TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**Zadaci za 3. demonstrature** grupe **E i F** **3.11.2017.**

1. Zadani su vektori $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{i}-\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$. Odredite vrijednost $\alpha\in\mathbb{R}$ tako da površina paralelograma razapetoga zadanim vektorima bude jednaka $3\cdot\sqrt{3}$ kv. jed.

2. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}$ i $\vec{b}=\vec{j}-\vec{i}$. Izračunajte volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{b}+\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{a}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

3. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$ i $\vec{b}=\vec{k}-\vec{j}$. S točnošću od 10^{-5} izračunajte oplošje paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{a}+2\cdot\vec{b}$, $2\cdot\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

4. Zadani su vektori $\vec{a}=(1,0,-1)$ i $\vec{b}=(x,1,0)$. Odredite $x>0$ tako da volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ bude jednak 6 kub. jed.

5. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$. Izračunajte volumen prizme razapete vektorima $\vec{a}\times\vec{b}$, $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$ i $\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

6. Zadani su vektori $\vec{a}=(-1,2,1)$ i $\vec{b}=(3,2,-1)$. Odredite vektor $\vec{c}$ tako da vrijede jednakosti: $\vec{a}\cdot\vec{c}=4$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$.

7. Zadani su vektori $\vec{a}=(-1,1,0)$ i $\vec{b}=(0,0,1)$. Odredite sve jedinične vektore $\vec{c}$ koji su okomiti na zadane vektore.

8. Zadani su vektori $\vec{a}=(1,1,4)$, $\vec{b}=(-1,\alpha,0)$ i $\vec{c}=(-3,3,-4)$. Odredite $\alpha\in\mathbb{R}$ tako da zadani vektori pripadaju istoj ravnini.

9. Vrhovi trokuta su $A=(0,1,4)$, $B=(-3,4,1)$ i $C=(2,3,6)$. Odredite točku D na osi aplikata tako da volumen tetraedra $ABCD$ bude jednak 2 kub. jed.

10. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut čija je mjera $\frac{\pi}{6}$ radijana. Izračunajte površinu trokuta određenoga vektorima $\vec{a}=\vec{m}+5\cdot\vec{n}$ i $\vec{b}=7\cdot\vec{m}-\vec{n}$.

REZULTATI ZADATAKA

1. $\alpha \in \{-5, 5\}$.

2. $V = 2$ kub. jed.

3. $O = 2 \cdot \left(5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{42} + 3 \cdot \sqrt{2}\right) \approx 38.76727$ kv. jed.

4. $x = 2$.

5. $V = 1$ kub. jed.

6. $\vec{c} = (0, 1, 2)$.

7. $\vec{c_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1, 1, 0)$, $\vec{c_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1, 1, 0)$.

8. $\alpha = 2$.

9. $D_1 = (0, 0, 3)$, $D_2 = (0, 0, 5)$.

10. $P = 9$ kv. jed.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Površina paralelograma kojega razapinju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je duljini njihova vektorskoga umnoška. Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\vec{a} = (\alpha, 0, -1),\ \vec{b} = (1,1,0).$$

Stoga imamo redom:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{razvoj po 2. retku}) = (-\alpha)\cdot\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\alpha)\cdot\left(\vec{j}\cdot 0 - 1\cdot\vec{k}\right) + \left(\vec{i}\cdot 1 - 1\cdot\vec{j}\right) = \alpha\cdot\vec{k} + \vec{i} - \vec{j} = (1,-1,\alpha) \Rightarrow$$

$$P = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{1+1+\alpha^2} = \sqrt{2+\alpha^2}.$$

Prema zahtjevu zadatka, vrijednost te površine mora biti jednaka $3\cdot\sqrt{3}$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\sqrt{2+\alpha^2} = 3\cdot\sqrt{3}.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\sqrt{2+\alpha^2} = 3\cdot\sqrt{3} \quad /^2$$
$$2+\alpha^2 = 9\cdot 3,$$
$$\alpha^2 = 25.$$

Odatle je $\alpha \in \{-5, 5\}$.

2. Volumen paralelepipeda jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitoga umnoška vektora koji razapinju taj paralelepiped. Zapišimo zadane vektore kao uređene trojke:

$$\vec{a} = \vec{i} = (1,0,0),\ \vec{b} = \vec{j} - \vec{i} = (-1,1,0).$$

Tako redom računamo:

$$\vec{b}+\vec{a} = (-1,1,0) + (1,0,0) = (-1+1, 1+0, 0+0) = (0,1,0),$$

$$\vec{b}-\vec{a} = (-1,1,0) - (1,0,0) = (-1-1, 1-0, 0-0) = (-2,1,0),$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{razvoj po 2. retku}) = (-1)\cdot\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\left(\vec{j}\cdot 0 - 1\cdot\vec{k}\right) = \vec{k} = (0,0,1),$$

$$V = \left|M\left(\vec{b}+\vec{a},\ \vec{b}-\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = (\text{razvoj po 3. retku}) = \left|1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|1\cdot\left[0\cdot 1 - (-2)\cdot 1\right]\right| = |1\cdot 2| = 2 \text{ kub. jed.}$$

3. Izračunajmo najprije vektore koji razapinju paralelepiped. Primijetimo da vrijede jednakosti

$$\vec{a} = (1,-1,0) \text{ i } \vec{b} = (0,-1,1).$$

Stoga je:

$$\vec{c} := \vec{a} + 2\cdot\vec{b} = (1,-1,0) + 2\cdot(0,-1,1) = (1,-1,0) + (0,-2,2) = (1,-3,2),$$
$$\vec{d} := 2\cdot\vec{a} - \vec{b} = 2\cdot(1,-1,0) - (0,-1,1) = (2,-2,0) - (0,-1,1) = (2,-1,-1),$$
$$\vec{e} := \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (-1,-1,-1).$$

Traženo oplošje jednako je zbroju površina točno šest paralelograma. Oni tvore tri para međusobno sukladnih paralelograma. Paralelograme koji tvore prvi par razapinju vektori $\vec{c}$ i $\vec{d}$. Paralelograme koji tvore drugi par razapinju vektori $\vec{c}$ i $\vec{e}$, a paralelograme koji tvore treći par razapinju vektori $\vec{d}$ i $\vec{e}$.

Površina svakoga od dvaju paralelograma koji tvore prvi par jednaka je $\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$. Površina svakoga od dvaju paralelograma koji tvore drugi par jednaka je $\left|\vec{c}\times\vec{e}\right|$, a površina svakoga od dvaju paralelograma koji tvore treći par jednaka je $\left|\vec{d}\times\vec{e}\right|$. Tako redom imamo:

$$\vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot\vec{i} + 5\cdot\vec{j} + 5\cdot\vec{k} = (5,5,5),$$
$$\left|\vec{c}\times\vec{d}\right| = \sqrt{5^2+5^2+5^2} = \sqrt{3\cdot 5^2} = 5\cdot\sqrt{3},$$
$$\vec{c}\times\vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot\vec{i} - \vec{j} - 4\cdot\vec{k} = (5,-1,-4),$$
$$\left|\vec{c}\times\vec{e}\right| = \sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2} = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42},$$
$$\vec{d}\times\vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j} - 3\cdot\vec{k} = (0,3,-3),$$
$$\left|\vec{d}\times\vec{e}\right| = \sqrt{0^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\cdot\sqrt{2}.$$

Konačno je:

$$O = 2\cdot\left(\left|\vec{c}\times\vec{d}\right| + \left|\vec{c}\times\vec{e}\right| + \left|\vec{d}\times\vec{e}\right|\right) = 2\cdot\left(5\cdot\sqrt{3} + \sqrt{42} + 3\cdot\sqrt{2}\right) \approx 38.76727 \text{ kub. jed.}$$

4. Odredimo najprije vektor $\vec{a}\times\vec{b}$. Imamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ x & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-x\cdot\vec{j}+\vec{k}=(1,-x,1).$$

Mješoviti umnožak vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ jednak je:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ x & 1 & 0\\ 1 & -x & 1\end{vmatrix}=-x\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -x & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=x^2+2.$$

Primijetimo da je $x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, što znači da je volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ jednak mješovitom umnošku tih vektora, tj. x^2+2 kub. jed. Stoga preostaje odrediti strogo pozitivno rješenje jednadžbe $x^2+2=6$. Lako se dobije $x=2$.

5. Zapišimo zadane vektore u koordinatnom obliku: $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$. Računamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(1,-1,1),$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\left[(1,0,-1)\cdot(0,1,1)\right]\cdot(1,0,-1)=\left[1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 1\right]\cdot(1,0,1)=(-1)\cdot(1,0,-1)=(-1,0,1),$$

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(0,1,1)=(0,-1,-1).$$

Volumen prizme razapete izračunanim vektorima jednak je

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}\cdot\left|-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{3}\cdot\left|2-(-1)\right|=1\text{ kub. jed.}$$

6. Neka je $c=(c_1,c_2,c_3)$. Tada je:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=(-1,2,1)\cdot(c_1,c_2,c_3)=-c_1+2\cdot c_2+c_3,$$

pa iz prvoga uvjeta dobivamo jednadžbu:

$$-c_1+2\cdot c_2+c_3=4.$$

Nadalje,

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}=(2\cdot c_3-c_2,\ c_3+c_1,-c_2-2\cdot c_1),$$

pa iz drugoga uvjeta dobivamo sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$(2\cdot c_3 - c_2,\ c_3 + c_1, -c_2 - 2\cdot c_1) = (3, 2, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot c_3 - c_2 = 3, \\ c_3 + c_1 = 2, \\ -c_2 - 2\cdot c_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c_2 + 2\cdot c_3 = 3, \\ c_1 + c_3 = 2, \\ 2\cdot c_1 + c_2 = 1. \end{cases}$$

Dobivene jednadžbe nisu međusobno nezavisne jer se lako vidi da je druga jednadžba jednaka poluzbroju prve i treće jednadžbe. Stoga odbacujemo npr. prvu jednadžbu gornjega sustava i umjesto nje uvrštavamo jednakost $-c_1 + 2\cdot c_2 + c_3 = 4.$ Tako dobivamo sustav:

$$\begin{cases} -c_1 + 2\cdot c_2 + c_3 = 4, \\ c_1 + c_3 = 2, \\ 2\cdot c_1 + c_2 = 1. \end{cases}$$

Taj se sustav najbrže riješi tako da se zbroje prva i treća jednadžba, pa se od toga zbroja oduzme druga jednadžba. Tako se dobiva $3\cdot c_2 = 3$, a odatle je $c_2 = 1$. Iz treće jednadžbe odmah slijedi $c_1 = 0$, a potom iz druge $c_3 = 2$. Dakle, $\vec{c} = (0, 1, 2)$.

7. Svi vektori okomiti na zadane vektore su nužno kolinearni s vektorom $\vec{a}\times\vec{b}$ jer je taj vektor (uvijek) okomit na zadane vektore. Izračunamo:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1, 0).$$

Duljina toga vektora jednaka je:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ .$$

Budući da množenje vektora skalarom mijenja samo duljinu vektora, prvi traženi vektor je $\vec{c_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1, 1, 0).$ No, i vektor $\vec{c_2} = -\vec{c_1}$ ima tražena svojstva (razlika je jedino u orijentaciji vektora koja ne utječe ni na duljinu vektora, ni na okomitost), pa zadatak ima ukupno dva rješenja: $\vec{c_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1, 1, 0),\ \vec{c_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1, 1, 0)$.

<u>*Napomena*</u>: Zadatak je moguće riješiti i tako da se vektor $\vec{c}$ odredi iz jednakosti $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \left|\vec{c}\right| = 1.$ Taj način je nešto sporiji jer zahtijeva rješavanje sustava kojega tvore dvije linearne jednadžbe i jedna kvadratna jednadžba.

8. Zadani vektori će pripadati istoj ravnini ako i samo ako vrijednost njihova mješovitoga umnoška bude jednaka nuli. Stoga najprije odredimo mješoviti umnožak zadanih vektora (u bilo kojem poretku). Imamo:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & x & 0\\ -3 & 3 & -4\end{vmatrix}=-(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -4\end{vmatrix}+x\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ -3 & -4\end{vmatrix}=8\cdot x-16.$$

Tako iz jednadžbe $8\cdot x-16=0$ slijedi $x=2$.

9. Pretpostavimo da je $D=(0,0,d)$. Tada su:

$$\overrightarrow{AB}=(-3,3,-3),$$
$$\overrightarrow{AC}=(2,2,2),$$
$$\overrightarrow{AD}=(0,-1,d-4).$$

Volumen tetraedra *ABCD* je šest puta manji od apsolutne vrijednosti mješovita umnoška gornjih vektora:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}-3 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & d-4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}+(d-4)\cdot\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|(-12)\cdot(d-4)\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot|(-12)|\cdot|d-4|=\frac{1}{6}\cdot 12\cdot|d-4|=2\cdot|d-4|.$$

Tako iz jednadžbe $2\cdot|d-4|=2$ slijedi $|d-4|=1$, odnosno ili $d-4=-1$ ili $d-4=1$. Odatle su $d_1=3$, $d_2=5$, pa su tražene točke $D_1=(0,0,3)$, $D_2=(0,0,5)$.

10. Tražena površina jednaka je polovici duljine vektorskoga umnoška vektora koji određuju trokut. Stoga odredimo tu duljinu, pri čemu koristimo jednakosti $\vec{m}\times\vec{m}=\vec{n}\times\vec{n}=\vec{0}$ i svojstvo antikomutativnosti vektorskoga umnoška $\vec{n}\times\vec{m}=-\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)$. Dobivamo:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\left(\vec{m}+5\cdot\vec{n}\right)\times\left(7\cdot\vec{m}-\vec{n}\right)\right|=\left|\vec{m}\times\left(7\cdot\vec{m}\right)+\left(5\cdot\vec{n}\right)\times\left(7\cdot\vec{m}\right)+\underbrace{\vec{m}\times\left(-\vec{n}\right)}_{=\vec{n}\times\vec{m}}+\left(5\cdot\vec{n}\right)\times\left(-\vec{n}\right)\right|=$$

$$=\left|7\cdot\left(\underbrace{\vec{m}\times\vec{m}}_{=\vec{0}}\right)+5\cdot 7\cdot\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)+\vec{n}\times\vec{m}-5\cdot\left(\underbrace{\vec{n}\times\vec{n}}_{=\vec{0}}\right)\right|=\left|36\cdot\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)\right|=36\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\left(\angle\left(\vec{n},\vec{m}\right)\right)=$$

$$=36\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=36\cdot\frac{1}{2}=18.$$

Dakle, tražena površina iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot 18=9\ \text{kv. jed.}$$