 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (prediplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
---	--	--

1. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je **zbroj svih elemenata inverza** matrice $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ jednak 2.

Rješenje:

Odredimo inverz zadane matrice koristeći „gotovu“ formulu za inverz proizvoljne regularne matrice reda 2. Imamo:

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{a \cdot 5 - 2 \cdot 2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & a \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{5 \cdot a - 4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & a \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$


Zbroj svih elemenata te matrice jednak je:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{5 \cdot a - 4} \cdot (5 + (-2) + (-2) + a) = \\
 &= \frac{a + 1}{5 \cdot a - 4}.
 \end{aligned}$$

Prema zahtjevu zadatka, taj razlomak mora biti jednak 2. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{a + 1}{5 \cdot a - 4} &= 2, \quad / \cdot (5 \cdot a - 4) \\
 a + 1 &= 2 \cdot (5 \cdot a - 4), \\
 a + 1 &= 10 \cdot a - 8, \\
 a - 10 \cdot a &= -8 - 1, \\
 (-9) \cdot a &= -9, \quad / : (-9) \\
 a &= 1.
 \end{aligned}$$

Dakle, tražena je vrijednost $a = 1$.


 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
---	---	--

2. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $B = A^{-1} \cdot (E - 3 \cdot A^T)$. (E je jedinična matrica reda 2.)

Rješenje:

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -6 & -11 \end{bmatrix} = \\
 &= \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -14 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
--	---	--

3. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Neka je E jedinična matrica reda 2. Riješite matričnu jednadžbu: $A \cdot X + 2 \cdot A^T = E$.

Rješenje:

Iz zadane jednadžbe izrazimo nepoznatu matricu X . Dobivamo:

$$A \cdot X = E - 2 \cdot A^T, \quad / \cdot A^{-1} \text{ slijeva}$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot (E - 2 \cdot A^T),$$


$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot (E - 2 \cdot A^T),$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot (E - 2 \cdot A^T),$$

$$X = A^{-1} \cdot (E - 2 \cdot A^T).$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{7 \cdot 1 - 2 \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \left((-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -13 & -4 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -19 & 0 \\ 30 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
--	---	--

4. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Riješite matricnu jednadžbu: $X \cdot A = X + A$.

Rješenje:

Iz zadane jednadžbe izrazimo matricu X . Jediničnu matricu reda 2 standardno označimo s E . Imamo redom:


$$\begin{aligned}
 X \cdot A &= X + A, \\
 X \cdot A - X &= A, \\
 X \cdot (A - E) &= A, \quad / \cdot (A - E)^{-1} \text{ zdesna} \\
 (X \cdot (A - E)) \cdot (A - E)^{-1} &= A \cdot (A - E)^{-1}, \\
 X \cdot ((A - E) \cdot (A - E)^{-1}) &= A \cdot (A - E)^{-1}, \\
 X \cdot E &= A \cdot (A - E)^{-1}, \\
 X &= A \cdot (A - E)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Za zadanu matricu A izračunajmo $(A - E)^{-1}$. Odmah dobijemo:

$$\begin{aligned}
 A - E &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \\
 (A - E)^{-1} &= \frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

pa je konačno:

$$\begin{aligned}
 X &= A \cdot (A - E)^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
---	---	--

5. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 2, 3)$ i $\vec{b} = (3, 2, 1)$. Izračunajte volumen **tetraedra** razapetoga vektorima $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$.

Rješenje:

Odredimo najprije sve vektore koji određuju tetraedar. Imamo:


$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} &= (1+3, 2+2, 3+1) = (4, 4, 4), \\
 \vec{a} - \vec{b} &= (1-3, 2-2, 3-1) = (-2, 0, 2), \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \\
 &= (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) \cdot \vec{i} - (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) \cdot \vec{j} + (1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) \cdot \vec{k} = \\
 &= (-4) \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k} = \\
 &= (-4, 8, -4).
 \end{aligned}$$

Njihov je mješoviti umnožak jednak

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{vmatrix} = (\text{I. stupac} + \text{III. stupac} \rightarrow \text{III. stupac}) = \\
 &= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -8 \end{vmatrix} = (\text{razvoj po 2. retku}) = \\
 &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & -8 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (4 \cdot (-8) - 8 \cdot 8) = \\
 &= 2 \cdot (-32 - 64) = -192,
 \end{aligned}$$

pa je traženi volumen jednak

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{6} \cdot |M| = \\
 &= \frac{1}{6} \cdot |-192| = \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 192 = 32 \text{ kub. jed.}
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
---	---	--

6. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Izračunajte mjeru kuta (iskazanu u radijanima) između vektora \vec{c} i $\vec{a} \times \vec{b}$.

Rješenje:


Odredimo najprije vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= (1, -2, 1), \quad \vec{b} = (2, -1, -1), \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} \cdot ((-2) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) - \vec{j} \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1) + \vec{k} \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)) = \\
 &= 3 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = \\
 &= (-3) \cdot (-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = \\
 &= (-3) \cdot \vec{c}.
 \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da su vektori \vec{c} i $\vec{a} \times \vec{b}$ kolinearni, ali suprotne orijentacije. Zbog toga je tražena mjera kuta jednaka $\varphi = \pi$ radijana.

Napomena: Isto rješenje zadatka dobije se i korištenjem skalarnoga umnoška:

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{c}| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|} = \\
 &= \frac{(-1, -1, -1) \cdot (3, 3, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}} = \\
 &= \frac{(-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{9+9+9}} = \\
 &= \frac{-9}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-9}{\sqrt{3 \cdot 27}} = \frac{-9}{\sqrt{81}} = \frac{-9}{9} = -1, \\
 \varphi &= \arccos(-1) = \pi \text{ rad.}
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
---	---	--

7. Vektori \vec{a} i \vec{b} su jedinični. Površina trokuta kojega razapinju vektori $\vec{c} = 5\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$ iznosi 4 kv. jed. Odredite mjeru šiljastoga kuta među vektorima \vec{a} i \vec{b} .

Rješenje:

Označimo s φ traženi kut. Površina trokuta kojega zatvaraju vektori \vec{c} i \vec{d} jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška. Zbog toga odredimo:

$$\begin{aligned}
 \vec{c} \times \vec{d} &= (5\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = \\
 &= 5 \cdot \underbrace{(\vec{a} \times \vec{a})}_{=0} - \underbrace{\vec{b} \times \vec{a}}_{=\vec{a} \times \vec{b}} + 15 \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) - 3 \cdot \underbrace{(\vec{b} \times \vec{b})}_{=0} = \\
 &= 16 \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \\
 P &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{c} \times \vec{d}| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |16 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \underbrace{|\vec{a}|}_{=1} \cdot \underbrace{|\vec{b}|}_{=1} \cdot \sin \varphi = \\
 &= 8 \cdot \sin \varphi.
 \end{aligned}$$


Prema zahtjevu zadatka, ta površina mora biti jednaka 4 kv. jed. Tako dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\begin{aligned}
 8 \cdot \sin \varphi &= 4, \quad / : 8 \\
 \sin \varphi &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Jedino rješenje te jednadžbe u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Dakle, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ radijana = 30° .

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
---	---	---

8. Vektori \vec{a} i \vec{b} su jedinični vektori. Volumen **prizme** koju razapinju vektori $4 \cdot \vec{a}$, $3 \cdot \vec{b}$ i $2 \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ jednak je 9 kub. jed. Odredite mjeru **šiljastoga** kuta (iskazanu u radijanima) između vektora \vec{a} i \vec{b} .

Rješenje:

Označimo s φ traženu mjeru šiljastoga kuta između zadanih vektora. Koristeći jednakosti

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \forall a \in V^3(O),$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot x)), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

redom dobivamo:


$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \cdot \left| \left((4 \cdot \vec{a}) \times (3 \cdot \vec{b}) \right) \cdot (2 \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right| = \\ &= 12 \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \\ &= 12 \cdot \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \right)^2 = \\ &= 12 \cdot (1 \cdot 1 \cdot \sin \varphi)^2 = \\ &= 12 \cdot \sin^2 \varphi = \\ &= 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \varphi)) \right) = \\ &= 6 - 6 \cdot \cos(2 \cdot \varphi). \end{aligned}$$

Prema zahtjevu zadatka, dobiveni volumen treba biti jednak 9 kub. jed. Tako dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\begin{aligned} 6 - 6 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) &= 9, \\ \cos(2 \cdot \varphi) &= \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Jedino rješenje ove jednadžbe u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za grupne konzultacije nastavne grupe A i B 12. 11. 2022.
--	---	---

Napomena: Iznimno u ovom zadatku (ali ne i općenito!) tražena mjera kuta može se odrediti i na sljedeći način:

Prema pretpostavci, φ je **šiljasti** kut (tj. kut u prvom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). Zbog toga je sinus njegove mjere strogo pozitivan. Analogno kao u prethodnom načinu dobivamo:

$$V = 12 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Izjednačavanjem te vrijednosti s 9 slijedi:

$$12 \cdot \sin^2 \varphi = 9, \quad / : 9$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad / \sqrt{}$$

$$\left| \underbrace{\sin \varphi}_{>0} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$