TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**Zadaci za demonstrature** grupe **E i F** **12.1.2018.**

1. Nađite sve globalne ekstreme funkcije $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ definirane pravilom $f(x)=x^3-3\cdot x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

2. Nađite sve globalne ekstreme funkcije $g:[0,3]\to\mathbb{R}$ definirane pravilom $g(y)=y\cdot(y-3)^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

3. Odredite domenu, intervale monotonosti i sve lokalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

b) $g(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$;

c) $h(u)=\dfrac{2\cdot u}{e^{2\cdot u}}$;

d) $p:[0,\ 2\cdot\pi]\to\mathbb{R},\ \ p(v)=\sin v+\cos v$.

4. Pravokutno gradilište površine 1 ha treba ograditi tako da se za ograđivanje potroši najmanje materijala. Odredite optimalne dimenzije gradilišta i izrazite ih u metrima. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite. (*Napomena*: 1 ha = 10 000 m^2.)

5. Izračunajte sljedeće granične vrijednosti primjenom L'Hôpital-Bernoullijeva pravila:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot(x-\operatorname{arctg} x)}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\cdot(e^{\cos y}-e)}{\sin^2 y}$;

c) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2+t+1}{e^t}$;

d) $\lim\limits_{w\to-\infty}\dfrac{e^{2\cdot w}}{w^3-w^2+w-1}$.

6. Odredite intervale konveksnosti, intervale konkavnosti, prijevojne točke i asimptote na graf sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$,

b) $g(t)=\dfrac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^2}$;

c) $h(y)=e^{-2\cdot y^2}$.

REZULTATI ZADATAKA

1. Globalni minimum funkcije f jednak je –2 i postiže se za $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$.
Globalni maksimum funkcije f jednak je 2 i postiže se za $x_3 = -1$ i $x_4 = 2$.

2. Globalni minimum funkcije g jednak je 0 i postiže se za $y_1 = 0$ i $y_2 = 3$.
Globalni maksimum funkcije g jednak je 4 i postiže se za $y_3 = 1$.

3.

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, intervali rasta: $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, intervali pada $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$, točka lokalnoga minimuma: $T_1 = (1, 2)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2 = (-1, -2)$;

b) $D(g) = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty\rangle$, interval rasta: $\langle 0, \sqrt{e}\rangle$, interval pada: $\langle \sqrt{e}, +\infty\rangle$,
točka lokalnoga maksimuma: $T = \left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2\cdot e}\right)$;

c) $D(h) = \mathbb{R}$, interval rasta: $\left\langle -\infty, \dfrac{1}{2}\right\rangle$, interval pada: $\left\langle \dfrac{1}{2}, +\infty\right\rangle$,
točka lokalnoga maksimuma: $T = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e}\right)$;

d) $D(p) = [0, 2\cdot\pi]$, intervali rasta: $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{4}\right\rangle$ i $\left\langle \dfrac{5}{4}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right\rangle$, interval pada: $\left\langle \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\cdot\pi\right\rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1 = \left(\dfrac{5}{4}\cdot\pi, -\sqrt{2}\right)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2 = \left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

4. $\left(x^*, y^*\right) = (100,100)$, tj. gradilište treba biti kvadrat stranice 100 metara.

5.

a) $L = 1$;
b) $L = -e$;
c) $L = 0$;
d) $L = 0$.

6. **a)** Intervali konveksnosti: $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, interval konkavnosti: $\langle 0, 1\rangle$, prijevojna točka: (1, 0), jedina asimptota: $x = 0$.

b) Interval konveksnosti: $\left\langle \sqrt[6]{e^5}, +\infty\right\rangle$, interval konkavnosti: $\left\langle 0, \sqrt[6]{e^5}\right\rangle$, prijevojna točka: $T = \left(\sqrt[6]{e^5}, e^{-\frac{5}{3}}\right)$, uspravna asimptota: os ordinata, desna vodoravna asimptota: os apscisa.

c) Intervali konveksnosti: $\left\langle -\infty, -\dfrac{1}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \dfrac{1}{2}, +\infty\right\rangle$, interval konkavnosti: $\left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle$, prijevojne točke: $T_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ i $T_2 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, jedina asimptota: os apscisa.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Najprije odredimo: $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3.$

Iz jednadžbe $f'(x) = 0$ slijedi $3 \cdot x^2 - 3 = 0$, a odatle je $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f u rubnim točkama segmenta (domene), te u dvjema stacionarnim točkama:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -2,$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2,$$
$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2,$$
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Odatle zaključujemo:

f ima globalni minimum –2. On se postiže za $x = -2$ i za $x = 1$. Kraće možemo reći da su točke globalnoga minimuma $T_1 = (-2, -2)$ i $T_2 = (1, -2)$.

f ima globalni maksimum 2. On se postiže za $x = -1$ i za $x = 2$. Kraće možemo reći da su točke globalnoga maksimuma $T_3 = (-1,\ 2)$ i $T_2 = (2,\ 2)$.

2. Najprije odredimo:

$$g(y) = y \cdot (y-3)^2 = y \cdot (y^2 - 6 \cdot y + 9) = y^3 - 6 \cdot y^2 + 9 \cdot y,$$
$$g'(y) = 3 \cdot y^2 - 12 \cdot y + 9.$$

Iz jednadžbe $g'(y) = 0$ slijedi $3 \cdot y^2 - 12 \cdot y + 9 = 0$, a odatle je $y_1 = 1,\ y_2 = 3.$ Preostaje izračunati vrijednosti funkcije g u rubnim točkama segmenta (domene), te u jednoj stacionarnoj točki koja nije rub segmenta:

$$g(0) = 0 \cdot (0-3)^2 = 0,$$
$$g(1) = 1 \cdot (1-3)^2 = 4,$$
$$g(3) = 3 \cdot (3-3)^2 = 0.$$

Odatle zaključujemo:

g ima globalni minimum 0. On se postiže za $y = 0$ i za $y = 3$. Kraće možemo reći da su točke globalnoga minimuma $T_1 = (0,\ 0)$ i $T_2 = (3,\ 0)$.

g ima globalni maksimum 4. On se postiže za $y = 1$. Kraće možemo reći da je točka globalnoga maksimuma $T_3 = (1,\ 4)$.

3. **a)** Iz uvjeta $x \neq 0$ slijedi $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prva derivacija funkcije f je $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Iz jednadžbe $f'(x) = 0$ slijedi $x^2 = 1$, a odavde je $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$ Budući da tražimo intervale monotonosti, promatramo funkciju na četirima intervalima: $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$.

Uzmemo $x = -2$, pa izračunamo $f^{'}(-2) = 0.75 > 0$. Dakle, f raste na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$.

Uzmemo $x = -0.5$, pa izračunamo $f^{'}(-0.5) = -3 < 0$. Dakle, f pada na intervalu $\langle -1, 0\rangle$.

Uzmemo $x = 0.5$, pa izračunamo $f^{'}(0.5) = -3 < 0$. Dakle, f pada na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Uzmemo $x = 2$, pa izračunamo $f^{'}(2) = 0.75 > 0$. Dakle, f raste na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$.

Prema tome, intervali rasta su $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a intervali pada $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$.

Budući da je f rastuća lijevo od $x = -1$, a padajuća desno od $x = -1$, zaključujemo da je $T_1 = (-1, f(-1)) = (-1, -2)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije f.
Analogno, budući da je f padajuća lijevo od $x = 1$, a rastuća desno od $x = 1$, zaključujemo da je $T_2 = (1, f(1)) = (1,\ 2)$ točka lokalnoga minimuma funkcije f.

b) Iz uvjeta $t > 0$ i $t \neq 0$ slijedi $D(g) = \mathbb{R}^{+} = \left\langle 0, +\infty \right\rangle$.

Prva derivacija funkcije g je $g^{'}(t) = \dfrac{1 - 2\cdot \ln t}{t^{3}}$.

Iz jednadžbe $g^{'}(t) = 0$ slijedi $1 - 2\cdot\ln t = 0$, a odavde je $t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Stoga promatramo funkciju na intervalima $\left\langle 0, \sqrt{e}\right\rangle$ i $\left\langle \sqrt{e}, +\infty\right\rangle$.

Za $t = 1$ je $g^{'}(1) = 1 > 0$. Dakle, g raste na intervalu $\left\langle 0, \sqrt{e}\right\rangle$.

Za $t = e$ je $g^{'}(e) = -\dfrac{1}{e^{3}} < 0$, pa g pada na intervalu $\left\langle \sqrt{e}, +\infty\right\rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T = \left(\sqrt{e}, g\left(\sqrt{e}\right)\right) = \left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2\cdot e}\right)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije g.

c) Budući da vrijedi nejednakost $e^{2\cdot u} > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$, nemamo nikakvih uvjeta na vrijednost varijable u. Zbog toga je $D(h) = \mathbb{R}$.

Prva derivacija funkcije h je $h^{'}(u) = \dfrac{2 - 4\cdot u}{e^{2\cdot u}}$. Iz jednadžbe $h^{'}(u) = 0$ slijedi $2 - 4\cdot u = 0$, a odavde je $u = \dfrac{1}{2}$. Stoga promatramo ponašanje funkcije h na intervalima $\left\langle -\infty,\ \dfrac{1}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \dfrac{1}{2}, +\infty\right\rangle$.

Za $u = 0$ je $h^{'}(0) = 2 > 0$, pa h raste na intervalu $\left\langle -\infty,\ \dfrac{1}{2}\right\rangle$.

Za $u = 1$ je $h^{'}(1) = -\dfrac{2}{e^{2}} < 0$, pa h pada na intervalu $\left\langle \dfrac{1}{2}, +\infty\right\rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T = \left(\dfrac{1}{2},\ h\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{e}\right)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije h.

d) U zadatku je već navedeno da je domena zadane funkcije $D(p)=[0,2\cdot\pi]$.

Prva derivacija zadane funkcije je $p'(v)=\cos v-\sin v$. Iz jednadžbe $p'(v)=0$ slijedi $\cos v - \sin v = 0$.

Za isti $v \in \mathbb{R}$ vrijednosti funkcija sinus i kosinus ne mogu istodobno biti jednake nuli jer u suprotnom nije moguća jednakost $\cos^2 v+\sin^2 v=1$. Ako bi bilo $\cos v = 0$, onda bi iz dobivene jednadžbe slijedilo $\sin v = 0$, što je proturječje. Zbog toga jednadžbu smijemo podijeliti sa $\cos v$. Tako dobijemo jednadžbu $\operatorname{tg} v = 1$. Ona u segmentu $[0, 2\cdot\pi]$ ima točno dva rješenja: $v_1=\frac{\pi}{4}$ i $v_2=\frac{5}{4}\cdot\pi$. Stoga promatramo zadanu funkciju na intervalima $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$, $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\cdot\pi\right\rangle$ i $\left\langle \frac{5}{4}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right\rangle$.

Za $v=\frac{\pi}{6}$ je $p'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$, pa p raste na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$.

Za $v = \pi$ je $p'(\pi)=-1<0$, pa p pada na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\cdot\pi\right\rangle$.

Za $v=\frac{3}{2}\cdot\pi$ je $p'\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)=1>0$, pa p raste na intervalu $\left\langle \frac{5}{4}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right\rangle$.

Dakle, intervali rasta zadane funkcije su $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{5}{4}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right\rangle$, a interval pada $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\cdot\pi\right\rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T_1=\left(\frac{\pi}{4}, p\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije p, a $T_2=\left(\frac{5}{4}\cdot\pi, p\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\right)\right)=\left(\frac{5}{4}\cdot\pi,-\sqrt{2}\right)$ točka lokalnoga minimuma funkcije p.

4. Neka su x i y redom duljina, odnosno širina gradilišta. Stoga je površina gradilišta $P=x\cdot y$. Ta površina mora biti jednaka 1 ha = 10 000 m^2, pa dobivamo jednakost:

$$x\cdot y=10000.$$

Nadalje, za ograđivanje gradilišta će se potrošiti najmanje materijala ako opseg gradilišta bude minimalan. Opseg pravokutnika čije su duljine stranica x i y dan je formulom

$$O=2\cdot x+2\cdot y.$$

Tako smo dobili sljedeći optimizacijski problem:

minimizirati $O=2\cdot x+2\cdot y$
pod uvjetima
$x\cdot y=10000,$
$x, y>0.$

Posljednji uvjet moramo nadopisati jer je iz prirode problema jasno da nije moguće da x i y budu nepozitivni realni brojevi.

Ovaj optimizacijski problem rješavamo svođenjem na problem određivanja globalnoga ekstrema funkcije jedne realne varijable. Iz uvjeta $x \cdot y = 10000$ izrazimo npr. varijablu *y*:

$$y = \frac{10000}{x}.$$

Uvrstimo li taj izraz u funkciju čiji globalni minimum tražimo, dobit ćemo:

$$O = O(x) = 2 \cdot x + \frac{20000}{x}.$$

Zbog uvjeta $x > 0$, domena ove funkcije je $\mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$, pa tražimo globalni minimum funkcije *O* na ovom skupu. Postupamo na uobičajen način:

$$O'(x) = 2 - \frac{20000}{x^2},$$
$$O'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{20000}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow x = 100.$$

Analogno kao u zadatku 3., lako provjerimo da funkcija *O* strogo pada na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$ (npr. uzmemo $x = 1$ i dobijemo $O'(1) = -19998 < 0$), a strogo raste na intervalu $\langle 100, +\infty \rangle$ (uzmemo npr. $x = 200$ i dobijemo $O'(200) = \frac{3}{2} > 0$). Stoga funkcija *O* ima *lokalni* minimum za $x = 100$.

Međutim, mi tražimo *globalni* minimum te funkcije. Iz zaključka da funkcija *O* strogo pada na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$ slijedi da za svaki $x \in \langle 0, 100 \rangle$ vrijedi nejednakost $O(x) > O(100)$, a iz zaključka da funkcija *O* strogo raste na intervalu $\langle 100, +\infty \rangle$ slijedi da za svaki $x > 100$ vrijedi nejednakost $O(100) < O(x)$. Iz tih dviju nejednakosti zaključujemo da za svaki $x \in \langle 0, +\infty \rangle = D(O)$ (domena funkcije *O*) vrijedi nejednakost $O(x) > O(100)$, pa *O* doista ima globalni minimum za $x = 100$.

Dakle, optimalna vrijednost duljine gradilišta je $x^* = 100$ metara. Lako izračunamo: $y^* = \frac{10000}{x^*} = \frac{10000}{100} = 100$ metara. Prema tome, optimalno je da gradilište bude kvadrat stranice 100 metara.

5.

a) $$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot (x - \operatorname{arctg} x)}{x^3} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{[3 \cdot (x - \operatorname{arctg} x)]'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)}{3 \cdot x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2}}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

b) $$L_2 = \lim_{y \to 0} \frac{2 \cdot (e^{\cos y} - e)}{\sin^2 y} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{y \to 0} \frac{\left[2 \cdot (e^{\cos y} - e)\right]'}{(\sin^2 y)'} = \lim_{y \to 0} \frac{2 \cdot e^{\cos y} \cdot (-\sin y)}{2 \cdot \sin y \cdot \cos y} = \lim_{y \to 0} \frac{-e^{\cos y}}{\cos y} = \frac{-e^{\cos 0}}{\cos 0} = \frac{-e^1}{1} = -e;$$

c) $L_3=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2+t+1}{e^t}=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(t^2+t+1)'}{(e^t)'}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2\cdot t+1}{e^t}=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(2\cdot t+1)'}{(e^t)'}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t}=0;$

d) $L_4=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{e^{2\cdot w}}{w^3-w^2+w-1}=\left\{\frac{0}{-\infty}\right\}=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{(e^{2\cdot w})'}{(w^3-w^2+w-1)'}=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{2\cdot e^{2\cdot w}}{3\cdot w^2-2\cdot w+1}=\left\{\frac{0}{+\infty}\right\}=$

$=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{(2\cdot e^{2\cdot w})'}{(3\cdot w^2-2\cdot w+1)'}=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{4\cdot e^{2\cdot w}}{6\cdot w-2}=\left\{\frac{0}{-\infty}\right\}=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{(4\cdot e^{2\cdot w})'}{(6\cdot w-2)'}=\lim\limits_{w\to-\infty}\frac{8\cdot e^{2\cdot w}}{6}=\frac{8\cdot 0}{6}=0.$

6. a) Primijetimo da je $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Odredimo $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, pa zaključujemo da je os apscisa uspravna asimptota na graf funkcije *f*. Nadalje, lako vidimo da vrijedi jednakost $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=\pm\infty$, pa zaključujemo da graf funkcije *f* nema nijednu kosu asimptotu.

Za određivanje intervala konveksnosti, intervala konkavnosti i prijevojne točke potrebno je odrediti drugu derivaciju zadane funkcije. Imamo:

$$f'(x)=2\cdot x+\frac{1}{x^2},$$
$$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2\cdot x^3-2}{x^3}=\frac{2\cdot(x^3-1)}{x^3}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x^3}.$$

Uočimo da za svaki $x\in D(f)$ vrijedi nejednakost $x^2+x+1>0$. Naime, pripadna kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, koeficijent uz x^2 je strogo pozitivan (i jednak 1), pa izraz poprima samo strogo pozitivne vrijednosti. Zbog toga je predznak druge derivacije funkcije *f* jednak predznaku izraza $\frac{x-1}{x^3}$.

Iz nejednadžbe $f''(x)>0$ slijedi $\begin{cases}x-1>0,\\ x^3>0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x-1<0,\\ x^3<0\end{cases}$, odnosno $\begin{cases}x>1,\\ x>0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x<1,\\ x<0\end{cases}$. Stoga je skup svih rješenja te nejednadžbe $\langle-\infty,0\rangle\cup\langle1,+\infty\rangle$. Intervali $\langle-\infty,0\rangle$ i $\langle1,+\infty\rangle$ su pravi podskupovi skupa $D(f)$, pa su oni ujedno i svi intervali konveksnosti funkcije *f*.

Iz nejednadžbe $f''(x)<0$ slijedi $\begin{cases}x-1>0,\\ x^3<0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x-1<0,\\ x^3>0\end{cases}$, odnosno $\begin{cases}x>1,\\ x<0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x<1,\\ x>0\end{cases}$. Stoga je skup svih rješenja te nejednadžbe $\langle0,1\rangle$. Taj interval je pravi podskup skupa $D(f)$, pa je taj interval ujedno i jedini interval konkavnosti funkcije *f*.

Iz navedenih razmatranja zaključujemo da je $T=(1,f(1))=(1,0)$ jedina prijevojna točka grafa funkcije *f*.

b) Primijetimo da je $D(g)=\langle0,+\infty\rangle$. Računamo:

$$\lim_{t\to0+}g(t)=\lim_{t\to0+}\frac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^2}=\left\{\frac{-\infty}{0}\right\}=\lim_{t\to0+}\frac{6\cdot\frac{1}{t}}{5\cdot2\cdot t}=\lim_{t\to0+}\frac{3}{5\cdot t^2}=+\infty\ ,$$

pa zaključujemo da je os ordinata (os *y*) uspravna asimptota na graf funkcije *g*.

Zbog $D(g)=\langle 0,+\infty\rangle$, graf funkcije g može imati samo desnu kosu asimptotu. Stoga računamo:

$$k=\lim_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^3}=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\frac{6\cdot\frac{1}{t}}{5\cdot 3\cdot t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{5\cdot t^3}=0,$$

$$l=\lim_{t\to+\infty}\left[g(t)-k\cdot t\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^2}=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\frac{6\cdot\frac{1}{t}}{5\cdot 2\cdot t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3}{5\cdot t^2}=0.$$

Zaključujemo da je os apscisa, tj. pravac $y=0$, desna vodoravna asimptota.

Za određivanje intervala konveksnosti, intervala konkavnosti i prijevojne točke potrebno je odrediti drugu derivaciju zadane funkcije. Imamo:

$$g^{'}(t)=\frac{6-12\cdot\ln t}{5\cdot t^3},$$
$$g^{''}(t)=\frac{36\cdot\ln t-30}{5\cdot t^4}=\frac{6\cdot(6\cdot\ln t-5)}{5\cdot t^4}.$$

Primijetimo da za svaki $t\in D(g)=\langle 0,+\infty\rangle$ vrijedi nejednakost $\frac{6}{5\cdot t^4}>0$. Stoga je predznak druge derivacije funkcije *g* jednak predznaku izraza $6\cdot\ln t-5$.

Iz nejednadžbe $6\cdot\ln t-5>0$ slijedi $t>e^{\frac{5}{6}}$, pa je interval konveksnosti $\left\langle e^{\frac{5}{6}},+\infty\right\rangle$.

Iz nejednadžbe $6\cdot\ln t-5<0$ slijedi $t<e^{\frac{5}{6}}$, pa je interval konveksnosti $\left\langle 0,\ e^{\frac{5}{6}}\right\rangle$.

Odatle slijedi da je $T=\left(e^{\frac{5}{6}},g\left(e^{\frac{5}{6}}\right)\right)=\left(e^{\frac{5}{6}},e^{-\frac{5}{3}}\right)$ jedina prijevojna točka grafa funkcije *g*.

c) Primijetimo da je $D(h)=\mathbb{R}$, pa graf funkcije *h* nema uspravnu asimptotu. Računamo:

$$k=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{h(y)}{y}=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{e^{-2\cdot y^2}}{y}=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{y\cdot e^{2\cdot y^2}}=0,$$

$$l=\lim_{y\to\pm\infty}\left[h(y)-k\cdot y\right]=\lim_{y\to\pm\infty}e^{-2\cdot y^2}=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{e^{2\cdot y^2}}=0,$$

pa zaključujemo da je os apscisa (os *y*) obostrana vodoravna asimptota na graf funkcije *h*.

Za određivanje intervala konveksnosti, intervala konkavnosti i prijevojne točke potrebno je odrediti drugu derivaciju zadane funkcije. Imamo:

$$h^{'}(y)=(-4\cdot y)\cdot e^{-2\cdot y^2},$$
$$h^{''}(y)=-4\cdot e^{-2\cdot y^2}+16\cdot y^2\cdot e^{-2\cdot y^2}=4\cdot e^{-2\cdot y^2}\cdot(4\cdot y^2-1).$$

Primijetimo da za svaki $y \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $4 \cdot e^{-2 \cdot y^2} > 0$. To znači da je predznak druge derivacije zadane funkcije jednak predznaku izraza $4 \cdot y^2 - 1$.

Iz nejednadžbe $4 \cdot y^2 - 1 > 0$ slijedi $y \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. To znači da su $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ svi intervali konveksnosti funkcije *h*.

Iz nejednadžbe $4 \cdot y^2 - 1 < 0$ slijedi $y \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$. To znači da je $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ jedini interval konkavnosti funkcije *h*.

Tako zaključujemo da su $T_1 = \left(-\frac{1}{2}, h\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ i $T_2 = \left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ sve prijevojne točke grafa funkcije *h*.