1. Odredite prirodnu domenu realne funkcije $f(ž)=\dfrac{\ln(ž-1)}{\sqrt{2\cdot ž-ž^2}}$.

2. Odredite prirodnu domenu realne funkcije $g(x)=\sqrt{\log_2\left(\dfrac{x+2}{2\cdot x}\right)}$.

3. Odredite inverz realne funkcije $h(š)=\dfrac{e^{š}}{2\cdot e^{š}+1}$ i njegovu prirodnu domenu.

4. Ako je $f^{-1}(č)=\dfrac{2^{č}}{2^{č+1}-1}$, odredite prirodnu domenu funkcije *f*.

5. Rastavite na faktore polinom $p(đ)=đ^3-2\cdot đ^2-đ+2$. Koristeći dobiveni rezultat nađite skup svih nultočaka polinoma *p*.

6. Rastavite na faktore polinom $p(w)=2\cdot w^3-3\cdot w^2-3\cdot w+2$. Koristeći dobiveni rezultat nađite skup svih nultočaka polinoma *p*.

7. Pokažite da je polinom $p_1(t)=t^4-t^3-7\cdot t^2+t+6$ djeljiv polinomom $p_2(t)=t^2-1$. Koristeći dobiveni rezultat odredite skup svih nultočaka polinoma p_1.

8. Pokažite da je polinom $p_1(u)=-12\cdot u^5-u^4+13\cdot u^3+u^2-u$ djeljiv polinomom $p_2(u)=u^3-u$. Koristeći dobiveni rezultat odredite skup svih nultočaka polinoma p_1.

9. Zadana je neprava racionalna funkcija $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^5+2}{2+\alpha-\alpha^2}$.

a) Odredite prirodnu domenu funkcije *f*.
b) Zapišite funkciju *f* u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.

10. Zadana je neprava racionalna funkcija $g(\beta)=\dfrac{3-\beta^5}{\beta^3-16\cdot\beta}$.

a) Odredite prirodnu domenu funkcije *g*.
b) Zapišite funkciju *g* u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.

REZULTATI ZADATAKA

1. $D_f = \langle 1, 2 \rangle$

2. $D_g = \langle 0, 2]$

3. $h^{-1}(š) = \ln\left(\frac{š}{1-2\cdot š}\right)$. $D_{h^{-1}} = \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

5. $p(đ) = (đ+1)\cdot(đ-1)\cdot(đ-2)$. $N_p = \{-1, 1, 2\}$.

6. $p(w) = (w+1)\cdot(2\cdot w-1)\cdot(w-2)$. $N_p = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

7. Dijeljenjem polinoma p_1 i p_2 dobiva se količnik $q(t) = t^2 - t - 6$ i ostatak $r(t) = 0$. Stoga je p_1 djeljiv s p_2. $N_{p_1} = \{-2, -1, 1, 3\}$.

8. Dijeljenjem polinoma p_1 i p_2 dobiva se količnik $q(u) = -12\cdot u^2 - u + 1$ i ostatak $r(u) = 0$. Stoga je p_1 djeljiv s p_2. $N_{p_1} = \left\{-1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 1\right\}$.

9. **a)** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 2\}$;

b) $f(\alpha) = -\alpha^3 - \alpha^2 - 3\cdot\alpha - 5 + \frac{11\cdot\alpha + 12}{2+\alpha-\alpha^2}$.

10. **a)** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-4, 0, 4\}$;

b) $g(\beta) = -\beta^2 - 16 + \frac{-256\cdot\beta + 3}{\beta^3 - 16\cdot\beta}$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Logaritamska funkcija je definirana na području na kojemu je logaritmand (izraz pod logaritmom) strogo pozitivan. Zbog toga mora vrijediti nejednakost:

$$\check{z}-1>0$$

Nadalje, vrijednost izraza pod drugim korijenom u nazivniku razlomka mora biti strogo pozitivna. Naime, vrijednost bilo kojega izraza pod drugim korijenom mora biti jednaka nekom pozitivnom broju ili nuli. No, u ovom slučaju vrijednost izraza ne smije biti jednaka nuli jer bi tada vrijednost nazivnika razlomka bila jednak nuli, pa razlomak ne bi bio definiran. Dakle, mora vrijediti nejednakost:

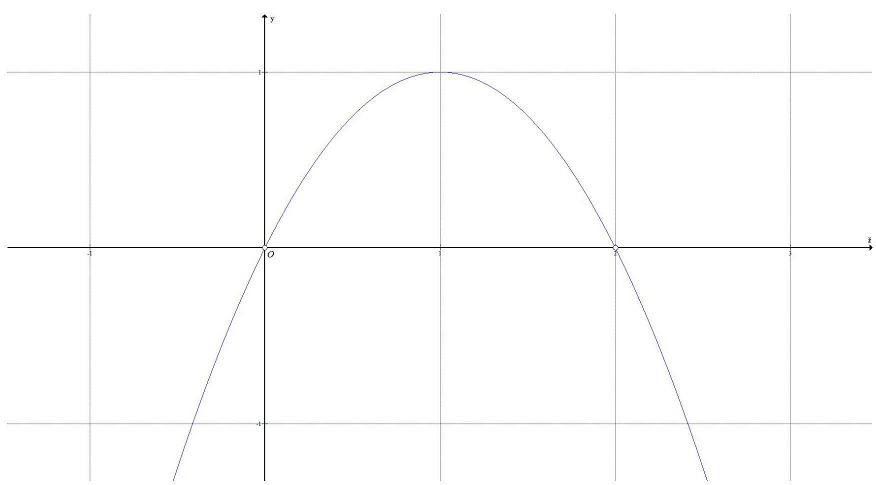
$$2\cdot\check{z}-\check{z}^2>0.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases}\check{z}-1>0,\\ 2\cdot\check{z}-\check{z}^2>0.\end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Iz prve nejednadžbe odmah slijedi $\check{z}>1$, pa je skup svih rješenja te nejednadžbe interval $\langle 1,+\infty\rangle$.

Druga nejednadžba je kvadratna nejednadžba. Nju je najlakše riješiti grafički. Skicirajmo graf funkcije $g(\check{z})=2\cdot\check{z}-\check{z}^2$. Riješimo jednadžbu $g(\check{z})=0$, odnosno jednadžbu $2\cdot\check{z}-\check{z}^2=0$. Dobivamo: $\check{z}_1=0$, $\check{z}_2=2$. Koeficijent uz $\check{z}^2$ jednak je –1, pa je graf funkcije g parabola oblika $\cap$ (vidjeti Sliku 1.)



Slika 1.

Iz gornje slike očitamo da je rješenje nejednadžbe $2\cdot\check{z}-\check{z}^2>0$ interval $\langle 0,2\rangle$.

Dakle, rješenje zadatka je presjek intervala $\langle 1,+\infty\rangle$ i intervala $\langle 0,2\rangle$. Taj skup je interval $\langle 1,2\rangle$. Prema tome, $D_f=\langle 1,2\rangle$

2. Vrijednost izraza pod drugim korijenom mora biti jednaka nekom pozitivnom realnom broju ili nuli. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$\log_2\left(\frac{x+2}{2\cdot x}\right) \geq 0,$$

odnosno toj nejednadžbi ekvivalentnu nejednadžbu

$$\frac{x+2}{2\cdot x} \geq 2^0,$$
$$\frac{x+2}{2\cdot x} \geq 1.$$

Primijetimo da nejednakost $\frac{x+2}{2\cdot x} \geq 1$ povlači nejednakost $\frac{x+2}{2\cdot x} > 0$, pa nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost izraza pod logaritmom treba biti strogo pozitivna. Također, nejednakost $\frac{x+2}{2\cdot x} \geq 1$ povlači da je razlomak na lijevoj strani definiran i da je njegova vrijednost jednaka ili veća od 1. Stoga nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost nazivnika toga razlomka treba biti različita od nule.

Preostaje riješiti nejednadžbu $\frac{x+2}{2\cdot x} \geq 1$. Imamo redom:

$$\frac{x+2}{2\cdot x} - 1 \geq 0,$$
$$\frac{x+2-2\cdot x}{2\cdot x} \geq 0,$$
$$\frac{2-x}{2\cdot x} \geq 0.$$

Razlikujemo točno dva moguća slučaja:

I. $\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ 2\cdot x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq -2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle 0, 2]$;

II. $\begin{cases} 2-x \leq 0, \\ 2\cdot x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq -2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$ (prazan skup).

Dakle, rješenje zadatka je $D_g = \langle 0, 2]$

3. Odredimo najprije inverz zadane funkcije. (Prešutno pretpostavljamo da je ta funkcija bijekcija sa svoje domene na svoju sliku.) U pravilu funkcije *h* zamijenimo $h(š)$ s *y*, pa iz dobivene jednakosti izrazimo *š*. Imamo redom:

$$y = \frac{e^{š}}{2\cdot e^{š}+1},$$
$$\left(2\cdot e^{š}+1\right)\cdot y = e^{š},$$

$$
\begin{aligned}
&2\cdot e^{š}\cdot y + y = e^{š},\\
&2\cdot e^{š}\cdot y - e^{š} = -y, \quad / :(-1)\\
&-2\cdot e^{š}\cdot y + e^{š} = y,\\
&e^{š}\cdot(1-2\cdot y) = y,\\
&e^{š} = \frac{y}{1-2\cdot y}, \quad / \ln\\
&š = \ln\left(\frac{y}{1-2\cdot y}\right).
\end{aligned}
$$

Tako smo dobili:

$$h^{-1}(š) = \ln\left(\frac{š}{1-2\cdot š}\right).$$

Odredimo prirodnu domenu te funkcije. Da bi logaritamska funkcija bila definirana, vrijednost logaritmanda mora biti strogo pozitivna. Zbog toga dobivamo uvjet:

$$\frac{š}{1-2\cdot š} > 0.$$

Primijetimo da nejednakost $\frac{š}{1-2\cdot š} > 0$ povlači da je razlomak na lijevoj strani nejednakosti definiran i da je njegova vrijednost strogo pozitivan realan broj. Stoga nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost nazivnika toga razlomka mora biti različita od nule.

Preostaje riješiti nejednadžbu $\frac{š}{1-2\cdot š} > 0$. Razlikujemo točno dva moguća slučaja:

I. $\begin{cases} š > 0, \\ 1-2\cdot š > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} š > 0, \\ -2\cdot š > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} š > 0, \\ š < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow š \in \left\langle 0,\ \frac{1}{2} \right\rangle;$

II. $\begin{cases} š < 0, \\ 1-2\cdot š < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} š < 0, \\ -2\cdot š < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} š < 0, \\ š > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$ (prazan skup).

Odatle slijedi da je traženi skup $D_{h^{-1}} = \left\langle 0,\ \frac{1}{2} \right\rangle$.

4. Primijenimo jednakost $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, za svaku bijekciju *f*. To znači da je inverz zadane funkcije upravo funkcija *f*. Odredimo taj inverz postupkom opisanim u rješenju Zadatka 3. Imamo redom:

$$y = \frac{2^{č}}{2^{č+1}-1},$$

$$\left(2^{\check{c}+1}-1\right)\cdot y=2^{\check{c}},$$
$$2^{\check{c}+1}\cdot y-y=2^{\check{c}},$$
$$2^{\check{c}}\cdot 2^{1}\cdot y-2^{\check{c}}=y,$$
$$2^{\check{c}}\cdot(2\cdot y-1)=y,$$
$$2^{\check{c}}=\frac{y}{2\cdot y-1},\quad /\log_2$$
$$\check{c}=\log_2\left(\frac{y}{2\cdot y-1}\right).$$

Tako smo dobili:

$$f(\check{c})=\log_2\left(\frac{\check{c}}{2\cdot\check{c}-1}\right).$$

Odredimo prirodnu domenu te funkcije. Da bi logaritamska funkcija bila definirana, vrijednost logaritmanda mora biti strogo pozitivna. To znači da mora vrijediti nejednakost:

$$\frac{\check{c}}{2\cdot\check{c}-1}>0.$$

Primijetimo da nejednakost $\frac{\check{c}}{2\cdot\check{c}-1}>0$ povlači da je razlomak na lijevoj strani definiran i da je njegova vrijednost strogo pozitivna. To znači da nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost nazivnika toga razlomka mora biti različita od nule.

Preostaje riješiti nejednadžbu $\frac{\check{c}}{2\cdot\check{c}-1}>0$. Razlikujemo točno dva moguća slučaja:

I. $\begin{cases}\check{c}>0,\\ 2\cdot\check{c}-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\check{c}>0,\\ 2\cdot\check{s}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\check{c}>0,\\ \check{c}>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\check{c}\in\left\langle\frac{1}{2},\ +\infty\right\rangle;$

II. $\begin{cases}\check{c}<0,\\ 2\cdot\check{c}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\check{c}<0,\\ 2\cdot\check{c}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\check{c}<0,\\ \check{c}<\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\check{c}\in\langle-\infty,\ 0\rangle.$

Stoga je rješenje zadatka unija intervala $\langle-\infty,0\rangle$ i intervala $\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$. Ta unija je jednaka skupu koji se dobije kad se iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ „izbaci" segment $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Dakle,

$$D_f=\langle-\infty,0\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle=\mathbb{R}\setminus\left[0,\ \frac{1}{2}\right].$$

5. Grupirajmo prvi i treći, te drugi i četvrti član u pravilu zadanoga polinoma. Imamo redom:

$$p(đ)=(đ^3-đ)+(-2\cdot đ^2+2)=đ\cdot\left(đ^2-1\right)-2\cdot\left(đ^2-1\right)=\left(đ-2\right)\cdot\left(đ^2-1\right)=\left(đ-2\right)\cdot\left(đ-1\right)\cdot\left(đ+1\right).$$

Sve nultočke zadanoga polinoma odredimo tako da izraz u svakoj pojedinoj zagradi izjednačimo s nulom:

$$\left((đ-2=0)\vee(đ-1=0)\vee(đ+1=0)\right)\Leftrightarrow\left((đ=2)\vee(đ=1)\vee(đ=-1)\right)$$

(S $\vee$ je označen logički operator „ili“.) Dakle, traženi skup je $N_p=\{-1,1,2\}$.

6. Grupirajmo članove u pravilu zadanoga polinoma tako da zasebno grupiramo prvi i posljednji član, a zasebno drugi i treći član. Primijenimo formule za rastav na faktore zbroja kubova, odnosno razlike kvadrata. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
p(w)&=(2\cdot w^3+2)+(-3\cdot w^2-3\cdot w)=2\cdot(w^3+1)-3\cdot w\cdot(w+1)=\\
&=2\cdot(w+1)\cdot(w^2-w+1)-3\cdot w\cdot(w+1)=(w+1)\cdot\left[2\cdot(w^2-w+1)-3\cdot w\right]=\\
&=(w+1)\cdot(2\cdot w^2-2\cdot w+2-3\cdot w)=(w+1)\cdot(2\cdot w^2-5\cdot w+2)=\\
&=(w+1)\cdot(2\cdot w^2-4\cdot w-w+2)=(w+1)\cdot\left[(2\cdot w^2-4\cdot w)+(-w+2)\right]=\\
&=(w+1)\cdot\left[2\cdot w\cdot(w-2)-(w-2)\right]=(w+1)\cdot(w-2)\cdot(2\cdot w-1).
\end{aligned}$$

Preostaje odrediti nultočke polinoma p. Izraz u svakoj pojedinoj zagradi izjednačimo s nulom:

$$\left((w+1=0)\vee(w-2=0)\vee(2\cdot w-1=0)\right)\Leftrightarrow\left((w=-1)\vee(w=2)\vee\left(w=\frac{1}{2}\right)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N_p=\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}$.

7. Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma. Imamo redom:

$$\begin{array}{l}
\left(t^4-t^3-7\cdot t^2+t+6\right):\left(t^2-1\right)=t^2-t-6\\
\underline{-\left(t^4-t^2\right)}\\
-t^3-6\cdot t^2+t+6\\
\underline{-\left(-t^3+t\right)}\\
-6\cdot t^2+6\\
\underline{-\left(-6\cdot t^2+6\right)}\\
0
\end{array}$$

Tako smo dobili da polinom p_1 pri dijeljenju polinomom p_2 daje količnik $q(t)=t^2-t-6$ i ostatak 0. Budući da je ostatak pri dijeljenju jednak 0, zaključujemo da je polinom p_1 djeljiv polinomom p_2.

Iz provedenoga dijeljenja izravno slijedi jednakost $p_1 = p_2 \cdot q$, odnosno jednakost

$$t^4 - t^3 - 7 \cdot t^2 + t + 6 = \left(t^2 - 1\right) \cdot \left(t^2 - t - 6\right).$$

Nultočke polinoma p_1 su sva realna rješenja jednadžbe $t^4 - t^3 - 7 \cdot t^2 + t + 6 = 0$. Zbog gornje jednakosti, ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

$$\left(t^2 - 1\right) \cdot \left(t^2 - t - 6\right) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Stoga imamo:

$$\left(\left(t^2 - 1\right) \cdot \left(t^2 - t - 6\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\left(t^2 - 1 = 0\right) \vee \left(t^2 - t - 6 = 0\right)\right) \Leftrightarrow \left((t = -1) \vee (t = -1) \vee (t = -2) \vee (t = 3)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N_p = \{-2, -1, 1, 3\}$.

8. Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma. Imamo redom:

$$\begin{array}{l}
\left(-12 \cdot u^5 - u^4 + 13 \cdot u^3 + u^2 - u\right) : \left(u^3 - u\right) = -12 \cdot u^2 - u + 1 \\
\underline{-\left(-12 \cdot u^5 + 12 \cdot u^3\right)} \\
-u^4 + u^3 + u^2 - u \\
\underline{-\left(-u^4 + u^2\right)} \\
u^3 - u \\
\underline{-\left(u^3 - u\right)} \\
0
\end{array}$$

Tako smo dobili da polinom p_1 pri dijeljenju polinomom p_2 daje količnik $q(u) = -12 \cdot u^2 - u + 1$ i ostatak 0. Budući da je ostatak pri dijeljenju jednak 0, zaključujemo da je polinom p_1 djeljiv polinomom p_2.

Iz provedenoga dijeljenja izravno slijedi jednakost $p_1 = p_2 \cdot q$, odnosno jednakost

$$-12 \cdot u^5 - u^4 + 13 \cdot u^3 + u^2 - u = \left(u^3 - u\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right).$$

Nultočke polinoma p_1 su sva realna rješenja jednadžbe $-12 \cdot u^5 - u^4 + 13 \cdot u^3 + u^2 - u = 0$. Zbog gornje jednakosti, ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

$$\left(u^3 - u\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right) = 0,$$

odnosno jednadžbi

$$u \cdot \left(u^2 - 1\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right) = 0.$$

Umnožak triju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Stoga imamo:

$$\left(u\cdot\left(u^2-1\right)\cdot\left(-12\cdot u^2-u+1\right)=0\right)\Leftrightarrow\left((u=0)\vee\left(u^2-1=0\right)\vee\left(-12\cdot u^2-u+1=0\right)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((u=0)\vee(u=-1)\vee(u=-1)\vee\left(u=-\frac{1}{3}\right)\vee\left(u=\frac{1}{4}\right)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N_p=\left\{-1,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},1\right\}$.

9. **a)** Racionalna funkcija je definirana za one vrijednosti nezavisne varijable za koje je vrijednost nazivnika te funkcije različita od nule. Skup svih tih vrijednosti – a to je upravo tražena prirodna domena - najbrže i najlakše dobijemo tako da iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ „izbacimo“ sve realne nultočke nazivnika zadane funkcije.

Iz jednadžbe $2+\alpha-\alpha^2=0$ slijedi $\alpha_1=-1,\ \alpha_2=2$. Stoga je traženi skup $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.

b) Podijelimo brojnik zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom. Dobivamo:

$$\begin{array}{l}
\left(\alpha^5+2\right):\left(-\alpha^2+\alpha+2\right)=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5\\
\underline{-\left(\alpha^5-\alpha^4-2\cdot\alpha^3\right)}\\
\alpha^4+2\cdot\alpha^3+2\\
\underline{-\left(\alpha^4-\alpha^3-2\cdot\alpha^2\right)}\\
3\cdot\alpha^3+2\cdot\alpha^2+2\\
\underline{-\left(3\cdot\alpha^3-3\cdot\alpha^2-6\cdot\alpha\right)}\\
5\cdot\alpha^2+6\cdot\alpha+2\\
\underline{-\left(5\cdot\alpha^2-5\cdot\alpha-10\right)}\\
11\cdot\alpha+12
\end{array}$$

Dakle, dijeljenjem brojnika zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom dobiva se količnik $q(\alpha)=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5$ i ostatak $r(\alpha)=11\cdot\alpha+12$. Analogno kao u prethodnim zadacima odatle slijedi:

$$\alpha^5+2=\left(-\alpha^2+\alpha+2\right)\cdot\left(-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5\right)+\left(11\cdot\alpha+12\right).$$

Podijelimo obje strane ove jednakosti s $-\alpha^2+\alpha+2$. Dobijemo:

$$\frac{\alpha^5+2}{-\alpha^2+\alpha+2}=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5+\frac{11\cdot\alpha+12}{-\alpha^2+\alpha+2},$$

odnosno

$$f(\alpha) = -\alpha^3 - \alpha^2 - 3 \cdot \alpha - 5 + \frac{11 \cdot \alpha + 12}{-\alpha^2 + \alpha + 2}.$$

Dobiveni prikaz je upravo traženi prikaz.

10. a) Postupimo analogno kao u Zadatku 9.a). Riješimo jednadžbu $\beta^3 - 16 \cdot \beta = 0$. Imamo redom:

$$\beta^3 - 16 \cdot \beta = 0,$$
$$\beta \cdot \left(\beta^2 - 16\right) = 0,$$
$$\beta \cdot (\beta - 4) \cdot (\beta + 4) = 0.$$

Odatle slijedi $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 4,\ \beta_3 = -4.$ Stoga je traženi skup $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$.

b) Podijelimo brojnik zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom. Dobivamo:

$$\begin{array}{l}
\left(-\beta^5 + 3\right) : \left(\beta^3 - 16 \cdot \beta\right) = -\beta^2 - 16 \\
\underline{-\left(-\beta^5 + 16 \cdot \beta^3\right)} \\
-16 \cdot \beta^3 + 3 \\
\underline{-\left(-16 \cdot \beta^3 + 256 \cdot \beta\right)} \\
-256 \cdot \beta + 3
\end{array}$$

Dakle, dijeljenjem brojnika zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom dobiva se količnik $q(\beta) = -\beta^2 - 16$ i ostatak $r(\beta) = -256 \cdot \beta + 3$. Analogno kao u prethodnim zadacima odatle slijedi:

$$-\beta^5 + 3 = \left(\beta^3 - 16 \cdot \beta\right) \cdot \left(-\beta^2 - 16\right) + \left(-256 \cdot \beta + 3\right).$$

Podijelimo obje strane ove jednakosti s $\beta^3 - 16 \cdot \beta$. Dobijemo:

$$\frac{-\beta^5 + 3}{\beta^3 - 16 \cdot \beta} = -\beta^2 - 16 + \frac{-256 \cdot \beta + 3}{\beta^3 - 16 \cdot \beta},$$

odnosno

$$g(\beta) = -\beta^2 - 16 + \frac{-256 \cdot \beta + 3}{\beta^3 - 16 \cdot \beta}.$$

Dobiveni prikaz je upravo traženi prikaz.