TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**Zadaci za 1. demonstrature** grupe **E i F** **20.10.2017.**

1. Kompleksan broj $z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^{2015}}{\left[\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\dfrac{7}{6}\cdot\pi\right)\right]^{4028}}$ zapišite u eksponencijalnom obliku.

2. Zadan je kompleksan broj $z=e^{i\cdot\frac{\pi}{2018}}$. Izračunajte $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z^{1009}+1}{z^{1009}+i}\right)$.

3. Zadan je kompleksan broj $z_0=e^{i\cdot\frac{\pi}{20}}$. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-z_0^{60}\right|\le 1\right\}$.

4. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup točaka $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)=1\right\}$.

5. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup točaka $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{i}\right)+\operatorname{Re}\left(\overline{z}\cdot i\right)=2\right\}$.

6. Zadan je kompleksan broj $z=\dfrac{i^{2016}+i^{2015}}{i^{2014}+i^{2017}}$. Odredite $\operatorname{Arg}\left[\left(\overline{z}\right)^{2018}\right]$.

7. Odredite sve $z\in\mathbb{C}$ sa svojstvima $\begin{cases}|2\cdot z|=8,\\ \operatorname{Arg}(-z)=0.\end{cases}$ Zapišite ih u algebarskom i eksponencijalnom obliku.

8. Odredite sve $z\in\mathbb{C}$ sa svojstvima $\begin{cases}|(-5)\cdot z|=25,\\ \operatorname{Arg}\left(\overline{z}\right)=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ Zapišite ih u algebarskom i trigonometrijskom obliku.

9. Zadani su kompleksni brojevi $z_1=-\sqrt{3}+i$ i $z_2=2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi}$. Izračunajte $8\cdot\overline{\left(\dfrac{z_1^{2016}}{z_2^{2019}}\right)}$ i zapišite dobiveni rezultat u algebarskom obliku.

10. Zadani su kompleksni brojevi $z_1=\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\dfrac{7}{4}\cdot\pi\right)$ i $z_2=\dfrac{1}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3}{8}\cdot\pi}$. Izračunajte $\overline{z_1^8\cdot z_2^4}$ i zapišite dobiveni rezultat u algebarskom obliku.

11. Zapišite sva rješenja jednadžbe $z^3+8\cdot i=0$ u algebarskom obliku.

12. Zapišite sva rješenja jednadžbe $z^4+i=0$ u eksponencijalnom obliku.

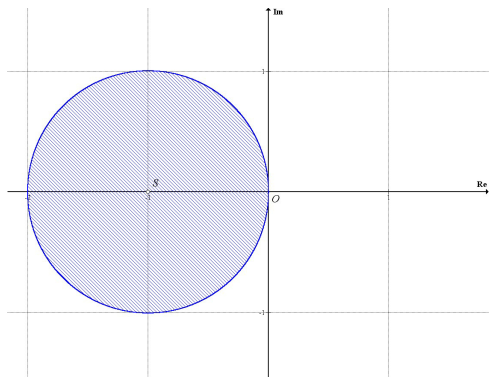
13. Nađite ukupan broj svih rješenja jednadžbe $z^{12}-i=0$ čiji argumenti pripadaju intervalu $\left\langle\dfrac{3}{4}\cdot\pi,\ \dfrac{5}{3}\cdot\pi\right]$.

REZULTATI ZADATAKA

1. $z = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$.

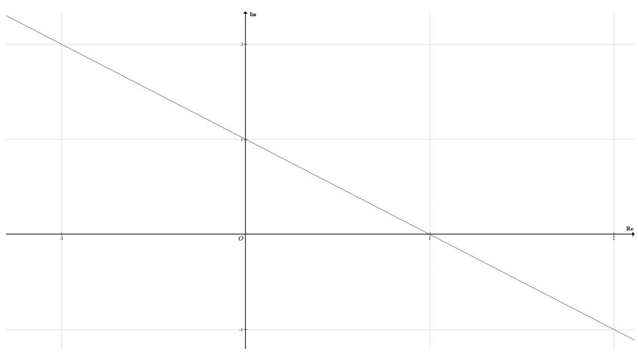
2. $\varphi = \frac{7}{4} \cdot \pi$.

3. Krug sa središtem u točki (–1, 0) i polumjerom 1. Vidjeti sliku 1.



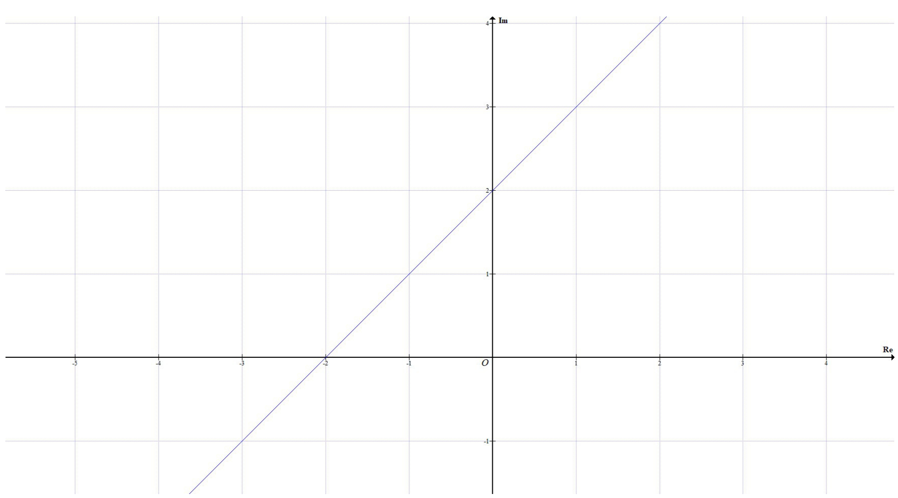
Slika 1.

4. Pravac $y = -x + 1$. Vidjeti sliku 2.



Slika 2.

5. Pravac $y = x + 2$. Vidjeti sliku 3.



Slika 3.

6. 0.

7. $z = -4 = 4 \cdot e^{i \cdot \pi}$.

8. $z = 5 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = -5 \cdot i.$

9. -1.

10. i.

11. $z_0 = 2 \cdot i,\ z_1 = -\sqrt{3} - i,\ z_2 = \sqrt{3} - i.$

12. $z_0 = e^{i \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi},\ z_1 = e^{i \cdot \frac{7}{8} \cdot \pi},\ z_2 = e^{i \cdot \frac{11}{8} \cdot \pi},\ z_3 = e^{i \cdot \frac{15}{8} \cdot \pi}.$

13. 5.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Najprije u eksponencijalnom obliku zapišemo kompleksan broj $z_1 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$. Tom je broju pridružena točka $Z_1 = \left(1, -\sqrt{3}\right)$. Ta točka se nalazi u IV. kvadrantu Gaussove ravnine. (Nacrtajte sliku!) Lako izračunamo modul i argument broja z_1:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2,$$
$$\varphi_1 = 2 \cdot \pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = 2 \cdot \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3} \cdot \pi.$$

Zbog toga je

$$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{3} \cdot \pi}.$$

Tako dobijemo:

$$z = \frac{\left(1 - \sqrt{3} \cdot i\right)^{2015}}{\left[\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7}{6} \cdot \pi\right)\right]^{4028}} = \frac{\left(2 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{3} \cdot \pi}\right)^{2015}}{\left(\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{7}{6} \cdot \pi}\right)^{4028}} = \frac{2^{2015}}{\left(\sqrt{2}\right)^{4028}} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot 2015 - \frac{7}{6} \cdot 4028\right)} =$$
$$= \frac{2^{2015}}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4028}} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot (-1341)} = \frac{2^{2015}}{2^{2014}} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot 1} = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}.$$

2. Imamo redom:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z^{1009} + 1}{z^{1009} + i}\right) = \operatorname{Arg}\left[\frac{\left(e^{i \cdot \frac{\pi}{2018}}\right)^{1009} + 1}{\left(e^{i \cdot \frac{\pi}{2018}}\right)^{1009} + i}\right] = \operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} + 1}{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} + i}\right) = \operatorname{Arg}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + i}\right] =$$
$$= \operatorname{Arg}\left(\frac{0 + i \cdot 1 + 1}{0 + i \cdot 1 + i}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1+i}{2 \cdot i}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2 \cdot i} + \frac{i}{2 \cdot i}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2} \cdot i^{-1} + \frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arg}\left[\frac{1}{2} \cdot (-i) + \frac{1}{2}\right] =$$
$$= \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i\right) = 2 \cdot \pi - \operatorname{arctg}(1) = 2 \cdot \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4} \cdot \pi.$$

Ovdje smo primijenili sljedeće činjenice:

- $i^{4 \cdot k + 3} = -i, \ \forall k \in \mathbb{Z}$, pa posebno za $k = -1$ slijedi $i^{4 \cdot (-1) + 3} = i^{-1} = -i.$
- Broju $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$ odgovara točka $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ u IV. kvadrantu Gaussove ravnine (nacrtajte sliku!). Stoga se argument toga broja dobije kao gore.

3. Izračunajmo najprije broj z_0^{60}. Imamo redom:

$$z_0^{60} = \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{20}}\right)^{60} = e^{i\cdot 3\cdot\pi} = \cos(3\cdot\pi) + i\cdot\sin(3\cdot\pi) = -1 + i\cdot 0 = -1.$$

Odatle slijedi:

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - z_0^{60}\right| \le 1\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - (-1)\right| \le 1\right\}.$$

Promotrimo najprije skup

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - (-1)\right| = 1\right\}.$$

Prema primjeru s predavanja[1], S_1 je kružnica sa središtem u točki pridruženoj broju $z_1 = -1$ i polumjerom $r = 1$. Broju z_1 je pridružena točka $Z_1 = (-1, 0)$. Stoga u Gaussovoj ravnini nacrtamo kružnicu sa središtem u točki Z_1 i polumjerom *r*. Budući da se u definicijskoj relaciji skupa *S* pojavljuje znak ≤, traženi grafički prikaz je krug omeđen nacrtanom kružnicom (vidjeti Sliku 1.).

4. Neka je $z = x + y\cdot i,\ x, y \in \mathbb{R}$. Tada su $\operatorname{Re}(z) = x$ i $\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right) = \operatorname{Im}(x - y\cdot i) = -y$. Zbog toga je skup *S* jednak skupu svih točaka Gaussove ravnine za koje vrijedi jednakost $x - (-y) = 1$, odnosno jednakost $y = -x + 1$. Grafički prikaz toga skupa je pravac $y = -x + 1$ (vidjeti Sliku 2.).

5. Neka je $z = x + y\cdot i,\ x, y \in \mathbb{R}$. Tada su:

$$\frac{z}{i} = \frac{x + y\cdot i}{i} = \frac{(x + y\cdot i)\cdot i}{i\cdot i} = \frac{x\cdot i + y\cdot i^2}{i^2} = \frac{x\cdot i + y\cdot(-1)}{(-1)} = y - x\cdot i,$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = -x,$$

$$\overline{z}\cdot i = (x - y\cdot i)\cdot i = x\cdot i - y\cdot i^2 = x\cdot i - y\cdot(-1) = y + x\cdot i,$$

$$\operatorname{Re}\left(\overline{z}\cdot i\right) = y.$$

Zbog toga je skup *S* jednak skupu svih točaka Gaussove ravnine za koje vrijedi jednakost $-x + y = 2$, odnosno jednakost $y = x + 2$. Grafički prikaz toga skupa je pravac $y = x + 2$ (vidjeti Sliku 3.).

6. Zapišimo broj z u algebarskom obliku. Ostatci pri cjelobrojnom dijeljenju brojeva 2014, 2015, 2016 i 2017 s 4 su redom 2, 3, 0 i 1. Stoga je:

$$z = \frac{i^{2016} + i^{2015}}{i^{2014} + i^{2017}} = \frac{i^4 + i^3}{i^2 + i} = \frac{1 + (-i)}{(-1) + i} = \frac{(-1)\cdot(-1 + i)}{-1 + i} = -1.$$

[1] Rezultat toga primjera je tekst neposredno ispred naslova točke 1.3. u *Repetitoriju…*, stranica 3.

Tako je $\overline{z} = z = -1$, pa je $\left(\overline{z}\right)^{2018} = (-1)^{2018} = 1$. Konačno je: $\operatorname{Arg}\left[\left(\overline{z}\right)^{2018}\right] = \operatorname{Arg}(1) = 0$.

7. Iz $|2\cdot z| = 8$ slijedi $|2|\cdot|z| = 8$, odnosno $2\cdot|z| = 8$,odnosno $|z| = 4$.

Iz $\operatorname{Arg}(-z) = 0$ slijedi:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Arg}(-1\cdot z) = 0,\\
&\operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(z) = 0,\\
&\pi + \operatorname{Arg}(z) = 0,\\
&\operatorname{Arg}(z) = 0 - \pi = -\pi = -\pi + 2\cdot\pi = \pi.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi broj $z = 4\cdot e^{i\cdot\pi} = 4\cdot\left(\cos\pi + i\cdot\sin\pi\right) = 4\cdot(-1+i\cdot 0) = -4$.

8. Iz $|(-5)\cdot z| = 25$ slijedi $|-5|\cdot|z| = 25$, odnosno $5\cdot|z| = 25$, odnosno $|z| = 5$.

Iz $\operatorname{Arg}\left(\overline{z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ slijedi:

$$\begin{aligned}
2\cdot\pi - \operatorname{Arg}(z) &= \frac{\pi}{2}\\
\operatorname{Arg}(z) &= 2\cdot\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\pi.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi broj jednak:

$$z = 5\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) = 5\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\right) = 5\cdot(0 + i\cdot(-1)) = -5\cdot i.$$

9. Broju $z_1 = -\sqrt{3} + i$ pridružena je točka $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$. Izračunamo: $r_1 = |z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^3 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, $\varphi_1 = \pi - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{6}\cdot\pi$. Zbog toga je $z_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{6}\cdot\pi}$. Tako sada imamo:

$$8\cdot\overline{\left(\frac{z_1^{2016}}{z_2^{2017}}\right)} = 8\cdot\overline{\left(\frac{2^{2016}\cdot e^{i\cdot\frac{5}{6}\cdot\pi\cdot 2016}}{2^{2019}\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi\cdot 2019}}\right)} = 8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot 2016 - \frac{5}{3}\cdot 2019\right)}\right)} = 8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot(-1685)}\right)} =$$

$$= 8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot\left(\cos\left(-1685\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(-1685\cdot\pi\right)\right)\right)} = 8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot(-1+i\cdot 0)\right)} = -8\cdot 2^{-3} = -1.$$

10. *Uputa*: Postupite kao u prethodnom zadatku, pri čemu je najbolje oba broja zapisati u trigonometrijskom obliku. Dobiva se:

$$\overline{z_1^8\cdot z_2^4} = \overline{2^4\cdot\operatorname{cis}\left(14\cdot\pi\right)\cdot 2^{-4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)} = \overline{\operatorname{cis}\left(14\cdot\pi + \frac{3}{2}\cdot\pi\right)} = \overline{\operatorname{cis}\left(\frac{31}{2}\cdot\pi\right)} = \overline{-i} = i.$$

11. Očito je $-8 \cdot i = 8 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right)$. Zbog toga su sva rješenja zadane jednadžbe dana izrazom:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot k + 3}{6} \cdot \pi\right),\ k = 0,1,2.$$

Dakle, tražena rješenja su:

$$z_0 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 0 + 3}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot i,$$
$$z_1 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 1 + 3}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{7}{6} \cdot \pi\right) = -\sqrt{3} - i,$$
$$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 2 + 3}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{11}{6} \cdot \pi\right) = \sqrt{3} - i,$$

12. *Uputa*: Postupite kao u prethodnom zadatku. Budući da je $-i = \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = e^{i \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi}$, dobiva se:

$$z_0 = e^{i \cdot \left(\frac{4 \cdot 0 + 3}{8} \cdot \pi\right)} = e^{i \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi},$$
$$z_1 = e^{i \cdot \left(\frac{4 \cdot 1 + 3}{8} \cdot \pi\right)} = e^{i \cdot \frac{7}{8} \cdot \pi},$$
$$z_2 = e^{i \cdot \left(\frac{4 \cdot 2 + 3}{8} \cdot \pi\right)} = e^{i \cdot \frac{11}{8} \cdot \pi},$$
$$z_3 = e^{i \cdot \left(\frac{4 \cdot 3 + 3}{8} \cdot \pi\right)} = e^{i \cdot \frac{15}{8} \cdot \pi}.$$

13. Budući da je $i = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, sva rješenja zadane jednadžbe su dana izrazom $z_k = \text{cis}\left(\frac{4 \cdot k + 1}{24} \cdot \pi\right),\ k = 0,1,\ldots,11$. Stoga mora vrijediti nejednakost $\frac{3}{4} \cdot \pi < \frac{4 \cdot k + 1}{24} \cdot \pi \leq \frac{5}{3} \cdot \pi$, odnosno nejednakost $18 < 4 \cdot k + 1 \leq 40$. Odatle je $\frac{17}{4} < k \leq \frac{39}{4}$. U tom intervalu nalaze se prirodni brojevi 5, 6, 7, 8 i 9. Njih ima ukupno 5. Dakle, traženi broj je jednak 5.