1. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je funkcija $F(x) = x \cdot \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + 2021^{2021}$ antiderivacija funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$. (Nije potrebno određivati prirodne domene.)

   Rješenje: Treba (samo) provjeriti jednakost $F' = f$. Koristeći osnovna pravila za deriviranje imamo redom:

$$F'(x) = (x)' \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot (\operatorname{tg} x)' + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' + 0 = 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x = \frac{x}{\cos^2 x} = f(x).$$

2. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je funkcija $F(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{e^x}$ standardna antiderivacija funkcije $f(x) = \dfrac{2 \cdot \cos x}{e^x}$.

   Rješenje: Prirodna domena obiju funkcija je skup $\mathbb{R}$. Zbog toga treba (samo) provjeriti jednakost $F' = f$. Koristeći osnovna pravila za deriviranje imamo redom:

$$F'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)' \cdot e^x - (\sin x - \cos x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{(\cos x - (-\sin x)) \cdot e^x - (\sin x - \cos x) \cdot e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x - (\sin x - \cos x)) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cos x + \sin x - \sin x + \cos x}{e^x} = \frac{2 \cdot \cos x}{e^x} = f(x).$$

3. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = 6\cdot\sqrt{1-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rješenja: **a)** Traženi je volumen jednak:

$$V_1 = \pi\cdot\int_0^1 \left(6\cdot\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot \mathrm{d}x = \pi\cdot\int_0^1 36\cdot\left(1-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x = 36\cdot\pi\cdot\left(\left(x-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)_0^1\right) =$$

$$= 36\cdot\pi\cdot\left(1-\frac{1}{3}-(0-0)\right) = 36\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi = 24\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

b) Traženi je volumen jednak:

$$V_2 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^1 6\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot \mathrm{d}x = 6\cdot\pi\cdot\int_0^1 2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot \mathrm{d}x.$$

Uvedimo zamjenu:

$$t := 1-x^2,$$
$$\mathrm{d}t = \left(1-x^2\right)'\cdot \mathrm{d}x = (-2\cdot x)\cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\cdot x\cdot \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,$$
$$0 \mapsto 1-0^2 = 1-0 = 1,$$
$$1 \mapsto 1-1^2 = 1-1 = 0.$$

Dobivamo:

$$V_y = 6\cdot\pi\cdot\int_1^0 \sqrt{t}\cdot(-\mathrm{d}t) = 6\cdot\pi\cdot\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{d}t = 6\cdot\pi\cdot\left(\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot t^{\frac{1}{2}+1}\right)_0^1\right) = 6\cdot\pi\cdot\left(\left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1\right) =$$

$$= 6\cdot\pi\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1\right) = 6\cdot\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\left(t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1\right) = 4\cdot\pi\cdot\left(1^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right) = 4\cdot\pi\cdot(1-0) = 4\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

4. Izračunajte duljinu luka ravninske krivulje $y=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{ch}(2\cdot x)$ iznad segmenta $\left[0,\frac{1}{2}\cdot\ln 2\right]$.

Rješenje: Koristeći osnovni hiperbolni identitet $\mathrm{ch}^2(2\cdot x)-\mathrm{sh}^2(2\cdot x)=1$, definicijsku formulu $\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ i relaciju $e^{a\cdot\ln x}=x^a,\ \forall x>0,$ dobivamo da je tražena duljina jednaka:

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{ch}(2\cdot x)\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{sh}(2\cdot x)\cdot(2\cdot x)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{sh}(2\cdot x)\cdot 2\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(2\cdot x)}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\sqrt{\mathrm{ch}^2(2\cdot x)}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\mathrm{ch}(2\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{sh}(2\cdot x)\right)_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\mathrm{sh}(2\cdot x)\right)_0^{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln 2\right)-\mathrm{sh}(2\cdot 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{sh}(\ln 2)-0)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{sh}(\ln 2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-2^{-1}}{4}=\frac{3}{8}\ \text{jed. duljine.}$$

5. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $f(t)=\dfrac{1}{3\cdot\left(t^3+t\right)}$ na segmentu $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

Rješenje: Rastavimo funkciju $f_1(t)=\dfrac{1}{t^3+t}$ na parcijalne razlomke. Vrijedi identitet:

$$t^3+t=t\cdot\left(t^2+1\right),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

pa rastav ima oblik:

$$\frac{1}{t^3+t}=\frac{A}{t}+\frac{B\cdot t+C}{t^2+1},\ \text{za neke } A,B,C\in\mathbb{R}.$$

Odredimo nepoznate koeficijente A,B i C. Imamo redom:

$$1=A\cdot\left(t^2+1\right)+(B\cdot t+C)\cdot t\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=0\Rightarrow A=1, \\ t=1\Rightarrow 2\cdot A+B+C=1, \\ t=-1\Rightarrow 2\cdot A+B-C=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=1, \\ B+C=-1, \\ B-C=-1 \end{cases}\Leftrightarrow (A,B,C)=(1,-1,0).$$

Zbog toga je:

$$\frac{1}{t^3+t}=\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\Rightarrow f=\frac{1}{3\cdot\left(t^3+t\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3+t}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right).$$

Tako je tražena prosječna vrijednost jednaka:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=2\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t.$$

Odredimo standardnu antiderivaciju funkcije f_1 (jer je izraz u zagradi jednak upravo toj funkciji). U tu svrhu uočimo da je

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t}\cdot\mathrm{d}t-\int\frac{t}{t^2+1}\cdot\mathrm{d}t.$$

Prvi je član na desnoj strani tablični integral. Pripadna standardna antiderivacija jednaka je $\ln t$ (apsolutna vrijednost nije potrebna jer polaznu funkciju promatramo na segmentu $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ čiji su svi elementi pozitivni realni brojevi.)

Drugi član na desnoj strani odredimo metodom zamjene. Zamijenimo:

$$x := t^2 + 1,$$
$$\mathrm{d}x = \left(t^2+1\right)' \cdot \mathrm{d}t = (2\cdot t + 0)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot t\cdot \mathrm{d}t \Leftrightarrow t\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}x.$$

Tako dobivamo:

$$\int \frac{t}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t = \int \frac{\frac{1}{2}}{x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \ln|x| = \frac{1}{2}\cdot \ln\left(t^2+1\right).$$

(U posljednjem izrazu apsolutnu vrijednost smo zamijenili običnom zagradom jer za svaki $t \in \mathbb{R}$ očito vrijedi $t^2+1>0.$)

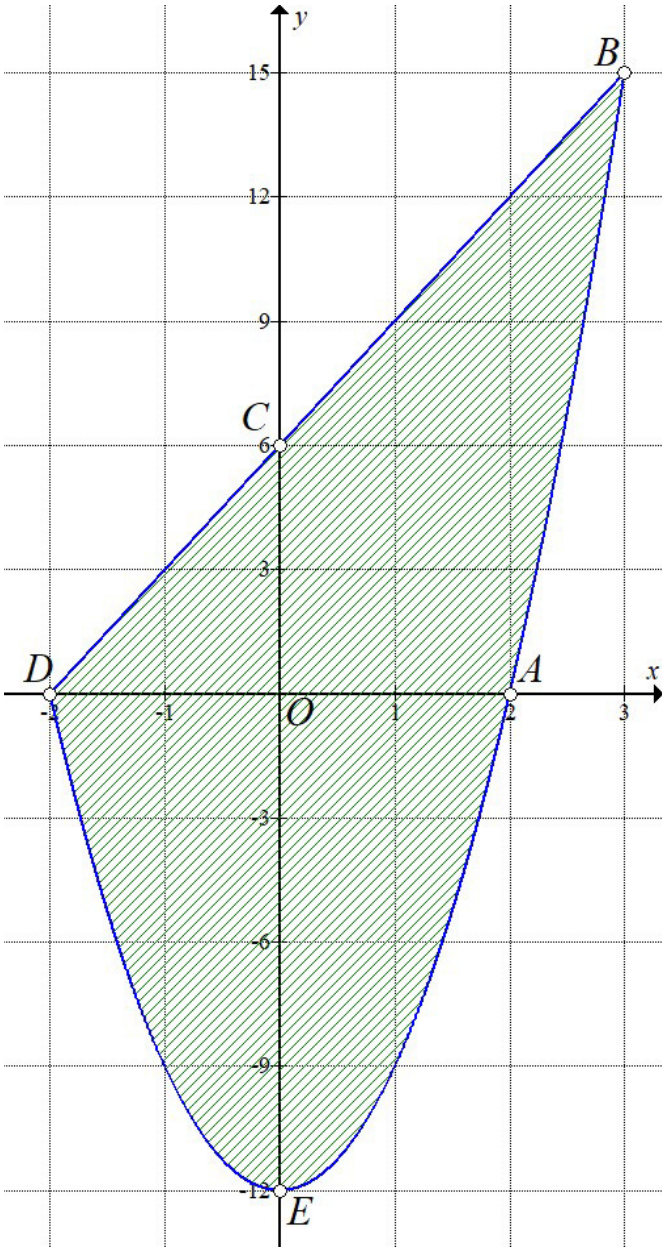
Tako sada imamo:

$$\overline{f} = 2\cdot\left(\left(\ln t - \frac{1}{2}\cdot \ln\left(t^2+1\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2\cdot \ln t - \ln\left(t^2+1\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \left(\ln\left(t^2\right) - \ln\left(t^2+1\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}\right) - \ln\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{9}}{\frac{10}{9}}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}}\right) = \ln 2.$$

6. Izračunajte površinu ravninskoga lika osjenčanoga na donjoj slici. (Krivulja $\widehat{BDE}$ je parabola čija jednadžba ima oblik $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$.)



Slika 1

Rješenje: Jednadžba parabole $\widehat{BED}$ je

$$y = \frac{-12}{(0-2)\cdot(0+2)} \cdot (x-2)\cdot(x+2) = \frac{-12}{-4} \cdot \left(x^2 - 4\right) = 3 \cdot x^2 - 12,$$

dok je jednadžba pravca BD

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1 \Leftrightarrow -3 \cdot x + y = 6 \Leftrightarrow y = 3 \cdot x + 6.$$

Primijetimo da za svaki $x \in [-2,3]$ vrijedi nejednakost:

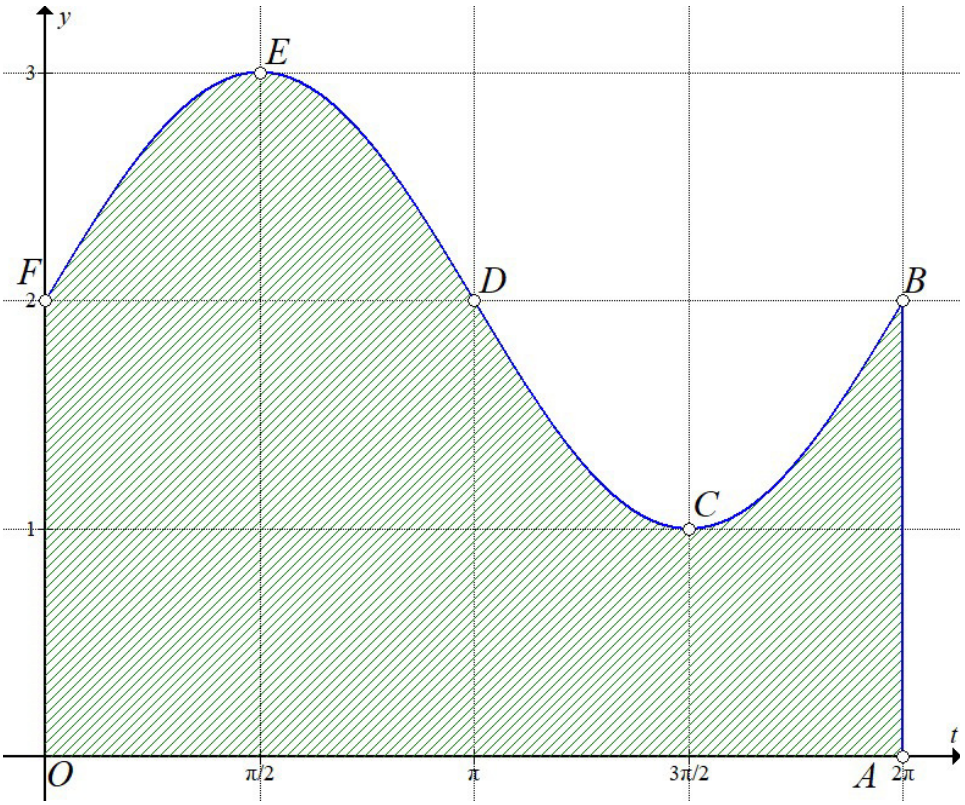
$$3 \cdot x + 6 \geq 3 \cdot x^2 - 12.$$

(Na tom je segmentu pravac BD iznad parabole $\widehat{BED}$.) Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = \int_{-2}^{3} \left(3 \cdot x + 6 - \left(3 \cdot x^2 - 12\right)\right) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} \left(-3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 18\right) \cdot \mathrm{d}x = \left(-x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 18 \cdot x\right)_{-2}^{3} =$$

$$= -27 + \frac{27}{2} + 54 - \left(-(-8) + 6 + (-36)\right) = \frac{125}{2} = 62.5 \text{ kv. jed.}$$

7. Na donjoj je slici prikazan krivocrtni trapez $OABF$. Krivulja $\widehat{BF}$ je sinusoida čija jednadžba ima oblik $y = A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)+B$, za neke $A,\omega>0$, $\varphi\in\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $B\in\mathbb{R}$.



Slika 2.

a) Izračunajte površinu zadanoga krivocrtnoga trapeza.

b) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga krivocrtnoga trapeza oko osi apscisa.

c) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga krivocrtnoga trapeza oko osi ordinata.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu sinusoide. Njezin temeljni period je očito jednak $T = 2\cdot\pi$, pa zaključujemo da je $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi} = 1$.

Pripadna harmonijska funkcija poprima najveću vrijednost kad je $\sin(\omega\cdot t+\varphi)=1$ i ta je vrijednost jednaka $A+B$. Iz slike se vidi da je $A+B=3$.

Pripadna harmonijska funkcija poprima najmanju vrijednost kad je $\sin(\omega\cdot t+\varphi)=-1$ i ta je vrijednost jednaka $-A+B$. Iz slike se vidi da je $-A+B=1$.

Tako iz sustava $\begin{cases} A+B=3, \\ -A+B=1 \end{cases}$ slijedi $(A,B)=(1,2)$.

Preostaje odrediti fazni pomak φ. Za $t=0$ vrijednost pripadne harmonijske funkcije treba biti jednaka 2, pa dobivamo:

$$2=1\cdot\sin(1\cdot 0+\varphi)+2 \Leftrightarrow \sin\varphi=0.$$

U intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $\varphi=0$. Tako smo dobili:

$$y=1\cdot\sin(1\cdot t+0)+2 \Leftrightarrow y=\sin t+2.$$

a) Tražena je površina jednaka:

$$P=\int_0^{2\cdot\pi}(\sin t+2)\cdot \mathrm{d}t=\left(-\cos t+2\cdot t\right)_0^{2\cdot\pi}=-\cos(2\cdot\pi)+2\cdot(2\cdot\pi)-(-\cos 0+2\cdot 0)=$$
$$=-1+4\cdot\pi+1+0=4\cdot\pi \text{ kv. jed.}$$

b) Traženi je volumen jednak:

$$V_1=\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}(\sin t+2)^2\cdot \mathrm{d}t=\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}(\sin^2 t+4\cdot\sin t+4)\cdot \mathrm{d}t=$$
$$=\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2\cdot t))+4\cdot\sin t+4\right)\cdot \mathrm{d}t=\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\cos(2\cdot t)+4\cdot\sin t+\frac{9}{2}\right)\cdot \mathrm{d}t=$$
$$=\pi\cdot\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t)-4\cdot\cos t+\frac{9}{2}\cdot t\right)_0^{2\cdot\pi}=\pi\cdot(-4+9\cdot\pi+4-0)=9\cdot\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

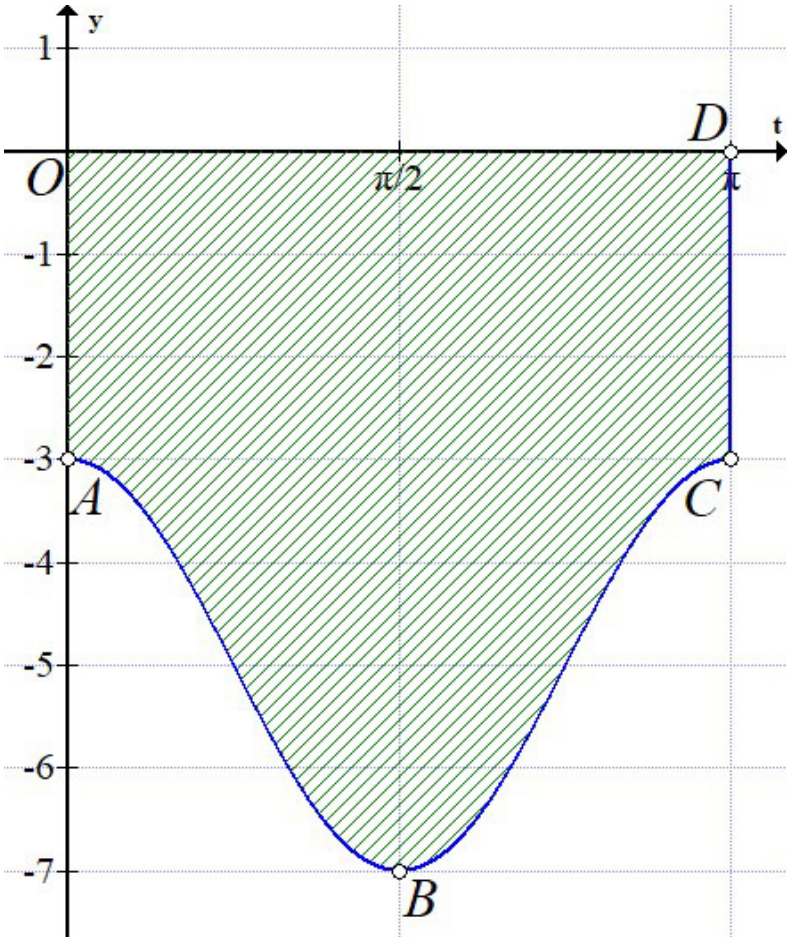
c) Traženi je volumen jednak:

$$V_2=2\cdot\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}t\cdot(\sin t+2)\cdot \mathrm{d}t.$$

Ovaj određeni integral odredimo metodom djelomične integracije. Imamo redom:

$$V_2=\left|\begin{matrix} u=t & v=\int(\sin t+2)\cdot \mathrm{d}t=2\cdot t-\cos t \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & \mathrm{d}v=(\sin t+2)\cdot \mathrm{d}t\end{matrix}\right|=2\cdot\pi\cdot\left(\left(2\cdot t^2-t\cdot\cos t\right)_0^{2\cdot\pi}-\int_0^{2\cdot\pi}(2\cdot t-\cos t)\cdot \mathrm{d}t\right)=$$
$$=2\cdot\pi\cdot\left(2\cdot 4\cdot\pi^2-2\cdot\pi\cdot\cos(2\cdot\pi)-0+0-\left(t^2-\sin t\right)_0^{2\cdot\pi}\right)=$$
$$=2\cdot\pi\cdot\left(8\cdot\pi^2-2\cdot\pi-\left(4\cdot\pi^2-\sin(2\cdot\pi)-0+0\right)\right)=$$
$$=2\cdot\pi\cdot\left(8\cdot\pi^2-2\cdot\pi-4\cdot\pi^2\right)=2\cdot\pi\cdot\left(4\cdot\pi^2-2\cdot\pi\right)=8\cdot\pi^3-4\cdot\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

8. Na donjoj je slici prikazan krivocrtni trapez $ACDO$. Krivulja $\widehat{AC}$ je dio kosinusoide čija jednadžba ima oblik $y = A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)+B$, za neke $A,\omega>0$, $\varphi\in\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $B\in\mathbb{R}$.



Slika 2.

a) Izračunajte površinu zadanoga lika.

b) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga lika oko osi apscisa.

c) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga lika oko osi ordinata.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu kosinusoide. Iz slike vidimo da je temeljni period pripadne harmonijske funkcije $T=\pi$. Tako iz jednakosti $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$ slijedi $\omega=2$.

Najveća vrijednost pripadne harmonijske funkcije postiže se kad je $\cos(\omega\cdot t+\varphi)=1$ i iznosi $A+B$. Iz slike se vidi da je ta vrijednost jednaka -3 , pa je $A+B=-3$.

Najmanja vrijednost pripadne harmonijske funkcije postiže se kad je $\cos(\omega \cdot t + \varphi) = -1$ i iznosi $-A + B$. Iz slike se vidi da je ta vrijednost jednaka -7 , pa je $-A + B = -7$.

Tako iz sustava $\begin{cases} A + B = -3, \\ -A + B = -7 \end{cases}$ slijedi $(A, B) = (2, -5)$.

Preostaje odrediti fazni pomak φ. U jednadžbu kosinusoide uvrstimo $t = 0$, $(A, B, \omega) = (2, -5, 2)$ i $y = -3$. Dobivamo:

$$-3 = 2 \cdot \cos(2 \cdot 0 + \varphi) - 5 \Leftrightarrow \cos\varphi = 1.$$

U intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $\varphi = 0$. Dakle, jednadžba kosinusoide je:

$$y = 2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5.$$

a) Primijetimo da za svaki $t \in [0, \pi]$ vrijedi nejednakost $2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5 < 0$. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = \int_0^{\pi} -(2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5) \cdot \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (5 - 2 \cdot \cos(2 \cdot t)) \cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \left(5 \cdot t - \sin(2 \cdot t)\right)_0^{\pi} = 5 \cdot \pi - 0 - (0 - 0) = 5 \cdot \pi \text{ kv. jed.}$$

b) Traženi je volumen jednak:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\pi} (2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5)^2 \cdot \mathrm{d}t = \pi \cdot \int_0^{\pi} (4 \cdot \cos^2(2 \cdot t) - 20 \cdot \cos(2 \cdot t) + 25) \cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \pi \cdot \int_0^{\pi} \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(4 \cdot t) \right) - 20 \cdot \cos(2 \cdot t) + 25 \right) \cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \pi \cdot \int_0^{\pi} \left(2 \cdot \cos(4 \cdot t) - 20 \cdot \cos(2 \cdot t) + 27\right) \cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \pi \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot t) - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) + 27 \cdot t \right)_0^{\pi} \right) =$$
$$= \pi \cdot (0 - 0 + 27 \cdot \pi - (0 - 0 + 0)) = 27 \cdot \pi^2 \text{ kub. jed.}$$

c) Ponovno zbog očite nejednakosti $2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5 < 0$, $\forall t \in [0, \pi]$, zaključujemo da je traženi volumen jednak:

$$V = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi} t\cdot(-(2\cdot\cos(2\cdot t)-5)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi} t\cdot(5-2\cdot\cos(2\cdot t))\cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t & v = \int (5-2\cdot\cos(2\cdot t))\cdot \mathrm{d}t = 5\cdot t - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t) = 5\cdot t - \sin(2\cdot t) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = (5-2\cdot\cos(2\cdot t))\cdot \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

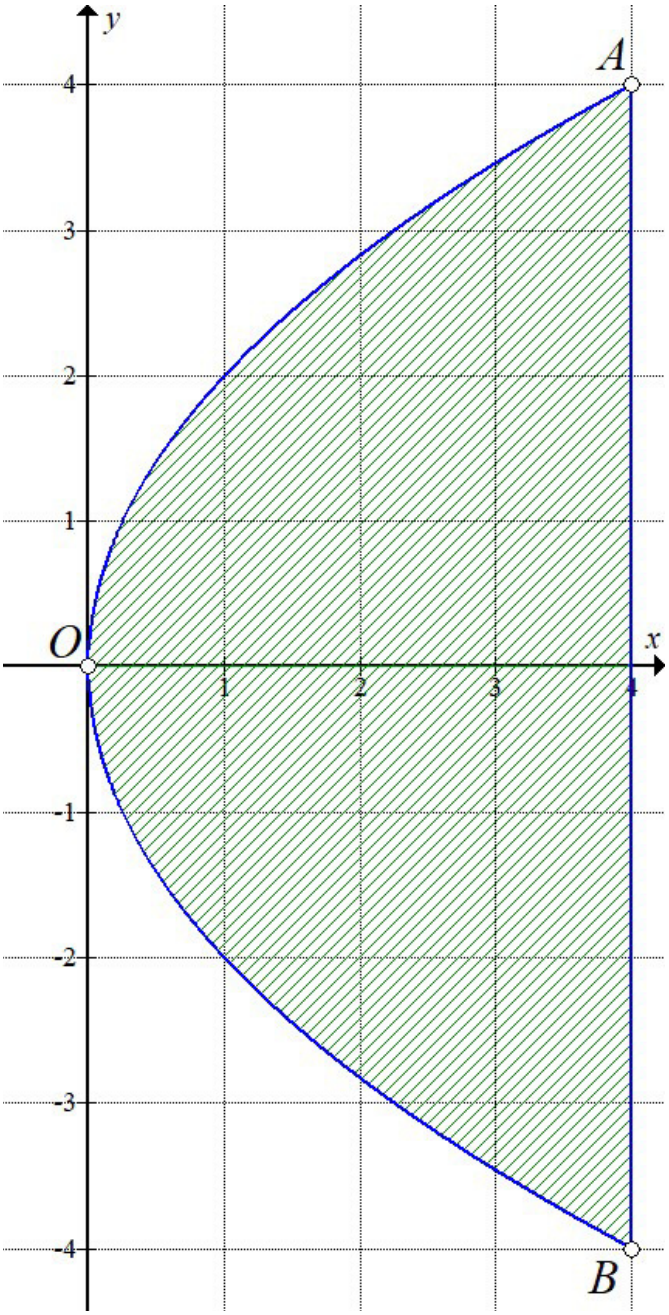
$$= 2\cdot\pi\cdot\left(\left(5\cdot t^2 - t\cdot\sin(2\cdot t)\right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (5\cdot t - \sin(2\cdot t)\cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(5\cdot\pi^2 - 0 - 0 + 0 - \left(\frac{5}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)\right)_0^{\pi} \right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(5\cdot\pi^2 - \left(\frac{5}{2}\cdot\pi^2 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\frac{5}{2}\cdot\pi^2 = 5\cdot\pi^3 \text{ kub. jed.}$$

9. Na donjoj je slici prikazan ravninski lik OAB. Krivulja $\widehat{AOB}$ je dio parabole čija jednadžba ima oblik $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$, za neki $p > 0$.



Slika 3.

a) Izračunajte **opseg** zadanoga lika.

b) Izračunajte **površinu** zadanoga lika.

c) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga lika oko osi **apscisa**.

d) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga lika oko osi **ordinata**.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu parabole $\widehat{AOB}$. Iz slike vidimo da ona prolazi točkom $A=(4,4)$, pa uvrštavanjem $x=y=4$ u izraz $y^2=2\cdot p\cdot x$ dobivamo jednadžbu $4^2=2\cdot p\cdot 4$, otkuda je $p=\frac{4^2}{2\cdot 4}=\frac{4}{2}=2.$ Dakle, jednadžba parabole $\widehat{AOB}$ glasi: $y^2=4\cdot x.$

a) Duljina dužine $\overline{AB}$ jednaka je $\left|\overline{AB}\right|=4+4=8$ jed. duljine. Preostaje odrediti duljinu luka $\widehat{AB}$. Zbog očite osne simetrije lika s obzirom na os apscisa, ta je duljina dvostruko veća od duljine luka $\widehat{OA}$. Tu ćemo duljinu najlakše izračunati tako da izraz $y^2=4\cdot x$ shvatimo kao *funkciju varijable y*, tj. kao $x=\frac{1}{4}\cdot y^2$, pa traženu duljinu odredimo promatrajući odgovarajući određeni integral *po varijabli y*. Tako odmah imamo:

$$\left|\widehat{AB}\right|=2\cdot\left|\widehat{OA}\right|=2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{4}\cdot y^2\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot y\right)^2}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=2\cdot\int_0^4\sqrt{\frac{y^2+4}{4}}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\frac{\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{4}}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\frac{\sqrt{y^2+4}}{2}\cdot\mathrm{d}y=\int_0^4\sqrt{y^2+4}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=\left(\frac{y}{2}\cdot\sqrt{y^2+4}+\frac{4}{2}\cdot\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right)_0^4=2\cdot\sqrt{20}+2\cdot\ln\left(4+\sqrt{20}\right)-0-2\cdot\ln\left(\sqrt{4}\right)=$$

$$=2\cdot\sqrt{20}+2\cdot\ln\left(4+\sqrt{20}\right)-2\cdot\ln 2=2\cdot\sqrt{4\cdot 5}+2\cdot\ln\left(\frac{4+\sqrt{20}}{2}\right)=4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\ln\left(\frac{4+2\cdot\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\text{ jed. duljine.}$$

Dakle, traženi je opseg jednak:

$$O=\left|\widehat{AOB}\right|+\left|\overline{AB}\right|=4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)+8\approx 19.832\text{ jed. duljine.}$$

b) Ponovno zbog osne simetrije zadanoga lika s obzirom na os apscisa slijedi da je tražena površina jednaka:

$$P=2\cdot\left(4^2-\int_0^4\frac{y^2}{4}\cdot\mathrm{d}y\right)=2\cdot\left(16-\frac{1}{4}\cdot\int_0^4 y^2\cdot\mathrm{d}y\right)=2\cdot\left(16-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot y^3\right)_0^4\right)=$$

$$=2\cdot\left(16-\frac{1}{12}\cdot\left(y^3\right)_0^4\right)=2\cdot\left(16-\frac{1}{12}\cdot\left(4^3-0^3\right)\right)=2\cdot\left(16-\frac{64}{12}\right)=2\cdot\left(16-\frac{16}{3}\right)=\frac{64}{3}\text{ kv. jed.}$$

c) Prilikom određivanja volumena traženoga rotacijskoga tijela možemo postupiti na dva načina: integrirati po varijabli x ili integrirati po varijabli y. U prvom je

slučaju formula za računanje volumena standardna, dok u drugom slučaju os apscisa trebamo shvatiti kao os ordinata kad je pravilo funkcije zadano kao funkcija varijable x. Konkretno, u prvome je slučaju odmah

$$V_1 = \pi \cdot \int_0^4 4 \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(2 \cdot x^2\right)_0^4 = \pi \cdot \left(2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 0^2\right) = 32 \cdot \pi \text{ kub. jed.},$$

dok u drugom slučaju od volumena valjka čiji su polumjer osnovke i visina dugi 4 jed. duljine trebamo oduzeti volumen rotacijskoga paraboloida nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $x = \frac{y^2}{4}$, $x = 0$, $y = 0$ i $y = 4$ oko osi apscisa:

$$V_1 = 4^2 \cdot \pi \cdot 4 - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 y \cdot \frac{y^2}{4} \cdot \mathrm{d}y = 64 \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^4 y^3 \cdot \mathrm{d}y = 64 \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot y^4\right)_0^4 =$$

$$= 64 \cdot \pi - \frac{\pi}{8} \cdot \left(4^4 - 0^4\right) = 64 \cdot \pi - 32 \cdot \pi = 32 \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

d) I u ovom slučaju možemo postupiti analogno kao u prethodnom podzadatku. Koristeći prvi način i pravilo $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ kojim je zadan luk $\widehat{OA}$ odmah dobivamo:

$$V_2 = 2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 x \cdot 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x\right) = 8 \cdot \pi \cdot \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{d}x = 8 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1} \cdot x^{\frac{3}{2}+1}\right)_0^4 = \frac{16}{5} \cdot \pi \cdot \left(x^{\frac{5}{2}}\right)_0^4 =$$

$$= \frac{16}{5} \cdot \pi \cdot \left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{16}{5} \cdot 2^5 \cdot \pi = \frac{512}{5} \cdot \pi \text{ kub. jed.},$$

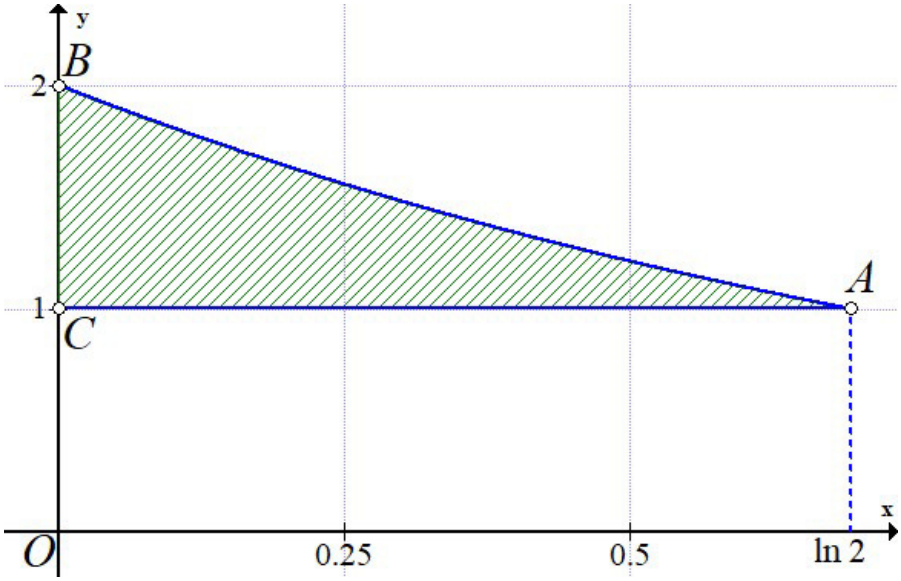
dok koristeći drugi način, odnosno oduzimajući volumen rotacijskoga paraboloida nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $x = \frac{y^2}{4}$, $x = 0$, $y = 0$ i $y = 4$ od volumena valjka čiji su polumjer osnovke 4 jed. duljine i visina 4 jed. duljine i množeći dobivenu razliku s 2, dobivamo:

$$V_2 = 2 \cdot \left(4^2 \cdot \pi \cdot 4 - \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 \cdot \mathrm{d}y\right) = 128 \cdot \pi - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 \frac{y^4}{16} \cdot \mathrm{d}y = 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{8} \cdot \int_0^4 y^4 \cdot \mathrm{d}y =$$

$$= 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{1}{4+1} \cdot y^{4+1}\right)_0^4 = 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{40} \cdot \left(y^5\right)_0^4 = 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{40} \cdot \left(4^5 - 0^5\right) =$$

$$= 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{40} \cdot 4^5 \cdot \pi = 128 \cdot \pi - \frac{128}{5} \cdot \pi = \frac{512}{5} \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

10. Na donjoj je slici prikazan krivocrtni trokut ABC. Pritom je stranica $\overset{\frown}{AB}$ dio krivulje čija jednadžba ima oblik $y = b \cdot e^{a \cdot x}$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$.



Slika 4.

a) Izračunajte **opseg** zadanoga trokuta.
b) Izračunajte **površinu** zadanoga trokuta.
c) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga trokuta oko osi **apscisa**.
d) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga trokuta oko osi **ordinata**.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu stranice $\overset{\frown}{AB}$. Iz slike vidimo da su $A = (\ln 2, 1)$, $B = (0, 2)$ i $C = (0, 1)$. Budući da krivulja $y = b \cdot e^{a \cdot x}$ prolazi točkama A i B, dobivamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 2 = b \cdot e^{a \cdot 0}, \\ 1 = b \cdot e^{a \cdot \ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b \cdot 1, \\ 1 = b \cdot e^{\ln(2^a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b, \\ 1 = b \cdot 2^a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b, \\ 2^0 = b \cdot 2^a. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je očito $b = 2$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $2^0 = 2 \cdot 2^a$, odnosno $1 + a = 0$, a odatle je $a = -1$. Dakle, jednadžba stranice $\overset{\frown}{AB}$ glasi:

$$y = 2 \cdot e^{-x}.$$

a) Iz slike se vidi da su $|\overline{AC}| = \ln 2$ i $|\overline{BC}| = 1$. Preostaje odrediti duljinu stranice $\overset{\frown}{AB}$. Ta je duljina jednaka duljini luka krivulje $y = 2 \cdot e^{-x}$ iznad segmenta $[0, \ln 2]$, pa imamo redom:

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\left(2\cdot e^{-x}\right)'\right)^2}\cdot \mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(2\cdot(-1)\cdot e^{-x}\right)^2}\cdot \mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot x}}\cdot \mathrm{d}x.$$

Ovaj ćemo integral odrediti metodom zamjene:

$$t:=\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot x}},$$

$$e^{-2\cdot x}=\frac{t^2-1}{4},$$

$$\mathrm{d}t=\frac{4\cdot(-2)\cdot e^{-2\cdot x}}{2\cdot\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot x}}}\cdot \mathrm{d}x=\frac{4\cdot(-2)\cdot\frac{t^2-1}{4}}{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}x=\frac{1-t^2}{t}\cdot \mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{t}{1-t^2}\cdot \mathrm{d}t,$$

$$0\mapsto\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot 0}}=\sqrt{1+4\cdot 1}=\sqrt{5},$$

$$\ln 2\mapsto\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot\ln 2}}=\sqrt{1+4\cdot e^{\ln\left(2^{-2}\right)}}=\sqrt{1+4\cdot 2^{-2}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Tako dobivamo:

$$\left|\widehat{AB}\right|=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{2}}t\cdot\frac{t}{1-t^2}\cdot \mathrm{d}t=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2}{t^2-1}\cdot \mathrm{d}t=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\cdot \mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}\right|=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}\right|=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2^2}\right|-\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{2}-\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\text{ jed. duljine.}$$

Dakle, traženi je opseg jednak:

$$O=\left|\widehat{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CA}\right|=\ln 2+1+\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{2}-\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=1+\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\approx 2.91516\text{ jed. duljine.}$$

b) Traženu površinu možemo odrediti na dva načina: integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y. U prvome je slučaju od površine lika omeđenoga krivuljama $y=2\cdot e^{-x}$, $y=0$, $x=0$ i $x=\ln 2$ potrebno oduzeti površinu pravokutnika čije stranice imaju duljine ln 2 jed. duljine i 1 jed. duljine:

$$P=\int_0^{\ln 2} 2\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x-(1\cdot\ln 2)=\left(2\cdot\frac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right)_0^{\ln 2}-\ln 2=\left(-2\cdot e^{-\ln 2}-\left(-2\cdot e^{-0}\right)\right)-\ln 2=$$
$$=-2\cdot e^{\ln\left(2^{-1}\right)}+2\cdot 1-\ln 2=-2\cdot 2^{-1}+2-\ln 2=-1+2-\ln 2=1-\ln 2 \text{ kv. jed.}$$

U drugom slučaju najprije izrazimo varijablu x kao funkciju varijable y:

$$y=2\cdot e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow -x=\ln\left(\frac{y}{2}\right)\Leftrightarrow x=-\ln\left(\frac{y}{2}\right)=-(\ln y-\ln 2)=\ln 2-\ln y,$$

pa dobijemo:

$$P=\int_1^2(\ln 2-\ln y)\cdot \mathrm{d}y=\left((\ln 2)\cdot y-(y\cdot\ln y-y)\right)_1^2=\left((\ln 2+1)\cdot y-y\cdot\ln y)\right)_1^2=$$
$$=(\ln 2+1)\cdot 2-2\cdot\ln 2-((\ln 2+1)\cdot 1-1\cdot\ln 1)=$$
$$=2\cdot\ln 2+2-2\cdot\ln 2-\ln 2-1-0=1-\ln 2 \text{ kv. jed.}$$

c) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina: integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y. U prvome je slučaju od volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=2\cdot e^{-x}$, $y=0$, $x=0$ i $x=\ln 2$ potrebno oduzeti volumen valjka kojemu je polumjer osnovke jednak 1 jed. duljine, a visina ln 2 jed. duljine:

$$V_1=\pi\cdot\int_0^{\ln 2}\left(2\cdot e^{-x}\right)^2\cdot \mathrm{d}x-1^2\cdot\pi\cdot\ln 2=\pi\cdot\left(\int_0^{\ln 2}4\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x-\ln 2\right)=$$
$$=\pi\cdot\left(\left(4\cdot\frac{1}{-2}\cdot e^{-2\cdot x}\right)_0^{\ln 2}-\ln 2\right)=\pi\cdot\left(\left(-2\cdot e^{-2\cdot x}\right)_0^{\ln 2}-\ln 2\right)=$$
$$=\pi\cdot\left(-2\cdot e^{-2\cdot\ln 2}-\left(-2\cdot e^{-2\cdot 0}\right)-\ln 2\right)=\pi\cdot\left(-2\cdot e^{\ln\left(2^{-2}\right)}+2\cdot 1-\ln 2\right)=$$
$$=\pi\cdot\left(-2\cdot 2^{-2}+2-\ln 2\right)=\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

Koristeći dio rješenja **b)** podzadatka u kojemu smo dobili jednadžbu stranice $\widehat{AB}$ kao funkciju varijable y

$$x=\ln 2-\ln y,$$

u drugom slučaju odmah dobivamo:

$$V_1 = 2\cdot\pi\cdot\int_1^2 y\cdot(\ln 2-\ln y)\cdot \mathrm{d}y = 2\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\int_1^2 y-\int_1^2 y\cdot\ln y\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y^2\right)_1^2-\int_1^2 y\cdot\ln y\cdot \mathrm{d}y\right)=\left|\begin{array}{ll} u=\ln y & v=\int y\cdot \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot y^2 \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v=y\cdot \mathrm{d}y\end{array}\right|=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2^2-1^2)-\left(\frac{1}{2}\cdot y^2\cdot\ln y\right)_1^2+\int_1^2\frac{1}{2}\cdot y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\ln 2-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\ln 1+\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 y\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\ln 2-2\cdot\ln 2+0+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y^2\right)_1^2\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2^2-1^2\right)\right)=2\cdot\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

d) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina: integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y. U prvome je slučaju od volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=2\cdot e^{-x}$, $y=0$, $x=0$ i $x=\ln 2$ potrebno oduzeti volumen valjka kojemu je polumjer osnovke jednak ln 2 jed. duljine, a visina 1 jed. duljine:

$$V_2 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2} x\cdot 2\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x-(\ln 2)^2\cdot\pi\cdot 1 = 4\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2} x\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x & v=\int e^{-x}\cdot \mathrm{d}x=-e^{-x} \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^{-x}\cdot \mathrm{d}x\end{array}\right|=4\cdot\pi\cdot\left(\left(-x\cdot e^{-x}\right)_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\left(-e^{-x}\right)\cdot \mathrm{d}x\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot e^{-\ln 2}+\int_0^{\ln 2} e^{-x}\cdot \mathrm{d}x\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot e^{\ln\left(2^{-1}\right)}-\left(e^{-x}\right)_0^{\ln 2}\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot 2^{-1}-\left(e^{-\ln 2}-e^0\right)\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot 2^{-1}-2^{-1}+1\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=\left(2-2\cdot\ln 2-\ln^2 2\right)\cdot\pi\approx 0.41863 \text{ kub. jed.}$$

U drugom slučaju, koristeći dio rješenja **b)** podzadatka u kojemu smo dobili jednadžbu stranice $\widehat{AB}$ kao funkciju varijable y

$$x = \ln 2 - \ln y\,,$$

odmah dobivamo:

$$V_2 = \pi \cdot \int_1^2 (\ln 2 - \ln y)^2 \cdot \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_1^2 \left(\ln^2 2 - 2 \cdot \ln 2 \cdot \ln y + \ln^2 y\right) \cdot \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_1^2 \ln^2 2 \cdot \mathrm{d}y - 2 \cdot \ln 2 \cdot \int_1^2 \ln y \cdot \mathrm{d}y + \int_1^2 \ln^2 y \cdot \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\ln^2 2 \cdot (y)_1^2 - 2 \cdot \ln 2 \cdot (y \cdot \ln y - y)_1^2 + \int_1^2 \ln^2 y \cdot \mathrm{d}y \right) = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 y & v = \int \mathrm{d}y = y \\ \mathrm{d}u = \dfrac{2 \cdot \ln y}{y} \cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v = \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \pi \cdot \left(\ln^2 2 \cdot (2-1) - 2 \cdot \ln 2 \cdot (2 \cdot \ln 2 - 2 - 1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1) + \left(y \cdot \ln^2 y\right)_1^2 - 2 \cdot \int_1^2 \ln y \cdot \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\ln^2 2 - 4 \cdot \ln^2 2 + 2 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln^2 2 - 1 \cdot \underbrace{\ln^2 1}_{=(\ln 1)^2 = 0^2 = 0} - 2 \cdot (y \cdot \ln y - y)_1^2 \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(-\ln^2 2 + 2 \cdot \ln 2 - 2 \cdot \left(2 \cdot \ln 2 - 2 - 1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 \right) \right)$$

$$= \left(2 - 2 \cdot \ln 2 - \ln^2 2\right) \cdot \pi \approx 0.41863 \text{ kub. jed.}$$

11. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $f(t)=\pi\cdot\mathrm{ctg}^3 t$ na segmentu $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje: Koristeći osnovne trigonometrijske identitete imamo redom:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cdot\mathrm{ctg}^3 t\cdot\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\cdot\pi\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t}\cdot\mathrm{d}t=4\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot(\sin t)^{-3}\cdot\mathrm{d}t=$$

$$=4\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\cos t\cdot(\sin t)^{-3}\cdot\mathrm{d}t=4\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)\cdot\cos t\cdot(\sin t)^{-3}\cdot\mathrm{d}t\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x:=\sin t,\\ \mathrm{d}x=\cos t\cdot\mathrm{d}t,\\ \frac{\pi}{4}\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{\pi}{2}\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\end{array}\right\}=$$

$$=4\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(1-x^2\right)\cdot x^{-3}\cdot\mathrm{d}x=4\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(x^{-3}-x^{-1}\right)\cdot\mathrm{d}x=4\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(x^{-3}-\frac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=4\cdot\left(\left(\frac{1}{-3+1}\cdot x^{-3+1}-\ln x\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\right)=4\cdot\left(\left(\frac{-1}{2}\cdot x^{-2}-\ln x\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\right)=$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{2}-0-\left(-\frac{1}{2}\cdot 2-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}+1+\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)\right)=2+4\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\ln 2=2-2\cdot\ln 2.$$

12. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{x}{x^2+4}$, $y=0$, $x=0$ i $x=2$ oko osi **ordinata.**

Rješenja: Traženi je volumen jednak:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^2 x\cdot\frac{x}{x^2+4}\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^2\frac{x^2}{x^2+4}\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^2\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\left(x-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)_0^2\right)=2\cdot\pi\cdot\left(\left(x-2\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)_0^2\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(2-2\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}(1)}_{=\frac{\pi}{4}}-0+2\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}(0)}_{=0}\right)=4\cdot\pi-\pi^2\ \text{kub. jed.}$$

13. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, $y=0$, $x=0$ i $x=1$ oko osi **apscisa**.

Rješenje: Traženi je volumen jednak:

$$V=\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^1\frac{4}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x=4\cdot\pi\cdot\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x=4\cdot\pi\cdot\left(\left(\operatorname{arctg}x\right)_0^1\right)=$$

$$=4\cdot\pi\cdot(\underbrace{\operatorname{arctg}1}_{=\frac{\pi}{4}}-\underbrace{\operatorname{arctg}0}_{=0})=\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

14. Izračunajte duljinu luka ravninske krivulje $y=\sqrt{4-x^2}$ iznad segmenta $[0,2]$.

1. *rješenje*: Tražena je duljina jednaka:

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{0-2\cdot x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)_0^2=2\cdot(\underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arcsin 0}_{=0})=\pi \text{ jed. duljine.}$$

2. *rješenje*: Iz $y=\sqrt{4-x^2}$ slijedi $y^2=4-x^2$, odnosno $x^2+y^2=4$. Odatle zaključujemo da je zadana krivulja četvrtina središnje kružnice polumjera 2 (jer je riječ o dijelu te kružnice u prvom kvadratu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). Njezina je duljina jednaka četvrtini opsega navedene kružnice, tj.

$$l=\frac{1}{4}\cdot(2\cdot 2\cdot\pi)=\pi \text{ jed. duljine.}$$

15. Izračunajte duljinu luka ravninske krivulje $y=\ln(\sin x)$ iznad segmenta $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje: Tražena je duljina jednaka:

$$l=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\left(\ln(\sin x)\right)'\right)^2}\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\cdot \mathrm{d}x=$$

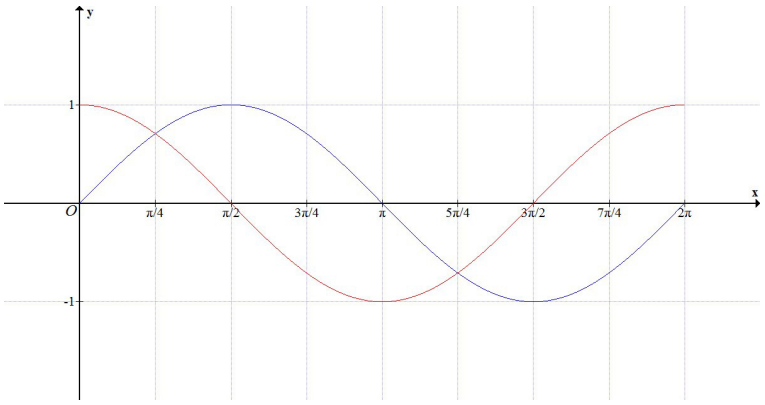
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\cdot \mathrm{d}x=\left(\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\left(\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\ \text{jed. duljine.}$$

16. Odredite $\int_0^{2\cdot\pi}\sqrt{2}\cdot\min\{\sin t,\cos t\}\cdot \mathrm{d}t$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Napomena: $\min\{x,y\}$ jednak je manjem od brojeva x i y.

Rješenje: Skicirajmo funkcije $f_1(t)=\sin t$ i $f_2(t)=\cos t$ na segmentu $[0,2\cdot\pi]$. Dobivamo sliku 5.



Slika 5.

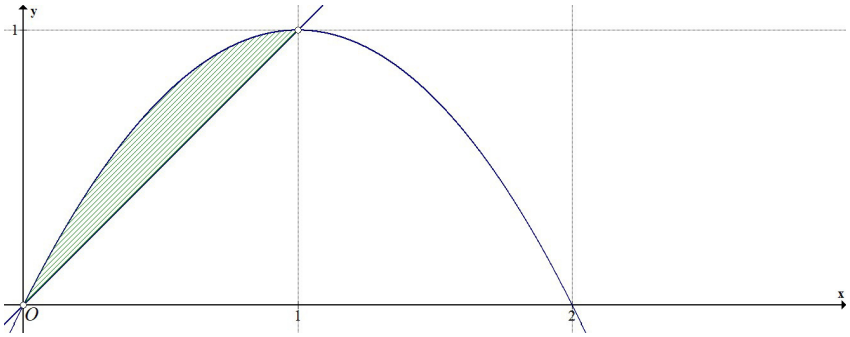
Tako zaključujemo da je traženi integral jednak:

$$I=\sqrt{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cdot \mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi}\cos t\cdot \mathrm{d}t+\int_{\frac{5}{4}\cdot\pi}^{2\cdot\pi}\sin t\cdot \mathrm{d}t\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\left(-\cos t\right)_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(\sin t\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi}+\left(-\cos t\right)_{\frac{5}{4}\cdot\pi}^{2\cdot\pi}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4.$$

17. Ravninski lik omeđen krivuljama $y = x$ i $y = 2 \cdot x - x^2$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte volumen nastaloga rotacijskoga tijela. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 6.



Slika 6.

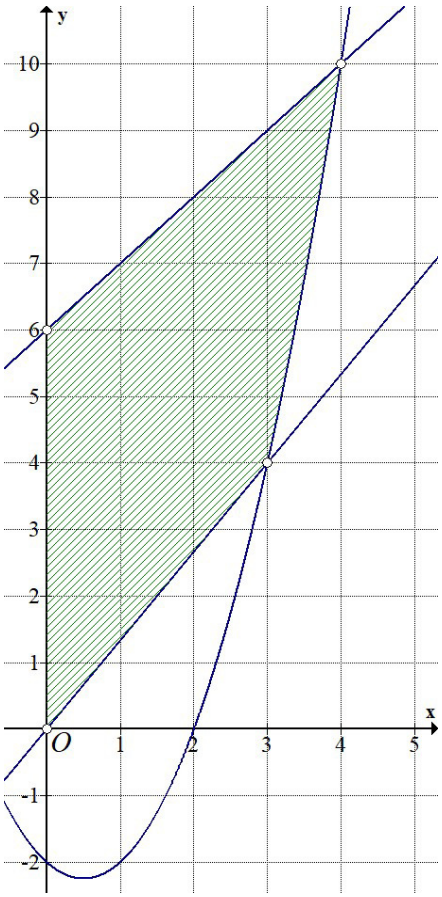
Tako zaključujemo da je traženi volumen jednak:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 x \cdot \left(\left(2 \cdot x - x^2 \right) - x \right) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 x \cdot \left(x - x^2 \right) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 \left(x^2 - x^3 \right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 \right)_0^1 = \frac{\pi}{6} \text{ kub. jed.}$$

18. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = x^2 - x - 2$, $4 \cdot x - 3 \cdot y = 0$, $x - y + 6 = 0$ i $x = 0$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 7.



Slika 7.

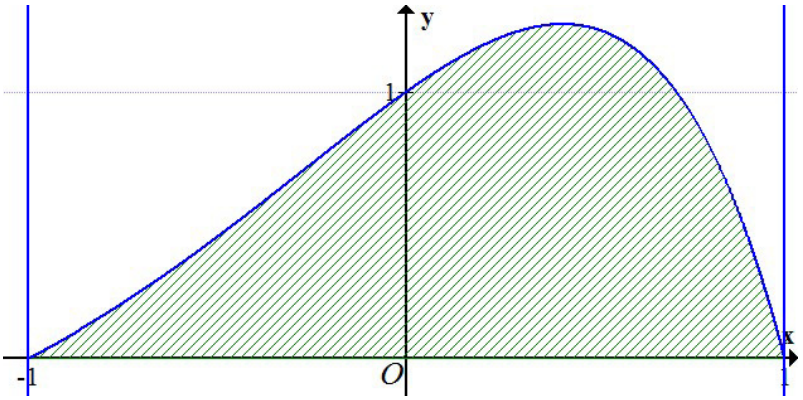
Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{5+6}{2} \cdot 3 + \int_3^4 \left(x + 6 - (x^2 - x - 2) \right) \cdot \mathrm{d}x = \frac{33}{2} + \int_3^4 \left(-x^2 + 2 \cdot x + 8 \right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{33}{2} + \left(-\frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + 8 \cdot x \right) \Big|_3^4 = \frac{33}{2} + \frac{8}{3} = \frac{115}{6} \text{ kv. jed.}$$

19. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\left(1-x^2\right)\cdot e^x$, $x=-1$ i $x=1$.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 8.



Slika 8.

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=1-x^2 & v=\int e^x\cdot \mathrm{d}x=e^x \\ \mathrm{d}u=-2\cdot x\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^x\cdot \mathrm{d}x \end{matrix}\right|=\left(\left(1-x^2\right)\cdot e^x\right)_{-1}^{1}-$$

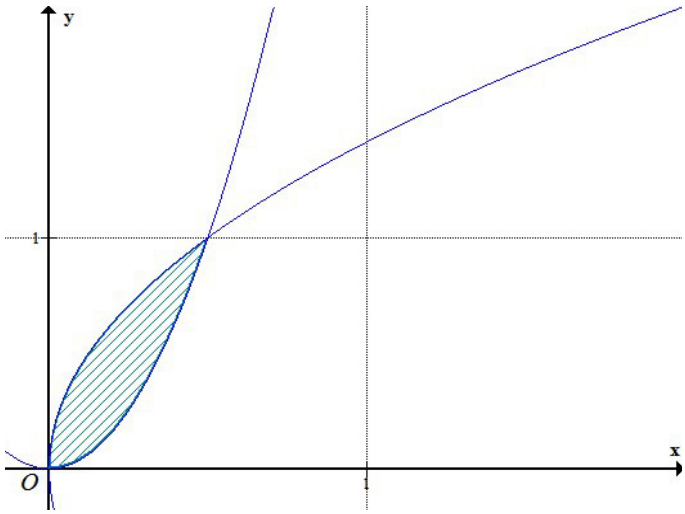
$$-\int_{-1}^{1}(-2)\cdot x\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=(1-1)\cdot e^1-(1-1)\cdot e^{-1}+\int_{-1}^{1}2\cdot x\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=0-0+\int_{-1}^{1}2\cdot x\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=2\cdot x & v=\int e^x\cdot \mathrm{d}x=e^x \\ \mathrm{d}u=2\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^x\cdot \mathrm{d}x \end{matrix}\right|=(2\cdot x\cdot e^x)_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=(2\cdot x\cdot e^x-2\cdot e^x)_{-1}^{1}=$$

$$=2\cdot 1\cdot e^1-2\cdot e^1-(2\cdot(-1)\cdot e^{-1}-2\cdot e^{-1})=2\cdot e-2\cdot e+2\cdot e^{-1}+2\cdot e^{-1}=4\cdot e^{-1}\ \text{kv. jed.}$$

20. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots y^2 = 2 \cdot x$ i $K_2 \ldots y = 4 \cdot x^2$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom!

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 9.



Slika 9.

Odredimo sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} y^2 = 2 \cdot x, \\ y = 4 \cdot x^2. \end{cases}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe sustava u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &\left(4 \cdot x^2\right)^2 = 2 \cdot x, \\ &16 \cdot x^4 = 2 \cdot x \quad ,/:2 \\ &8 \cdot x^4 - x = 0, \\ &x \cdot \left(8 \cdot x^3 - 1\right) = 0, \\ &x \cdot \left((2 \cdot x)^3 - 1^3\right) = 0, \\ &x \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot \left(4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Jednadžba $4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$ nema realnih rješenja jer je njezina diskriminanta $D = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12$ strogo negativna. Zbog toga mora biti $x = 0$ ili $2 \cdot x - 1 = 0$. Rješenje prve jednadžbe je (trivijalno) $x_1 = 0$, a druge $x_2 = \frac{1}{2}$. Uvrštavanjem tih vrijednosti npr. u drugu jednadžbu sustava dobijemo $y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Dakle, sjecišta zadanih krivulja su točke $S_1 = O = (0,0)$ i $S_2 = \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 1-\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot y^2\cdot \mathrm{d}y-\int_0^{\frac{1}{2}} 4\cdot x^2\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 y^2\cdot \mathrm{d}y-4\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot y^3\right)_0^1-$$

$$-4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right)_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\ \text{kv. jed.}$$

21. Riješite Cauchyjevu zadaću: $\begin{cases} F'(x) = 4 \cdot \dfrac{\sin(2 \cdot x)}{e^{\cos(2 \cdot x)}}, \\ F(0) = \dfrac{2}{e}. \end{cases}$

Rješenje: Najprije ćemo odrediti skup *svih* funkcija F takvih da je $F'(x) = 4 \cdot \dfrac{\sin(2 \cdot x)}{e^{\cos(2 \cdot x)}}$. Taj je skup *neodređeni integral* funkcije F. Potom ćemo iz dobivenoga skupa funkcija izdvojiti onu koja za $x = 0$ ima vrijednost $2 \cdot e$.

Imamo redom:

$$I = \int 4 \cdot \frac{\sin(2 \cdot x)}{e^{\cos(2 \cdot x)}} \cdot \mathrm{d}x = \int 4 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot e^{-\cos(2 \cdot x)} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := -\cos(2 \cdot x), \\ \mathrm{d}t = (-\cos(2 \cdot x))' \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \\ 4 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right\} =$$

$$= \int 2 \cdot e^t \cdot \mathrm{d}t = 2 \cdot e^t = 2 \cdot e^{-\cos(2 \cdot x)} + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{e} = 2 \cdot e^{-\cos(2 \cdot 0)} + C \Leftrightarrow \frac{2}{e} = 2 \cdot e^{-1} + C \Leftrightarrow \frac{2}{e} = \frac{2}{e} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$F(x) = 2 \cdot e^{-\cos(2 \cdot x)} = \frac{2}{e^{\cos(2 \cdot x)}}.$$

22. Odredite $\displaystyle\int \frac{8}{t^3 - 4 \cdot t} \cdot \mathrm{d}t.$

Rješenje: Podintegralnu funkciju najprije rastavimo na parcijalne razlomke. Dobivamo:

$$t^3 - 4 \cdot t = t \cdot \left(t^2 - 4\right) = t \cdot (t-2) \cdot (t+2) \Rightarrow$$

$$\frac{8}{t^3 - 4 \cdot t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+2} \Rightarrow$$

$$8 = A \cdot (t-2) \cdot (t+2) + B \cdot t \cdot (t+2) + C \cdot t \cdot (t-2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = -2 \Rightarrow 8 \cdot C = 8 \Leftrightarrow C = 1, \\ t = 0 \Rightarrow -4 \cdot A = 8 \Leftrightarrow A = -2, \Rightarrow (A, B, C) = (-2, 1, 1). \\ t = 2 \Rightarrow 8 \cdot B = 8 \Leftrightarrow B = 1 \end{cases}$$

Zbog toga je:

$$I = \int \left(\frac{-2}{t} + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{t+2} \right) \cdot \mathrm{d}t = (-2) \cdot \int \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t + \int \frac{1}{t-2} \cdot \mathrm{d}t + \int \frac{1}{t+2} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= (-2) \cdot \ln|t| + \ln|t-2| + \ln|t+2| = \ln\left|\frac{(t-2) \cdot (t+2)}{t^2}\right| = \ln\left|\frac{t^2 - 4}{t^2}\right| = \ln\left|1 - \frac{4}{t^2}\right| + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

23. Odredite $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8\cdot x - x^2}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(x^2 - 8\cdot x\right)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(\left(\sqrt{1}\cdot x - \frac{8}{2\cdot\sqrt{1}}\right)^2 - \left(\frac{8}{2\cdot\sqrt{1}}\right)^2\right)}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left((x-4)^2 - 4^2\right)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4^2 - (x-4)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-4}{4}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

24. Riješite Cauchyjevu zadaću: $\begin{cases} F'(t) = 16\cdot t^3 \cdot \ln t, \\ F(1) = -1. \end{cases}$

Rješenje: Postupimo analogno kao u zadatku 21. Imamo redom:

$$I = \int 16\cdot t^3 \cdot \ln t \cdot \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u = \ln t & v = \int 16\cdot t^3 \cdot \mathrm{d}t = 16\cdot \frac{1}{3+1}\cdot t^{3+1} = 4\cdot t^4 \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = 16\cdot t^3 \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= 4\cdot t^4 \cdot \ln t - \int 4\cdot t^4 \cdot \frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t = 4\cdot t^4 \cdot \ln t - \int 4\cdot t^3 \cdot \mathrm{d}t = 4\cdot t^4 \cdot \ln t - 4\cdot \frac{1}{3+1}\cdot t^{3+1} =$$

$$= 4\cdot t^4 \cdot \ln t - t^4 = t^4 \cdot (4\cdot \ln t - 1) + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$-1 = 1^4 \cdot (4\cdot \ln 1 - 1) + C \Leftrightarrow -1 = 1\cdot(0-1) + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$F(t) = t^4 \cdot (4\cdot \ln t - 1).$$

25. Odredite $\int 15\cdot \mathrm{sh}^5 x \cdot \mathrm{d}x$.

Rješenje: Koristeći osnovni hiperbolni identitet imamo redom:

$$I = \int 15\cdot \mathrm{sh}^4 x \cdot \mathrm{sh} x \cdot \mathrm{d}x = \int 15\cdot \left(\mathrm{sh}^2 x\right)^2 \cdot \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{d}x = \int 15\cdot \left(\mathrm{ch}^2 x - 1\right)^2 \cdot \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := \mathrm{ch}\, x, \\ \mathrm{d}t = (\mathrm{ch}\, x)' \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = 15\cdot \int \left(t^2 - 1\right)^2 \cdot \mathrm{d}t = 15\cdot \int \left(t^4 - 2\cdot t^2 + 1\right)\cdot \mathrm{d}t =$$

$$= 15\cdot \left(\frac{1}{4+1}\cdot t^{4+1} - 2\cdot \frac{1}{2+1}\cdot t^{2+1} + t\right) = 3\cdot t^5 - 10\cdot t^3 + 15\cdot t =$$

$$= 3\cdot \mathrm{ch}^5 x - 10\cdot \mathrm{ch}^3 x + 15\cdot \mathrm{ch}\, x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

26. Odredite prosječnu vrijednost funkcije $f(x)=2\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(4\cdot x)$ na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Rješenje: Tražena je vrijednost jednaka:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(4\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\cos(4\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x & v=\int\cos(4\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\sin(4\cdot x) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & dv=\cos(4\cdot x)\cdot\mathrm{d}x \end{array}\right|=$$

$$=8\cdot\left(\left(\frac{1}{4}\cdot x\cdot\sin(4\cdot x)\right)_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(4\cdot x)\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=8\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{4}\cdot\underbrace{\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}_{=\sin\pi=0}-0\cdot\sin(4\cdot 0)\right)-\left(\frac{-1}{4}\cdot\cos(4\cdot x)\right)_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\cos(4\cdot x)\right)_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\underbrace{\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}_{=\cos\pi=-1}-\underbrace{\cos(4\cdot 0)}_{=\cos 0=1}\right)=\frac{1}{2}\cdot(-1-1)=-1.$$

27. Zadana je krivulja $y = x^2 - x - 6$. Neka su A i B redom sjecište te krivulje s negativnim dijelom osi apscisa, odnosno sjecište te krivulje s osi ordinata. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu luka $\widehat{AB}$.

Rješenje: Rješenja jednadžbe $x^2 - x - 6 = 0$ su $x_1 = -2,\ x_2 = 3$. Zbog toga je tražena duljina jednaka:

$$\left|\widehat{AB}\right| = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + \left(\left(x^2 - x - 6\right)'\right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + (2 \cdot x - 1)^2} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := 2 \cdot x - 1, \\ \mathrm{d}t = 2 \cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t, \\ -2 \mapsto 2 \cdot (-2) - 1 = -5, \\ 0 \mapsto 2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-5}^{-1} \sqrt{1 + t^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int_{-5}^{-1} \sqrt{1 + t^2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) \right)_{-5}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{1 + (-1)^2} + \ln\left(-1 + \sqrt{1 + (-1)^2}\right) - \left((-5) \cdot \sqrt{1 + (-5)^2} + \ln\left(-5 + \sqrt{1 + (-5)^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 5 \cdot \sqrt{26} - \ln\left(\sqrt{26} - 5\right)\right) \approx 6.37799 \text{ jed. duljine.}$$

28. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{4}{\pi}\cdot e^{2\cdot x}$, $x=\ln 2$ i objema koordinatnim osima oko osi:

a) apscisa;

b) ordinata.

Rješenje: a) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina (integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y). Mi ćemo odabrati integriranje po varijabli x. Imamo redom:

$$V_1=\pi\cdot\int_0^{\ln 2}\left(\frac{4}{\pi}\cdot e^{2\cdot x}\right)^2\cdot \mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\ln 2}\frac{16}{\pi^2}\cdot e^{4\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{16}{\pi^2}\cdot\int_0^{\ln 2}e^{4\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\frac{16}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot e^{4\cdot x}\right)_0^{\ln 2}=$$

$$=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(e^{4\cdot\ln 2}-e^{4\cdot 0}\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\left(e^{\ln\left(2^4\right)}-e^0\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\left(2^4-0\right)=\frac{64}{\pi}\ \text{kub. jed.}$$

b) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina (integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y). Mi ćemo odabrati integriranje po varijabli x. Imamo redom:

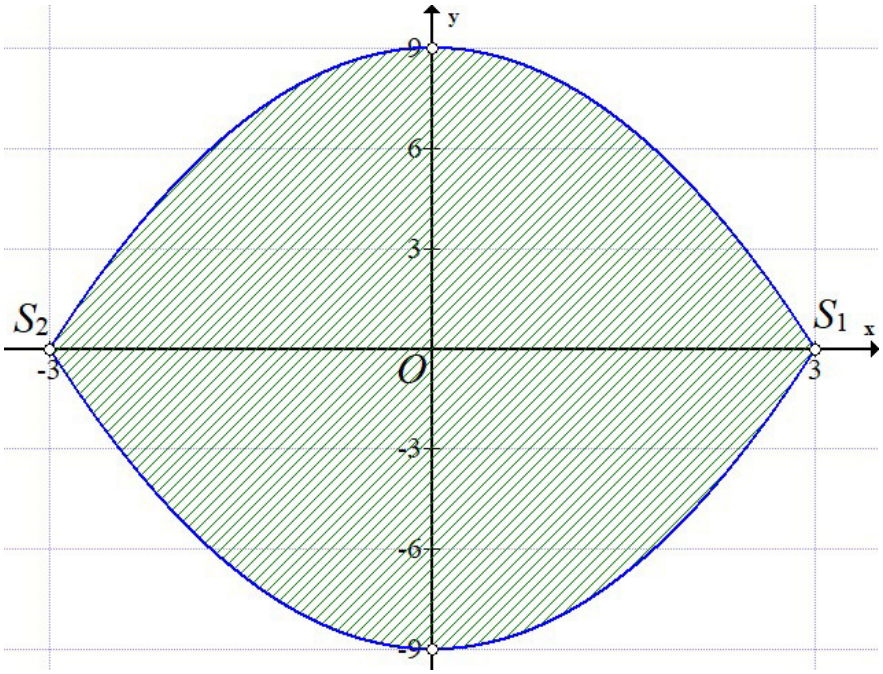
$$V_2=2\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2}\frac{4}{\pi}\cdot x\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\ln 2}x\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=x & v=\int e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\end{array}\right|=$$

$$=8\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2\cdot x}\right)_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right)=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left((\ln 2)\cdot e^{2\cdot\ln 2}-0\cdot e^{2\cdot 0}-\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\right)_0^{\ln 2}\right)=$$

$$=4\cdot\left((\ln 2)\cdot\underbrace{e^{\ln\left(2^2\right)}}_{=2^2=4}-0-\frac{1}{2}\cdot\left(e^{2\cdot\ln 2}-e^{2\cdot 0}\right)\right)=4\cdot\left(4\cdot\ln 2-0-\frac{1}{2}\cdot(4-1)\right)=16\cdot\ln 2-6\ \text{kub. jed.}$$

29. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = x^2 - 9$ i $y = 9 - x^2$.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 10.



Slika 10.

Iz sustava $\begin{cases} y = x^2 - 9, \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$ izjednačavanjem desnih strana jednadžbi dobivamo:

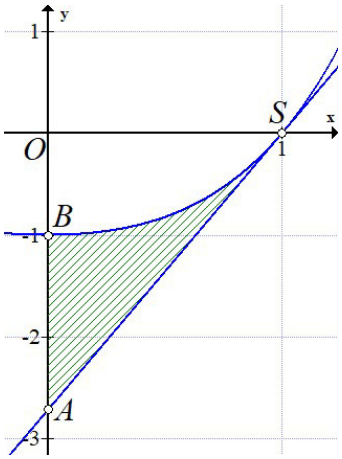
$$x^2 - 9 = 9 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3.$$

Dobiveni ravninski lik je očito osno simetričan s obzirom na obje koordinatne osi, pa je zbog toga tražena površina jednaka:

$$P = 4 \cdot \int_0^3 \left(9 - x^2\right) \cdot \mathrm{d}x = 4 \cdot \left(\left(9 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right)_0^3 \right) = 4 \cdot \left(27 - \frac{1}{3} \cdot 27 - 0 + 0 \right) = 4 \cdot 18 = 72 \text{ kv. jed.}$$

30. U sjecištu krivulje $K \ldots y=(x-1)\cdot e^x$ s osi apscisa povučena je tangenta t na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju K, t i os **ordinata**.

Rješenje: Skicirajmo krivulju K i njezinu tangentu povučenu u sjecištu krivulje K s osi apscisa. Dobivamo sliku 11.



Slika 11.

Budući da je $e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, apscisu sjecišta krivulje K s osi apscisa dobivamo iz jednadžbe $x-1=0$. Odatle je $x=1$. Dakle, $S=(1,0)$.

Napišimo eksplicitnu jednadžbu tangente t na krivulju K u točki S. Koristeći pravilo za deriviranje umnoška dviju funkcija imamo redom:

$$y-0=\left(\left((x-1)\cdot e^x\right)'\right)_{x=1}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=\left(1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x\right)_{x=1}\cdot(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\left(x\cdot e^x\right)_{x=1}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=1\cdot e^1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=e\cdot x-e.$$

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\int_0^1\left((x-1)\cdot e^x-(e\cdot x-e)\right)\cdot\mathrm{d}x=e\cdot\int_0^1\left((x-1)\cdot e^{x-1}-(x-1)\right)\cdot\mathrm{d}x=$$
$$=e\cdot\int_0^1\left((x-1)\cdot\left(e^{x-1}-1\right)\right)\cdot\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=x-1 & v=\int\left(e^{x-1}-1\right)\cdot\mathrm{d}x=e^{x-1}-x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\left(e^{x-1}-1\right)\cdot\mathrm{d}x\end{vmatrix}=$$
$$=e\cdot\left(\left((x-1)\cdot\left(e^{x-1}-x\right)\right)_0^1-\int_0^1\left(e^{x-1}-x\right)\cdot\mathrm{d}x\right)=$$
$$=e\cdot\left(0-(-1)\cdot\left(e^{0-1}-0\right)-\left(e^{x-1}-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)_0^1\right)=e\cdot\left(e^{-1}-\left(1-\frac{1}{2}-e^{-1}+0\right)\right)=$$
$$=2-\frac{1}{2}\cdot e\ \text{kv. jed.}$$