TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**Zadaci za demonstrature** grupe **E i F** **19.1.2018.**

1. Izračunajte granične vrijednosti nizova:

a) $a_n = \dfrac{11 \cdot \left[(2 \cdot n - 1)^2 - (n+1) \cdot (3 \cdot n - 2)\right]}{(3 \cdot n - 2)^2 + (n+1) \cdot (2 \cdot n - 1)}$;

b) $b_n = 14 \cdot n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{7 \cdot n}\right)$.

2. Odredite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da realna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} w - w}{2 \cdot (w - \sin w)}, \text{ za } w < 0, \\ \alpha \cdot w + \beta, \text{ za } w \in [0, 2], \\ \dfrac{\ln(w-1)}{2 - w}, \text{ za } w > 2 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

3. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije $q : [-6, 2] \to \mathbb{R}$ definirane pravilom $q(\varepsilon) = \varepsilon^3 - 75 \cdot \varepsilon$.

4. U točki krivulje $K \ldots \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 \cdot (t - \cos t) \end{cases}$ određenoj parametrom $t = 0$ povučene su tangenta i normala na krivulju *K*. Izračunajte površinu lika kojega ti pravci zatvaraju s osi apscisa.

5. Izračunajte površinu lika kojega s objema koordinatnim osima zatvaraju tangenta i normala povučene na krivulju $K \ldots\ y = -x^3 - x^2 + x$ u točki $T = (-1,\ y_T)$.

6. Ispitajte tijek i nacrtajte graf funkcije *f* definirane pravilom $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**Zadaci za demonstrature** grupe **E i F** **19.1.2018.**

REZULTATI ZADATAKA

1. **a)** 1;

b) 2.

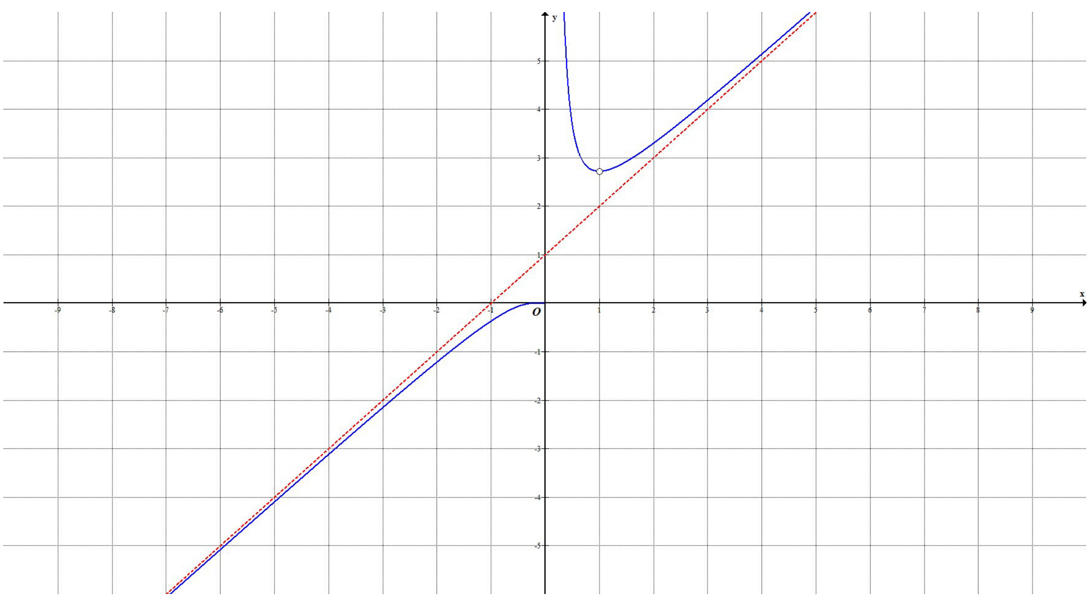
2. $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$

3. Najmanja vrijednost funkcije q jednaka je –142. Najveća vrijednost funkcije q jednaka je 250.

4. $P = 4$ kv. jed.

5. $P = 1$ kv. jed.

6. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ne siječe nijednu koordinatnu os, neprekidna na D_f, nije ni parna, ni neparna, ni periodična, intervali rasta: $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, interval pada: $\langle 0, 1 \rangle$, točka lokalnoga minimuma: $T = (1, e)$, interval konveksnosti: $\langle 0, +\infty \rangle$, interval konkavnosti: $\langle -\infty, 0 \rangle$, asimptote: $x = 0$ i $y = x + 1$. Graf funkcije f prikazan je na slici 1. (Crveni crtkani pravac je kosa asimptota.)



Slika 1.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1.

a) $$L_1=\lim_n a_n=\lim_n\left\{\frac{11\cdot\left[(2\cdot n-1)^2-(n+1)\cdot(3\cdot n-2)\right]}{(3\cdot n-2)^2+(n+1)\cdot(2\cdot n-1)}\right\}=\lim_n\left[\frac{11\cdot(4\cdot n^2-4\cdot n+1-3\cdot n^2-3\cdot n+2\cdot n+2)}{9\cdot n^2-12\cdot n+4+2\cdot n^2+2\cdot n-n-1}\right]=$$

$$=\lim_n\left[\frac{11\cdot(n^2-5\cdot n+3)}{11\cdot n^2-11\cdot n+3}\right]=\lim_n\left(\frac{11\cdot n^2-55\cdot n+33}{11\cdot n^2-11\cdot n+3}\right)=\lim_n\left(\frac{11-\frac{55}{n}+\frac{33}{n^2}}{11-\frac{11}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)=\frac{11-0+0}{11-0+0}=\frac{11}{11}=1.$$

b) $$L_2=\lim_n b_n=\lim_n\left[14\cdot n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{7\cdot n}\right)\right]=\lim_n\left\{14\cdot\ln\left[\left(1+\frac{1}{7\cdot n}\right)^n\right]\right\}=14\cdot\ln\left\{\lim_n\left[\left(1+\frac{\frac{1}{7}}{n}\right)^n\right]\right\}=14\cdot\ln\left(e^{\frac{1}{7}}\right)=14\cdot\frac{1}{7}=2.$$

2. „Kritične“ točke su $w=0$ i $w=2$. Za $w=0$ imamo:

$$L_1=\lim_{w\to0-}g(w)=\lim_{w\to0-}\frac{\operatorname{tg}w-w}{2\cdot(w-\sin w)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0-}\frac{\left(\operatorname{tg}w-w\right)'}{\left[2\cdot(w-\sin w)\right]'}=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{1}{\cos^2 w}-1}{2\cdot\left(1-\cos w\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{1-\cos^2 w}{\cos^2 w}}{2\cdot\left(1-\cos w\right)}=\lim_{x\to0-}\frac{(1-\cos w)\cdot(1+\cos w)}{2\cdot\left(1-\cos w\right)\cdot\cos^2 w}=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos w}{2\cdot\cos^2 w}=\frac{1+1}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1,$$

$$L_2=\lim_{w\to0+}g(w)=\lim_{w\to0+}(\alpha\cdot w+\beta)=\alpha\cdot0+\beta=\beta,$$

$$g(0)=\alpha\cdot0+\beta=\beta,$$

pa izjednačavanjem odmah slijedi $\beta=1$.

Za $w=2$ imamo:

$$L_1=\lim_{w\to2-}g(w)=\lim_{w\to2-}(\alpha\cdot w+\beta)=2\cdot\alpha+\beta,$$

$$L_2=\lim_{x\to2+}g(w)=\lim_{w\to2+}\frac{\ln(w-1)}{2-w}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{w\to2+}\frac{\left[\ln(w-1)\right]'}{(2-w)'}=\lim_{w\to2+}\frac{\frac{1}{w-1}\cdot(w-1)'}{0-1}=$$

$$=\lim_{w\to2+}\frac{\frac{1}{w-1}\cdot1}{-1}=\lim_{w\to2+}\frac{1}{1-w}=\frac{1}{1-2}=-1,$$

$$g(2)=\alpha\cdot2+\beta=2\cdot\alpha+\beta.$$

pa izjednačavanjem desnih strana dobijemo $2\cdot\alpha+\beta=-1.$ Tako smo dobili sustav:

$$\begin{cases}\beta=1,\\ 2\cdot\alpha+\beta=-1\end{cases}$$

čije rješenje je $\left(\alpha,\beta\right)=(-1,1)$.

3. Uočimo da je $D(q) = [-6, 2]$. Odredimo stacionarne točke funkcije q. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&q'(\varepsilon) = 0 \\
&3 \cdot \varepsilon^2 - 75 = 0, \\
&\varepsilon^2 = 25.
\end{aligned}
$$

Jedino rješenje ove jednadžbe koje pripada skupu $[-2, 6]$ je $\varepsilon = -5.$ Preostaje izračunati:

$$
\begin{aligned}
&q(-6) = (-6)^3 - 75 \cdot (-6) = 234, \\
&q(-5) = (-5)^3 - 75 \cdot (-5) = 250, \\
&q(2) = 2^3 - 75 \cdot 2 = -142.
\end{aligned}
$$

Dakle, najmanja vrijednost funkcije q iznosi –142 i postiže se za $\varepsilon = 2.$ Najveća vrijednost funkcije q iznosi 250 i postiže se za $\varepsilon = -5.$

4. Izračunajmo koordinate točke krivulje K koja odgovara parametru $t = 0$. Imamo:

$$
\begin{cases}
x = 0 + \sin 0 = 0 + 0 = 0, \\
y = 2 \cdot (0 - \cos 0) = 2 \cdot (0 - 1) = -2,
\end{cases}
$$

pa je $T = (0, -2).$ Koeficijent smjera tangente povučene na krivulju K u točki T jednak je:

$$
k_t = \left(\frac{y'}{x'} \right)_{t=0} = \left[\frac{2 \cdot (t - \cos t)'}{(t + \sin t)'} \right]_{t=0} = \left[\frac{2 \cdot (1 - (-\sin t))}{1 + \cos t} \right]_{t=0} = \left[\frac{2 \cdot (1 + \sin t)}{1 + \cos t} \right]_{t=0} = \frac{2 \cdot (1 + \sin 0)}{1 + \cos 0} =
$$

$$
= \frac{2 \cdot (1 + 0)}{1 + 1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.
$$

Stoga je jednadžba te tangente zapisana u segmentnom obliku:

$$
\begin{aligned}
&y = 1 \cdot (x - 0) - 2, \\
&y = x - 2, \\
&-x + y = -2, \quad / : (-2) \\
&t \ldots \ \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1
\end{aligned}
$$

Koeficijent smjera normale povučene na krivulju K u točki T jednak je

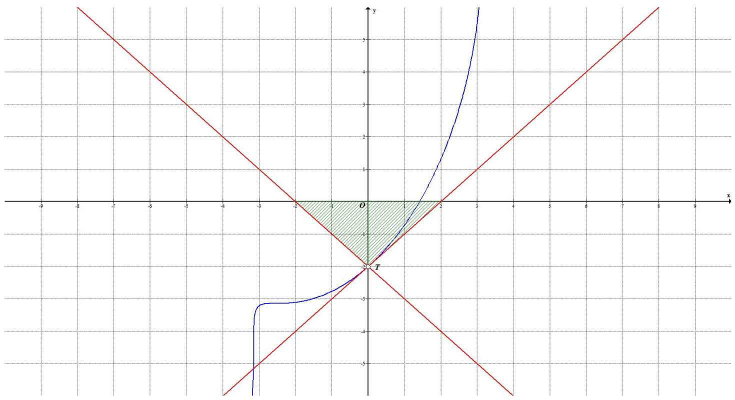
$$
k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{1} = -1,
$$

pa jednadžba te normale zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$
\begin{aligned}
&y = (-1) \cdot (x - 0) - 2, \\
&y = -x - 2, \\
&x + y = -2, \quad / : (-2) \\
&n \ldots \ \frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1
\end{aligned}
$$

Nacrtajmo oba pravca u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 2. Iz slike vidimo da oba pravca s osi apscisa zatvaraju trokut čiji su vrhovi točka *T*, točka (–2, 0) i točka (2, 0). Duljina jedne osnovice toga trokuta jednaka je udaljenosti između točaka (–2, 0) i (2, 0). Ta udaljenost iznosi 4 jed. Duljina visine povučene na tu osnovicu jednaka je udaljenosti ishodišta i točke *T*. Ta udaljenost iznosi 2 jed. Stoga je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ kv. jed.}$$



Slika 2.

5. Nepoznatu ordinatu točke *T* dobivamo tako da u jednadžbu krivulje *K* uvrstimo $x = -1$. Lako izračunamo $T = (-1, -1)$. Koeficijent smjera tangente *t* povučene na krivulju *K* u točki *T* jednak je:

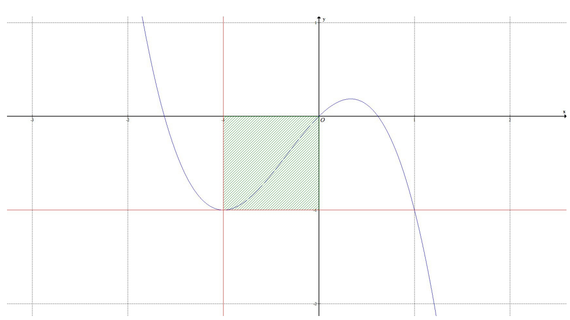
$$k_t = \left[\left(-x^3 - x^2 + x\right)'\right]_{x=-1} = \left[-3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1\right]_{x=-1} = -3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Stoga su jednadžbe tangente *t*, odnosno normale *n*, povučenih na krivulju *K* u točki *T*:

$$t \ldots\ y = -1 \quad n \ldots\ x = -1$$

Nacrtajmo pravce *t* i *n* u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 3. Iz slike vidimo da pravci *t* i *n* zajedno s objema koordinatnim osima zatvaraju kvadrat čiji su vrhovi (–1, 0), *O*, (0, 1) i *T*. Duljina stranice toga kvadrata iznosi $a = 1$. Stoga je tražena površina jednaka

$$P = a^2 = 1 \text{ kv. jed.}$$



Slika 3.

6. Prirodna domena: Iz uvjeta $x \neq 0$ slijedi $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nultočke i sjecište s osi ordinata: Iz jednadžbe $f(x) = 0$ slijedi $x = 0$ jer je $e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x \in D(f)$. No, $0 \notin D(f)$, pa zaključujemo da graf funkcije *f* ne siječe nijednu koordinatnu os.

Točke prekida, parnost, neparnost, periodičnost: Funkcija *f* je umnožak polinoma 1. stupnja $\left(p_1(x) = x\right)$ i kompozicije eksponencijalne funkcije $e(x) = e^x$ i racionalne funkcije $f_1(x) = \frac{1}{x}$. Sve te funkcije su neprekidne na $D(f)$. Stoga je i zadana funkcija neprekidna na $D(f)$.

Također, $f(-x) = (-x) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \pm f(x)$, pa *f* nije ni parna, ni neparna. Budući da je *f* umnožak funkcija od kojih nijedna nije periodična, ni *f* nije periodična funkcija.

Intervali monotonosti i lokalni ekstremi: Odredimo f'. Imamo:

$$f'(x) = (x)' \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Zbog $e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x \in D(f)$, mora vrijediti $1 - \frac{1}{x} = 0$, odnosno $x - 1 = 0$. Odatle je $x = 1$. Dakle, stacionarna točka je $x = 1$. Izborom $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ i $x = 2$ zaključujemo da je $f'(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ i za $x \in \langle 1, +\infty \rangle$, a da je $f'(x) < 0$ za $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Dakle, intervali rasta su $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, a interval pada je $\langle 0, 1 \rangle$. Točka $T = (1, f(1)) = (1, e)$ je točka strogoga lokalnoga minimuma funkcije *f*.

Intervali konkavnosti i konveksnosti, prijevojne točke: Odredimo f''. Imamo:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' \cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Zbog $e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x \in D(f)$, jednadžba $f''(x) = 0$ nema realnih rješenja. Dakle, graf funkcije *f* nema nijednu prijevojnu točku. Izborom $x = -1$ i $x = 1$ zaključujemo da je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, +\infty \rangle$, a da je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$. Dakle, funkcija *f* je konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$.

Asimptote: Najprije provjerimo je li pravac $x = 0$, tj. os ordinata, asimptota na graf funkcije *f*. Računamo granične vrijednosti:

$$L_1=\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\begin{Bmatrix}\text{zamjena:}\\ t=\frac{1}{x},\\ \text{kad } x\to 0-, \text{ onda } t\to -\infty\end{Bmatrix}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t}=\left\{\frac{0}{-\infty}\right\}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{1}=\frac{0}{1}=0,$$

$$L_2=\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\begin{Bmatrix}\text{zamjena:}\\ t=\frac{1}{x},\\ \text{kad } x\to 0+, \text{ onda } t\to +\infty\end{Bmatrix}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty.$$

Odatle slijedi da je pravac $x=0$ uspravna asimptota na graf funkcije *f*.

Ispitajmo ima li graf funkcije *f* kose asimptote. Računamo granične vrijednosti:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1,$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=\begin{Bmatrix}\text{zamjena:}\\ t=\frac{1}{x},\\ \text{kad } x\to \pm\infty, \text{ onda } t\to 0\end{Bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$

Dakle, obostrana kosa asimptota je pravac $y=x+1$.

<u>Graf</u>: Na temelju prethodnih podataka crtamo graf funkcije *f*. Dobivamo sliku 1.