pi\right) + \left(2 \cdot \pi - \frac{17}{12} \cdot \pi\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{8}{12} \cdot \pi + \frac{7}{12} \cdot \pi = \frac{16}{12} \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi.$$

Tako je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = \frac{2}{3}.$$

6. Na slučajan način biramo dva broja iz segmenta  $[0, 4]$ . Odredite vjerojatnost da će zbroj njihovih kvadrata biti strogo manji od 16.

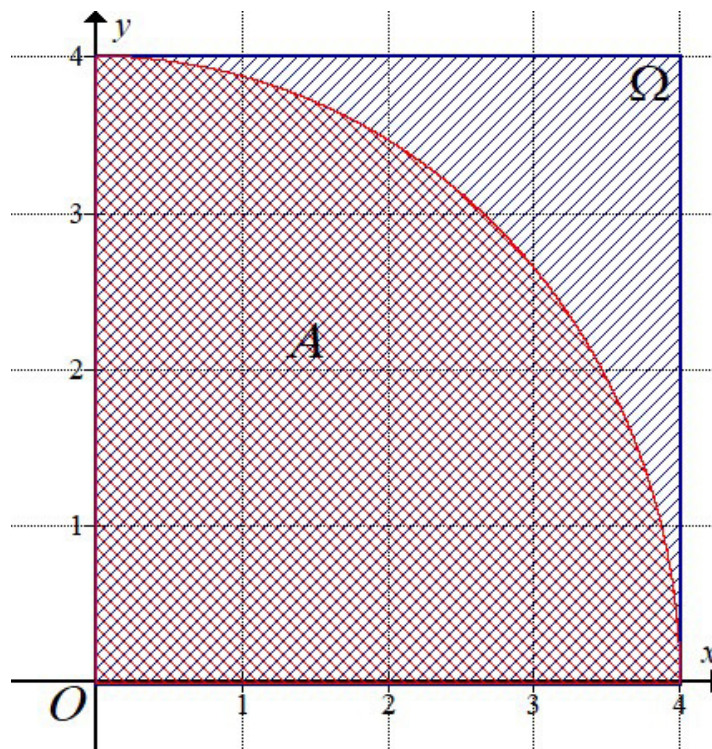
*Rješenje:* U ovome su slučaju skup svih mogućih ishoda

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 4]\},$$

i skup svih povoljnih ishoda

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 < 16\}.$$

Prikažimo te skupove u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravni. Dobivamo donju sliku.




Slika 2.

(Kružnica  $x^2 + y^2 = 16$  je skup mjere 0, pa za određivanje vjerojatnosti nije važno je li ona dio skupa  $A$ .)

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \pi}{4^2} = \frac{\pi}{4}.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>zadaci za ponavljanje gradiva</b> <b>15. 1. 2021.</b>
--	---	---

7. U ponoć su na parkiralištu bila jedan sivi i dva crna BMW-a, četiri siva i tri crna Forda, te dvije sive i jedna crna Toyota. Te je noći kradljivac automobila nasumično odabrao jedan automobil i ukrao ga. Ako je ukraden automobil crne boje, izračunajte vjerojatnost da je to bio BMW.

*Rješenje:* Znamo da je ukraden automobil crne boje, pa je skup svih mogućih ishoda jednak skupu svih automobila (na parkiralištu) crne boje. Njih ima ukupno  $2+3+1=6$ .

Od tih šest automobila, dva su BMW-a. Zbog toga je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak 2.

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

8. Žarulje se proizvode u točno tri pogona. Udjeli proizvodnje prvoga, odnosno drugoga pogona u ukupnoj proizvodnji iznose redom 40% i 25%. 10% od ukupnoga broja svih žarulja proizvedenih u prvom pogonu tvore neispravne žarulje. Analogni postotci za drugi, odnosno treći pogon iznose redom 5% i 8%. Na slučajan način izaberemo jednu žarulju i utvrdimo da je neispravna. Izračunajte vjerojatnost da je ona proizvedena u trećem pogonu.

*Rješenje:* Neka su:

$$H_i := \{\text{žarulja je proizvedena u } i\text{-tom pogonu}\}, \text{ za } i = 1, 2, 3,$$

$$A = \{\text{žarulja je neispravna}\}.$$

Tada je  $\{H_1, H_2, H_3\}$  potpun sustav događaja. Iz zadanih podataka zaključujemo:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 40\%, & P(A|H_1) &= 10\%, \\ P(H_2) &= 25\%, & P(A|H_2) &= 5\%, \\ P(H_3) &= 100\% - (40\% + 25\%) = 35\%, & P(A|H_3) &= 8\%. \end{aligned}$$

Tražena je vjerojatnost jednaka  $P(H_3|A)$ . Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{\sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{35\% \cdot 8\%}{40\% \cdot 10\% + 25\% \cdot 5\% + 35\% \cdot 8\%} = \frac{8}{23}.$$