Napomena: Za određivanje inverza regularne matrice reda 2 primijenite eksplicitnu formulu navedenu u napomeni na stranici 11. *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike*. Inverze matrica reda 3 računajte pomoću odgovarajuće adjunkte.

1. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $B=\frac{1}{2}\cdot\left(A\cdot A^T+A^T\cdot A\right)$.

2. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $C=\frac{1}{10}\cdot\left(A+B\right)\cdot(A-B)$.

3. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $B=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(A+A^{-1}\right)\right]^2$.

4. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu: $A\cdot\left(A^T-6\cdot X\right)=E_2$.

5. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}$, pri čemu je $a\in\mathbb{R}$ parametar. Determinanta matrice A jednaka je 7. Izračunajte matricu $B=(7\cdot A^{-1})^T$.

6. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. Odredite vrijednost $a\in\mathbb{R}$ tako da determinanta matrice $C=A^3\cdot B^2$ bude jednaka 1.

7. Odredite vrijednost $x\in\mathbb{R}$ za koju je determinanta matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ jednaka 1.

Potom izračunajte inverz tako dobivene matrice.

8. Ako je $6\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, izračunajte matricu $B=\frac{1}{3}\cdot\left(A^T\right)^2$.

9. Ako je $\left(A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, izračunajte matricu $B=A-A^T$.

REZULTATI ZADATAKA

1. $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

2. $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$

3. $B=E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $X=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

5. $B=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$

6. $a=1$.

7. $x=-1,\ A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

8. $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$

9. $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. *Uputa*: Lako dobijemo $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pa su $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Zbog toga je $B = \frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot A^T + A^T \cdot A\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot A \cdot A^T\right) = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. *Uputa*: Lako dobijemo $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $A - B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Zbog toga je $C = \frac{1}{10} \cdot 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Imamo redom:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = A \Rightarrow$$

$$B = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(A + A^{-1}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(A + A\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A\right)^2 = A^2 = A \cdot A =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

4. Prema definiciji inverza matrice vrijedi jednakost $A \cdot A^{-1} = E_2$. Prema zadanoj jednadžbi vrijedi jednakost $A \cdot \left(A^T - 6 \cdot X\right) = E_2$. Zbog jedinstvenosti inverza matrice, iz tih dviju jednakosti slijedi $A^{-1} = A^T - 6 \cdot X$. Izrazimo X iz ove jednakosti:

$$A^{-1} = A^T - 6 \cdot X \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot X = A^T - A^{-1} \Leftrightarrow$$
$$X = \frac{1}{6} \cdot \left(A^T - A^{-1}\right).$$

Za zadanu matricu A izračunajmo A^T i A^{-1}. Odmah dobijemo:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

pa je konačno:

$$X = \frac{1}{6} \cdot \left(A^T - A^{-1}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 3-3 & 4-(-2) \\ 2-(-4) & 3-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Determinanta matrice A jednaka je:

$$\det(A) = a \cdot (a+2) - (a+1) \cdot (a-1) = a^2 + 2 \cdot a - (a^2 - 1) = a^2 + 2 \cdot a - a^2 + 1 = 2 \cdot a + 1.$$

Prema uvjetu zadatka, ta determinanta mora biti jednaka 7. Tako dobivamo linearnu jednadžbu 1. stupnja s jednom nepoznanicom

$$2 \cdot a + 1 = 7.$$

Jedino rješenje te jednadžbe je $a = 3$. Stoga je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3-1 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tako konačno dobivamo:

$$B = \left(7 \cdot A^{-1}\right)^T = \left(7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Prema Binet-Cauchyjevu poučku vrijedi:

$$\det(C) = \det(A^3 \cdot B^2) = \det(A^3) \cdot \det(B^2) = \left[\det(A)\right]^3 \cdot \left[\det(B)\right]^2.$$

Lako izračunamo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 2 \cdot 0 = a - 0 = a,$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1,$$

pa uvrštavanjem u izraz za $\det(C)$ dobivamo:

$$\det(C) = a^3 \cdot 1^2 = a^3.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vrijednost mora biti jednaka 1. Stoga dobivamo kubnu jednadžbu

$$a^3 = 1.$$

Zbog pretpostavke $a \in \mathbb{R}$, odatle slijedi $a = 1$.

7. Determinantu matrice A najbrže je izračunati razvojem po prvom stupcu. Tako odmah dobivamo:

$$\det(A) = (-1) \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -x \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = -x \cdot 1 = -x.$$

Tako iz jednadžbe $\det(A)=1$ slijedi $-x=1$, odnosno $x=-1$.

Preostaje izračunati inverz matrice $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$. Redom računamo elemente adjunkte ove matrice:

$$b_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)=-1 \quad b_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-5)=5 \quad b_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)=-2$$

$$b_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1=-1 \quad b_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 0=0 \quad b_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 0=0$$

$$b_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 1=1 \quad b_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2=-2 \quad b_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1=1$$

Stoga je

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

8. Neka je $C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. Iz jednakosti $6\cdot A^{-1}=C$ invertiranjem slijedi $6^{-1}\cdot\left(A^{-1}\right)^{-1}=C^{-1}$, odnosno $\frac{1}{6}\cdot A=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix}$, a odavde je $A=(-1\cdot)\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$. Sada se lako izračuna $B=\frac{1}{3}\cdot\left(A^T\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}9 & 6\\ 12 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}$.

9. *Uputa*: Neka je $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Iz jednakosti $\left(A^{-1}\right)^T=C$ transponiranjem slijedi $\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^T=C^T$, odnosno $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$. Odavde invertiranjem kao u Zadatku 7. slijedi $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Sada se lako izračuna

$$B=A-A^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}= =\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$