TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama (grupe D i E)

poglavlje: KOMPLEKSNI BROJEVI

Napomena: U svim zadacima koristi se skraćena oznaka: cis $\varphi := \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$.

1. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot y\cdot i$, $z_2 = \overline{\left(-\sqrt{3}\cdot i - 1\right)^7}$ i $z_3 = \left(2\cdot \text{cis}\frac{13\cdot\pi}{18}\right)^6$.

Odredite $x, y \in \mathbf{R}$ tako da vrijedi jednakost $z_1 = \frac{z_2}{z_3}$.

Rješenje: **Korak 1.** Zapišimo broj $z_4 := -\sqrt{3}\cdot i - 1$ u trigonometrijskom obliku.

Korak 1.a) Apsolutna vrijednost (modul) broja z_4 jednaka je

$$r_4 = \sqrt{\left[\text{Re}(z_4)\right]^2 + \left[\text{Im}(z_4)\right]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2\,.$$

Korak 1.b) Broju z_4 pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine je $Z_4 = \left(\text{Re}(z_4), \text{Im}(z_4)\right)$, odnosno $Z_4 = \left(-1, -\sqrt{3}\right)$. Ona se nalazi u <u>trećem</u> kvadrantu kompleksne (Gaussove) ravnine.

Korak 1.c) Rješenje trigonometrijske jednadžbe

$$\text{tg}\, x = \left|\frac{\text{Im}(z_4)}{\text{Re}(z_4)}\right|,$$

tj.

$$\text{tg}\, x = \left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right|,$$

tj.

$$\text{tg}\, x = \sqrt{3}$$

u <u>prvom</u> kvadrantu je kut $x = 60°$. Budući da iz Koraka 1.b) znamo da se točka pridružena broju z_4 nalazi u trećem kvadrantu, argument φ_4 toga broja dobit ćemo tako da na 180° dodamo mjeru kuta x:

$$\varphi_4 = 180° + x,$$
$$\varphi_4 = 180° + 60°,$$
$$\varphi_4 = 240°.$$

Korak 1.d) Trigonometrijski zapis broja z_4 dobivamo koristeći rezultate Koraka 1.a) i 1.d):

$$z_4 = 2\cdot(\cos 240° + i\cdot\sin 240°)$$

ili skraćeno:

$$z_4 = 2 \cdot \text{cis } 240°.$$

Korak 2. Računamo broj z_2 koristeći de Moivrèovu formulu za potenciranje kompleksnoga broja zapisanoga u trigonometrijskom obliku, te rezultat dobiven na kraju Koraka 1.

Korak 2.a)

$$z_2 = \overline{(z_4)^7} = \overline{\left(2 \cdot \text{cis } 240°\right)^7} = \overline{2^7 \cdot \text{cis}(240° \cdot 7)} = \overline{2^7 \cdot \text{cis}(1680°)}$$

Korak 2.b) Kut od 1680° ne pripada intervalu [0°, 360°⟩, pa ga moramo svesti na neki kut iz toga intervala. To radimo tako da taj kut cjelobrojno podijelimo s 360° i pogledamo cjelobrojni ostatak dobiven pri tom dijeljenju:

1680 : 360 = 4 i ostatak 240°.

Ovu jednakost kraće pišemo kao:

$$1680° \equiv 240° \text{ (mod } 360°).$$

Dakle,

$$z_2 = \overline{2^7 \cdot \text{cis}(240°)}.$$

Korak 2.c) Prigodom konjugiranja kompleksnoga broja zapisanoga u trigonometrijskom obliku njegova apsolutna vrijednost ostaje nepromijenjena, dok se novi argument računa iz izraza:

novi argument = 360° – stari argument.

U našem slučaju je:

$$z_2 = 2^7 \cdot \text{cis}(360° - 240°),$$

odnosno

$$z_2 = 2^7 \cdot \text{cis}(120°).$$

Korak 3. Računamo vrijednost broja z_3. Taj broj je već zapisan u trigonometrijskom obliku, pa odmah možemo primijeniti de Moivrèovu formulu za potenciranje kompleksnoga broja.

Korak 3.a) $z_3 = \left(2 \cdot \text{cis} \dfrac{13 \cdot \pi}{18}\right)^6 = 2^6 \cdot \text{cis}\left(\dfrac{13 \cdot \pi}{18} \cdot 6\right) = 2^6 \cdot \text{cis} \dfrac{13 \cdot \pi}{3}$.

Korak 3.b) Kut od $\dfrac{13 \cdot \pi}{3}$ radijana izrazimo u stupnjevima. Pretvorbu radimo tako da kut iskazan u radijanima pomnožimo sa $\dfrac{180}{\pi}$. U našem slučaju dobivamo:

$$\frac{13 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 13 \cdot 60 = 780°.$$

Korak 3.c) Kut od 780° ne pripada intervalu [0°, 360°⟩, pa ga moramo svesti na neki kut iz toga intervala. To radimo tako da 780 cjelobrojno podijelimo s 360 i pogledamo cjelobrojni ostatak pri tome dijeljenju:

$$780° : 360° = 2 \text{ i ostatak } 60°,$$

što kraće zapisujemo kao:

$$780° \equiv 60° \pmod{360°}.$$

Korak 3.d) Koristeći rezultat dobiven na kraju Koraka 3.c) zaključujemo da je

$$z_3 = 2^6 \cdot \text{cis } 60°.$$

Korak 4. Podijelimo brojeve z_2 i z_3. Prilikom dijeljenja dvaju kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku, njihove apsolutne vrijednosti se podijele, a a argumenti se oduzmu. Dobivamo:

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2^7 \cdot \text{cis } 120°}{2^6 \cdot \text{ cis } 60°} = \frac{2^7}{2^6} \cdot \text{cis}(120° - 60°) = 2 \cdot \text{cis } 60° .$$

Korak 5. Da bismo mogli usporediti kompleksne brojeve z_1 (zapisanoga u algebarskom obliku) i $\frac{z_2}{z_3}$ (zapisanoga u trigonometrijskom obliku), potonji kompleksan broj moramo zapisati u algebarskom obliku, što je bitno jednostavnije negoli zapisati broj z_1 u trigonometrijskom obliku. Imamo:

$$\frac{z_2}{z_3} = 2 \cdot \text{cis } 60° = 2 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} \cdot i .$$

Korak 6. Kompleksni brojevi z_1 i $\frac{z_2}{z_3}$ bit će međusobno jednaki ako i samo ako istodobno budu međusobno jednaki realni dijelovi tih brojeva, odnosno međusobno jednaki imaginarni dijelovi tih brojeva.

Korak 6.a) Realni dio broja z_1 je $\text{Re}(z_1) = \frac{1}{2} \cdot x$, a imaginarni dio broja z_1 je $\text{Im}(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y$.

Korak 6.b) Realni dio broja $\frac{z_2}{z_3}$ je $\text{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = 1$, a imaginarni dio broja z_1 je $\text{Im}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \sqrt{3}$.

Korak 6.c) Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $x = 2$, a iz druge $y = 3$. Dakle, traženi brojevi su $x = 2$ i $y = 3$.

2. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = (x + y) + (x - y) \cdot i$, $z_2 = \overline{\left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{43 \cdot \pi}{24}\right)^{12}}$ i $z_3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^{15}$. Odredite $x, y \in \mathbf{R}$ tako da vrijedi jednakost $z_1 = z_2 \cdot z_3$.

Naputak i rezultat: Primjenom de Moivrèove formule za potenciranje kompleksnoga broja dobiva se $z_2 = \frac{1}{2^{12}} \cdot \operatorname{cis} 90°$. Budući da je $\sqrt{3} - i = 2 \cdot \operatorname{cis} 330°$, slijedi da je $z_3 = 2^{15} \cdot \operatorname{cis} 270°$. Stoga je $z_2 \cdot z_3 = 8 \cdot \operatorname{cis} 360° = 8 \cdot \operatorname{cis} 0° = 8$. Tako dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$ čije rješenje je $x = y = 4$.

3. Skicirajte u Gaussovoj ravnini skup $S = \left\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(z) = -2 \cdot \operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)\right\}$.

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = x + y \cdot i$, pri čemu su $x, y \in \mathbf{R}$. Želimo pronaći vezu između brojeva x i y, odnosno kako vrijednost broja y ovisi o vrijednosti broja x. U tu svrhu koristimo uvjet kojim je definiran skup S.

Korak 1. Realni dio kompleksnoga broja $z = x + y \cdot i$ jednak je $\operatorname{Re}(z) = x$.

Korak 2. Konjugat kompleksnoga broja $z = x + y \cdot i$ jednak je $\overline{z} = x - y \cdot i$.

Korak 3. Imaginarni dio konjugata kompleksnoga broja $z = x + y \cdot i$ jednak je $\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right) = -y$.

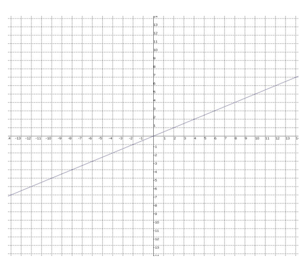
Korak 4. Prema uvjetu kojim je definiran skup S, mora vrijediti jednakost $\operatorname{Re}(z) = -2 \cdot \operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)$. Uvrstimo u tu jednakost rezultate dobivene na kraju Koraka 1. i Koraka 3.:

$$x = -2 \cdot (-y),$$

otkuda je

$$y = \frac{1}{2} \cdot x .$$

Dakle, traženi skup točaka tvore sve točke pravca $p \ldots\ y = \frac{1}{2} \cdot x$ (vidjeti Sliku 1.).



Slika 1.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama (grupe D i E)

4. Skicirajte u Gaussovoj ravnini skup $S = \left\{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im}(-2 \cdot z) + \operatorname{Re}\left(-\overline{z}\right) \geq 0 \right\}$.

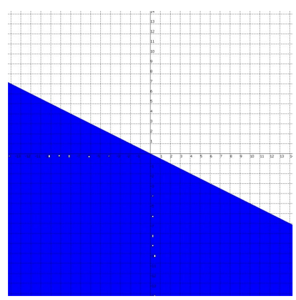
<u>*Naputak i rezultat*</u>: Pretpostavimo da je $z = x + y \cdot i$, pri čemu su $x, y \in \mathbf{R}$. Tada je $\operatorname{Im}(-2 \cdot z) = -2 \cdot y$, a $\operatorname{Re}\left(-\overline{z}\right) = -x$, pa uvrštavanjem u uvjet kojim je definiran skup S dobivamo nejednakost

$$-2 \cdot y - x \geq 0,$$

otkuda je

$$y \leq -\frac{1}{2} \cdot x .$$

Stoga traženi skup točaka tvore sve točke poluravnine ograničene odozgo s pravcem $y = -\frac{1}{2} \cdot x$ (vidjeti Sliku 2.)



Slika 2.

5. Neka su z_0, z_1 i z_2 međusobno različita rješenja jednadžbe $z^3 = 2 + 2 \cdot i$. S točnošću od 10^{-5} izračunajte vrijednost izraza $z_0^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1 \cdot z_2^2$.

<u>*Rješenje*</u>: Koristeći de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja, izračunat ćemo sve treće korijene (zapisane i u algebarskom i u trigonometrijskom obliku) iz kompleksnoga broja $z = 2 + 2 \cdot i$. Potom ćemo te korijene uvrstiti u navedeni izraz.

<u>**Korak 1.**</u> Zapišimo kompleksan broj $z_3 := 2 + 2 \cdot i$ u trigonometrijskom obliku.

Korak 1.a) Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnoga broja z_3 jednaka je

$$r_3 = \sqrt{\left[\operatorname{Re}(z_3)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}(z_3)\right]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

Korak 1.b) Broju z_3 pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine je

$$Z_3 = (\operatorname{Re}(z_3), \operatorname{Im}(z_3)) = (2, 2).$$

Ta točka nalazi se u <u>prvom</u> kvadrantu kompleksne (Gaussove) ravnine.

Korak 1.c) Rješenje trigonometrijske jednadžbe

$$\operatorname{tg} x = \left| \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Re}(z_3)} \right|,$$

tj.

$$\operatorname{tg} x = \left| \frac{2}{2} \right|,$$

tj.

$$\operatorname{tg} x = 1$$

u <u>prvom</u> kvadrantu je kut x = 45°. Budući da iz Koraka 1.b) znamo da se broju z_3 pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine nalazi u prvom kvadrantu, dobiveni kut ujedno je i argument kompleksnoga broja z_3. Dakle,

$$\varphi_3 := \arg z_3 = x = 45°.$$

Korak 1.d) Koristeći rezultate dobivene na kraju Koraka 1.a) i 1.c) zaključujemo da je zapis kompleksnoga broja z_3 u trigonometrijskom obliku

$$z_3 = \sqrt{8} \cdot \operatorname{cis} 45° .$$

<u>**Korak 2.**</u> Prema de Moivrèovoj formuli za korjenovanje kompleksnoga broja, sva rješenja algebarske jednadžbe

$$z^3 = 2 + 2 \cdot i$$

dana su izrazom

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{45° + k \cdot 360°}{3} \right), \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2,$$

odnosno

$$z_k = \sqrt[6]{2^3} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{45°}{3} + k \cdot \frac{360°}{3} \right), \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2,$$

odnosno

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + k \cdot 120°), \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Stoga je:

– za $k = 0$: $z_0 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + 0 \cdot 120°) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} 15° = \sqrt{2} \cdot (\cos 15° + i \cdot \sin 15°) \approx 1.36603 + 0.36603 \cdot i$

– za $k = 1$: $z_1 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + 1 \cdot 120°) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} 135° = \sqrt{2} \cdot (\cos 135° + i \cdot \sin 135°) = -1 + i$

– za $k = 2$: $z_2 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + 2 \cdot 120°) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} 255° = \sqrt{2} \cdot (\cos 255° + i \cdot \sin 255°) \approx$
$\approx -0.36603 - 1.36603 \cdot i$

Korak 3. Transformirajmo izraz čiju vrijednost želimo izračunati tako da iz svakoga člana izlučimo faktor $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2$. Dobivamo:

$$z_0^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1 \cdot z_2^2 = (z_0 \cdot z_1 \cdot z_2) \cdot (z_0 + z_1 + z_2).$$

Izračunajmo zasebno svaki od tih dvaju faktora:

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis } 15°\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis } 135°\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis } 255°\right) = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \text{cis}(15° + 135° + 255°) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{cis}(405°)$$

Broj 405 pri dijeljenju s 360 daje ostatak 45, tj. vrijedi kongruencija $405° \equiv 45° \pmod{360°}$. Stoga je:

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{cis } 45°.$$

Korak 4. Koristeći algebarski zapis svakoga rješenja zadane jednadžbe dobivamo:
$z_0 + z_1 + z_2 = (1.36603 + 0.36603 \cdot i) + (-1 + i) + (-0.36603 - 1.36603 \cdot i) = (1.36603 - 1 - 0.36603) + i \cdot$
$\cdot (0.36603 + 1 - 1.36603) = 0 + 0 \cdot i = 0.$

Korak 5. Koristeći rezultate dobivene na krajevima Koraka 3. i 4. dobivamo:

$$z_0^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1 \cdot z_2^2 = (z_0 \cdot z_1 \cdot z_2) \cdot (z_0 + z_1 + z_2) = (\sqrt{2} \cdot \text{cis } 45°) \cdot 0 = 0.$$

6. Odredite ukupan broj svih međusobno različitih rješenja algebarske jednadžbe $z^9 = -i$ koja pripadaju intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{4 \cdot \pi}{3} \right]$. Zapišite u algebarskom obliku umnožak najmanjega i najvećega od tih rješenja.

Naputak i rezultat: Trigonometrijski oblik broja $z_{13} = -i$ je $z_{13} = \text{cis } 270°$. Stoga su sva rješenja zadane jednadžbe dana izrazom

$$z_k = \text{cis}\left(\frac{270° + k \cdot 360°}{9}\right) = \text{cis}(30° + k \cdot 40°), \text{ za } k = 0, 1, \ldots, 8, 9.$$

Budući da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \text{ rad} &= 30° \\ \frac{4 \cdot \pi}{3} \text{ rad} &= 240° \end{aligned},$$

tražimo ukupan broj cijelih brojeva iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} koji zadovoljavaju nejednakost

$$30° < 30° + k \cdot 40° \le 240°,$$

tj. nejednakost

$$0° < k \cdot 40° \le 210°,$$

odnosno nejednakost

$$0 < k \leq 5.25.$$

Ukupno je 5 takvih cijelih brojeva: to su 1, 2, 3, 4 i 5. Najmanji od njih – to je broj 1 – daje i najmanje rješenje polazne jednadžbe koje pripada zadanom intervalu:

$$x_1 = \text{cis}(30° + 1 \cdot 40°) = \text{cis } 70°.$$

Najveći od njih – to je broj 5 – daje i najveće rješenje polazne jendadžbe koje pripada zadanom intervalu:

$$x_5 = \text{cis}(30° + 5 \cdot 40°) = \text{cis } 230°.$$

Stoga je traženi umnožak jednak

$$x_1 \cdot x_5 = \text{cis}(70° + 230°) = \text{cis } 300° = \cos 300° + i \cdot \sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\ .$$

poglavlje: SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

1. Za koje vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a \cdot x - 3 \cdot y &= 1 - a \\ 12 \cdot x - a \cdot y &= -12 \end{aligned}$$

a) nema rješenja;
b) ima jedinstveno rješenje (i koje je to rješenje);
c) ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja?

Rješenje: Zadani sustav je sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Formirajmo determinantu sustava D, te dvije pomoćne determinante D_x i D_y.

Korak 1. Determinanta sustava D je determinanta reda 2. To je shema oblika

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

gdje su:

- a_{11} = koeficijent uz nepoznanicu x u 1. jednadžbi;
- a_{12} = koeficijent uz nepoznanicu y u 1. jednadžbi;
- a_{21} = koeficijent uz nepoznanicu x u 2. jednadžbi;
- a_{22} = koeficijent uz nepoznanicu y u 2. jednadžbi.

U našem je slučaju:

$$a_{11} = a,\ a_{12} = -3,\ a_{21} = 12,\ a_{22} = -a$$

pa dobivamo:

$$D = \begin{vmatrix} a & -3 \\ 12 & -a \end{vmatrix} = a \cdot (-a) - 12 \cdot (-3) = 36 - a^2.$$

Korak 2. Prvu pomoćnu determinantu D_x dobijemo tako da prvi stupac determinante D zamijenimo stupcem u kojemu se nalaze slobodni članovi sustava. Drugim riječima, determinanta D_x je je shema oblika

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

gdje su:

– b_1 = slobodni član u 1. jednadžbi;
– a_{12} = koeficijent uz nepoznanicu y u 1. jednadžbi;
– b_2 = slobodni član u 2. jednadžbi;
– a_{22} = koeficijent uz nepoznanicu y u 2. jednadžbi.

U našem je slučaju:

$$b_1 = 1 - a,\ a_{12} = -3,\ b_2 = -12,\ a_{22} = -a$$

pa dobivamo:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-a & -3 \\ -12 & -a \end{vmatrix} = (1-a)\cdot(-a) - (-12)\cdot(-3) = a^2 - a - 36 .$$

Korak 3. Drugu pomoćnu determinantu D_y dobijemo tako da drugi stupac determinante D zamijenimo stupcem u kojemu se nalaze slobodni članovi sustava. Drugim riječima, determinanta D_y je je shema oblika

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

gdje su:

– a_{11} = koeficijent uz nepoznanicu x u 1. jednadžbi;
– b_1 = slobodni član u 1. jednadžbi;
– a_{21} = koeficijent uz nepoznanicu x u 2. jednadžbi;
– b_2 = slobodni član u 2. jednadžbi.

U našem je slučaju:

$$a_{11} = a,\ b_1 = 1 - a,\ a_{21} = 12,\ b_2 = -12$$

pa dobivamo:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 12 & -12 \end{vmatrix} = a \cdot (-12) - 12 \cdot (1-a) = -12 .$$

<u>**Korak 4.**</u> Vrijednosti nepoznanica x i y računamo iz izraza

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza dobivenih na krajevima prethodnih triju koraka dobivamo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - a - 36}{36 - a^2} \\ y = \dfrac{12}{a^2 - 36} \end{cases} .$$

a) Polazni sustav nema rješenja za one vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ takve da je $D = 0$, a barem jedna od pomoćnih determinanti D_x i D_y različita od nule. Odredimo $a \in \mathbf{R}$ za koje je $D = 0$. Iz jednadžbe

$$D = 0,$$

odnosno

$$36 - a^2 = 0$$

slijedi $a_1 = -6$, $a_2 = 6$. Za $a = -6$ je $D_x = (-6)^2 - (-6) - 36 = 6 > 0$ i $D_y = -12 < 0$, a za $a = 6$ je $D_x = 6^2 - 6 - 36 = -6 < 0$ i $D_y = -12 < 0$. Dakle, polazni sustav nema rješenja za $a \in \{-6, 6\}$.

b) Polazni sustav ima jedinstveno rješenje za one vrijednosti $a \in \mathbf{R}$ takve da je $D \neq 0$. U **a)** podzadatku smo utvrdili da je $D = 0$ ako i samo ako je $a \in \{-6, 6\}$. Stoga je rješenje zadatka skup svih realnih brojeva različitih od -6 i 6. Kratko pišemo:

$$a \in \mathbf{R} \setminus \{-6, 6\}.$$

To jedinstveno rješenje dano je izrazom

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - a - 36}{36 - a^2} \\ y = \dfrac{12}{a^2 - 36} \end{cases}$$

c) Polazni sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja ako i samo ako su glavna i obje pomoćne determinante istodobno jednake nuli (za neki $a \in \mathbf{R}$). Međutim, $D_y = -12 \neq 0$ neovisno o vrijednosti $a \in \mathbf{R}$, pa zaključujemo da ni za jedan $a \in \mathbf{R}$ sustav nema beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja.

2. Pokažite da je za bilo koje vrijednosti realnoga parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ sustav linearnih jednadžbi

$$[\cos(2010 \cdot \alpha)] \cdot x + [\sin(2010 \cdot \alpha)] \cdot y = \cos(2010 \cdot \alpha)$$
$$[\sin(2010 \cdot \alpha)] \cdot x - [\cos(2010 \cdot \alpha)] \cdot y = \sin(2010 \cdot \alpha)$$

Cramerov i riješite ga.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Zadani sustav je Cramerov sustav ako i samo ako istodobno vrijede sljedeće tvrdnje:
- Ukupan broj jednadžbi sustava (m) jednak je ukupnom broju međusobno različitih nepoznanica (n).
- Determinanta sustava je različita od nule.

Polazni sustav linearnih jednadžbi je sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Stoga vrijedi prva tvrdnja ($m = n = 2$). Determinanta sustava jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} \cos(2010\cdot\alpha) & \sin(2010\cdot\alpha) \\ \sin(2010\cdot\alpha) & -\cos(2010\cdot\alpha) \end{vmatrix} = -\cos^2(2010\cdot\alpha) - \sin^2(2010\cdot\alpha) =$$
$$= -\left[\cos^2(2010\cdot\alpha) + \sin^2(2010\cdot\alpha)\right] = -1$$

Budući da je $D = -1 \neq 0$ neovisno o vrijednosti realnoga parametra α, vrijedi i druga tvrdnja. Time smo pokazali da je polazni sustav Cramerov sustav. Vrijednosti dviju pomoćnih determinanti su:

$$D_x = \begin{vmatrix} \cos(2010\cdot\alpha) & \sin(2010\cdot\alpha) \\ \sin(2010\cdot\alpha) & -\cos(2010\cdot\alpha) \end{vmatrix} = -1,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} \cos(2010\cdot\alpha) & \cos(2010\cdot\alpha) \\ \sin(2010\cdot\alpha) & \sin(2010\cdot\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{0}{1} = 0 \end{cases}$,

tj. $(x, y) = (1, 0)$.

3. <u>Isključivo koristeći metodu determinanti</u> odredite vrijednost realnoga parametra $t \in \mathbf{R}$ tako da sustav

$$x + t \cdot y + 3 \cdot z = 0$$

$$-t \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot z = 0$$
$$3 \cdot x - 5 \cdot y + z = 0$$

a) nema rješenja;
b) ima točno jedno rješenje (i odredite to rješenje);
c) ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja.

Rješenje: Zadani sustav je sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice. Formirajmo determinantu sustava i tri pomoćne determinante.

Korak 1. Determinanta sustava je determinanta reda 3. To je shema oblika

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

gdje su:

– a_{11} = koeficijent uz nepoznanicu x u 1. jednadžbi;
– a_{12} = koeficijent uz nepoznanicu y u 1. jednadžbi;
– a_{13} = koeficijent uz nepoznanicu z u 1. jednadžbi;
– a_{21} = koeficijent uz nepoznanicu x u 2. jednadžbi;
– a_{22} = koeficijent uz nepoznanicu y u 2. jednadžbi;
– a_{23} = koeficijent uz nepoznanicu z u 2. jednadžbi;
– a_{31} = koeficijent uz nepoznanicu x u 3. jednadžbi;
– a_{32} = koeficijent uz nepoznanicu y u 3. jednadžbi;
– a_{33} = koeficijent uz nepoznanicu z u 3. jednadžbi;

U našem je slučaju:

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = t,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = -t,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 3,\ a_{32} = -5,\ a_{33} = -t,$$

pa dobivamo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t & 3 \\ -t & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ovu determinantu najbrže računamo Saarusovim pravilom. Pokraj determinante nadopišemo njezina prva dva stupca. Izračunamo zbroj svih umnožaka trojki elemenata koje se nalaze na dijagonalama „sjeverozapad – jugoistok“. Potom izračunamo zbroj svih umnožaka trojki elemenata koje se nalaze na dijagonalama „jugozapad – sjeveroistok“. Naposljetku, od prvoga zbroja oduzmemo drugi.

Korak 1.a) Formiramo shemu

$$\begin{vmatrix} 1 & t & 3 \\ -t & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & t \\ -t & 4 \\ 3 & -5 \end{matrix}$$

Korak 1.b) Trojke elemenata na dijagonalama „sjeverozapad – jugoistok" su (1, 4, 1), (t, 2, 3) i (3, $-t$, -5), pa računamo zbroj:

$$1 \cdot 4 \cdot 1 + t \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-t) \cdot (-5) = 4 + 6 \cdot t + 15 \cdot t = 21 \cdot t + 4.$$

Korak 1.c) Trojke elemenata na dijagonalama „jugozapad – sjeveroistok" su (3, 4, 3), (–5, 2, 1) i (1, $-t$, t), pa računamo zbroj:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-t) \cdot t = 36 - 10 - t^3 = 26 - t^2.$$

Korak 1.d) Determinanta sustava D jednaka je razlici izraza dobivenih na krajevima Koraka 1.b) i 1.c):

$$D = 21 \cdot t + 4 - (26 - t^2) = t^2 + 21 \cdot t - 22.$$

Korak 2. Izračunajmo vrijednosti svih pomoćnih determinanti D_x, D_y i D_z. Svaku od tih determinanti dobijemo tako da odgovarajući stupac determinante D zamijenimo sa stupcem koji tvore slobodni koeficijenti (zapisani u istom poretku kao i jednadžbe sustava). No, stupac koji tvore slobodni koeficijenti je nulstupac (0, 0, 0), pa svaka od pomoćnih determinanti ima jedan stupac jednak nulstupcu (determinanta D_x ima prvi stupac jednak nulstupcu, determinanta D_y ima drugi stupac jednak nulstupcu, a determinanta D_z ima treći stupac jednak nulstupcu). Laplaceovim razvojem svake determinante upravo po tom nulstupcu (to smijemo napraviti jer determinantu uvijek smijemo razviti po bilo kojem retku ili stupcu) dobivamo da su sve tri pomoćne determinante jednake 0:

$$D_x = D_y = D_z = 0.$$

(Možemo koristiti i svojstvo determinante: Ako je jedan redak/stupac determinante jednak nulretku/nulstupcu, vrijednost determinante jednaka je 0.)

a) Zadani sustav neće imati niti jedno rješenje ako i samo ako je determinanta sustava D jednaka 0, a barem jedna od triju pomoćnih determinanti različita od nule. Međutim, na kraju Koraka 2. vidjeli smo da su sve tri pomoćne determinante jednake 0 neovisno o vrijednosti realnoga parametra t. Prema tome, ne možemo odabrati realan parametar $t \in \mathbf{R}$ tako da determinanta sustava D bude jednaka nuli, a da barem jedna od pomoćnih determinanti bude različita od nule.

b) Zadani sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je determinanta sustava D različita od nule. Stoga ćemo najprije utvrditi za koje je vrijednosti realnoga parametra t determinanta D jednaka nuli.

$$D = 0 \Rightarrow t^2 + 21 \cdot t - 22 = 0 \Rightarrow t_1 = -22,\ t_2 = 1.$$

Dakle, za $t \in \{-22, 1\}$ determinanta sustava D jednaka je 0. Za sve ostale vrijednosti realnoga parametra t determinanta sustava D je različita od 0. Stoga za t možemo odabrati bilo koji realan broj različit od –22 i različit od –1. To kratko pišemo ovako:

$$t \in \mathbf{R} \backslash \{-22, 1\}.$$

U tom slučaju jedinstveno rješenje sustava je

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{0}{t^2 + 21 \cdot t - 22} = 0 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{0}{t^2 + 21 \cdot t - 22} = 0, \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{0}{t^2 + 21 \cdot t - 22} = 0 \end{cases}$$

tj. $x = y = z = 0$.

c) Zadani sustav će imati beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja ako i samo ako su determinanta sustava D i sve tri pomoćne determinante D_x, D_y i D_z istodobno jednake 0. Na kraju Koraka 2. vidjeli smo da vrijedi jednakost

$$D_x = D_y = D_z = 0, \text{ za svaki } t \in \mathbf{R}.$$

Stoga treba utvrditi za koje $t \in \mathbf{R}$ je determinanta sustava D jednaka nuli. To smo već napravili u rješenju **b)** podzadatka i dobili smo

$$t \in \{-22, 1\}.$$

Dakle, polazni sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja za $t \in \{-22, 1\}$.

4. <u>Isključivo koristeći metodu determinanti</u> pokažite da je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{gathered} x + y + z = 6 \\ 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 6 \\ x - 2 \cdot y - z = -6 \end{gathered}$$

Cramerov i riješite ga.

<u>Naputak i rezultat</u>: Sustav linearnih jednadžbi će biti Cramerov ako i samo ako <u>istodobno</u> vrijede sljedeće tvrdnje:

– Ukupan broj jednadžbi sustava (m) jednak je ukupnom broju međusobno različitih nepoznanica (n).
– Determinanta sustava je različita od nule.

Zadani sustav je sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice, pa vrijedi prva tvrdnja ($m = n = 3$). Determinanta sustava D jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

pa vrijedi i druga tvrdnja. Stoga je zadani sustav Cramerov. Pripadne pomoćne determinante su:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 12 \text{ i } D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 18\,.$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{18}{6} = 3 \end{cases},$$

tj. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

5. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} 97 \cdot x + 173 \cdot y - 29 \cdot z &= 18 \\ -101 \cdot x - 43 \cdot y + 11 \cdot z &= 80 \\ 85 \cdot x + 563 \cdot y - 83 \cdot z &= a + 311 \end{aligned}$$

pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Isključivo koristeći metodu determinanti odredite vrijednosti realnoga parametra a za koje taj sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja. Koje od tih rješenja ima zbroj svih komponenti jednak 2? Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Naputak i rješenje: Determinanta sustava D, te sve tri pomoćne determinante D_1, D_2 i D_3 jednake su:

$$D = \begin{vmatrix} 97 & 173 & -29 \\ -101 & -43 & 11 \\ 85 & 563 & -83 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 173 & -29 \\ 80 & -43 & 11 \\ a+311 & 563 & -83 \end{vmatrix} = 656 \cdot a - 656\,,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 97 & 18 & -29 \\ -101 & 80 & 11 \\ 85 & a+311 & -83 \end{vmatrix} = 1862 \cdot a - 1862,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 97 & 173 & 18 \\ -101 & -43 & 80 \\ 85 & 563 & a+311 \end{vmatrix} = 13302 \cdot a - 13302.$$

Sustav će imati beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja ako i samo ako istodobno vrijedi $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Odatle slijedi

$$656 \cdot a - 656 = 0$$
$$1862 \cdot a - 1862 = 0$$
$$13302 \cdot a - 13302 = 0$$

Zajedničko rješenje svih triju jednadžbi je $a = 1$. Prema tome, za $a = 1$ polazni sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja.

Nadalje, iz beskonačnoga skupa kojega tvore sva rješenja sustava za $a = 1$ trebamo izdvojiti ono rješenje za koje je zbroj svih njegovih komponenti jednak 2. Odaberemo *bilo koje* dvije jednadžbe polaznoga sustava (najbolje prvu i drugu), te im dopišemo uvjet $x + y + z = 2$. Tako dobivamo novi sustav:

$$97 \cdot x + 173 \cdot y - 29 \cdot z = 18,$$
$$-101 \cdot x - 43 \cdot y + 11 \cdot z = 80,$$
$$x + y + z = 2$$

čije rješenje je $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$.

6. Zadan je sustav

$$73 \cdot x - 97 \cdot y + 29 \cdot z = 38$$
$$-43 \cdot x + 37 \cdot y - 13 \cdot z = 10$$
$$a \cdot x + 19 \cdot y + 11 \cdot z = 7 \cdot a + 5$$

pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Isključivo koristeći metodu determinanti odredite vrijednosti realnoga parametra a za koje je zbroj svih triju komponenti rješenja sustava jednak 0. Koje rješenje odgovara toj vrijednosti parametra a? Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Naputak i rješenje: Determinanta sustava D, te sve tri pomoćne determinante D_1, D_2 i D_3 jednake su:

$$D=\begin{vmatrix}73 & -97 & 29\\ -43 & 37 & -13\\ a & 19 & 11\end{vmatrix}=188\cdot a-21832\,,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}38 & -97 & 29\\ 10 & 37 & -13\\ 7\cdot a+5 & 19 & 11\end{vmatrix}=1316\cdot a+41972\,,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}73 & 38 & 29\\ -43 & 10 & -13\\ a & 7\cdot a+5 & 11\end{vmatrix}=-2870\cdot a+24514\,,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}73 & -97 & 38\\ -43 & 37 & 10\\ a & 19 & 7\cdot a+5\end{vmatrix}=-12666\cdot a-52266\,.$$

Rješenje sustava je

$$(x,y,z)=\left(\frac{1316\cdot a+41972}{188\cdot a-21832},\frac{-2870\cdot a+24514}{188\cdot a-21832},\frac{-12666\cdot a-52266}{188\cdot a-21832}\right).$$

Iz uvjeta da zbroj svih triju komponenti toga rješenja treba biti jednak 0 slijedi

$$\frac{1316\cdot a+41972}{188\cdot a-21832}+\frac{-2870\cdot a+24514}{188\cdot a-21832}+\frac{-12666\cdot a-52266}{188\cdot a-21832}=0\,,$$

odnosno

$$\frac{-14220\cdot a+14220}{188\cdot a-21832}=0\,.$$

Vrijednost razlomka je jednaka nuli ako i samo ako je vrijednost njegova brojnika jednaka nuli. Odatle dobivamo jednadžbu

$$-14220\cdot a+14220=0,$$

iz koje je $a = 1$. Uvrštavanjem $a = 1$ u izraz za rješenje sustava dobijemo pripadno rješenje:

$$(x,y,z)=\left(\frac{1316\cdot 1+41972}{188\cdot 1-21832},\frac{-2870\cdot 1+24514}{188\cdot 1-21832},\frac{-12666\cdot 1-52266}{188\cdot 1-21832}\right)=(-2,-1,\ 3)\,.$$

poglavlje: VEKTORI

1. Zadane su točke $A = (1, 0, -2)$, $B = (0, -1, 2)$ i $C = (-1, -2, 0)$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama (grupe D i E)

a) Pokažite da je skup $S=\left\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right\}$ baza prostora $V^3(O)$.

b) Izračunajte $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\times\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OB}$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: **a)** Prema definiciji, neki skup S je *baza* prostora radijvektora $V^3(O)$ ako se *svaki* vektor iz skupa $V^3(O)$ može prikazati kao linearna kombinacija svih elemenata skupa S (pri čemu neki koeficijenti u toj linearnoj kombinaciji mogu biti jednaki nula). Formalno, ako je $S=\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right\}$ i ako želimo provjeriti je li S baza prostora $V^3(O)$, onda za *svaki* radijvektor $\vec{b}\in V^3(O)$ moramo tražiti realne brojeve (tj. skalare) α_1, α_2, …, α_n tako da vrijedi jednakost $\vec{b}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\cdot\overrightarrow{a_n}$. Takav kriterij je potpuno nepraktičan jer radijvektora ima beskonačno mnogo i nemoguće je za *svaki* od njih provjeriti postojanje navedenih realnih brojeva (a svaki od njih ima posebnu "kombinaciju" skalara, tj. ne postoje dva različita radijvektora koja imaju isti prikaz pomoću radijvektora iz skupa S). Stoga navedenu definiciju moramo zamijeniti praktično korisnijim i primjenjivijim kriterijem.

Na predavanjima i vježbama pokazano je da je skup S baza za prostor $V^3(O)$ ako i samo je S linearno nezavisan tročlani podskup prostora $V^3(O)$, tj. ako i samo ako *istodobno* vrijede sljedeća dva uvjeta:

1.) Skup S se sastoji od točno tri različita elementa.
2.) Skup S je *linearno nezavisan*, tj. niti jedan od elemenata koji tvore skup S ne može se prikazati kao linearna kombinacija *svih* preostalih elemenata toga skupa.

Za konkretan skup S uvjet **1.)** je vrlo lako provjeriti: treba prebrojati koliko različitih elemenata sadrži taj skup. Ako je taj broj različit od tri, gotovi smo s provjerom jer S sigurno nije baza. Ako je taj broj jednak tri, nastavljamo provjeru.

Provjera linearne nezavisnosti tročlanoga skupa (tj. provjera uvjeta 2.) <u>isključivo u prostoru $V^3(O)$</u> svodi se na izračunavanje mješovitoga umnoška svih elemenata toga skupa *u bilo kojem poretku*. Točnije, vrijedi sljedeći kriterij:

Tročlani skup $S\subseteq V^3(O)$ je linearno nezavisan ako i samo ako je mješoviti produkt svih radijvektora koji tvore taj skup različit od nule. U suprotnom, tj. ako je mješoviti umnožak svih radijvektora koji tvore skup S jednak nuli, skup S je linearno zavisan, tj. barem jedan od elemenata skupa S može se prikazati kao linearna kombinacija *svih* preostalih elemenata skupa S.

Što treba napraviti u zadatku ovakvoga tipa? Najprije prebrojati koliko elemenata ima skup S i izravno ih napisati. Ako skup S nema tri elementa, zadatak je gotov. Ako skup S ima točno tri elementa, treba izračunati njihov mješoviti umnožak. Bude li taj umnožak jednak nuli, skup S je linearno zavisan i nije baza prostora $V^3(O)$. Bude li taj umnožak različit od nule, skup S je linearno nezavisan i predstavlja bazu prostora $V^3(O)$.

<u>**Korak 1.**</u> Popišimo točno sve elemente skupa S. Na predavanjima smo rekli da *radijvektore* (tj. vektore koji počinju u ishodištu koordinatnoga sustava) poistovjećujemo ili identificiramo s njihovom krajnjom točkom jer su svi elementi potrebni za određivanje vektora (duljina i smjer) jednoznačno zadani ako zadamo krajnju točku vektora. U našem je slučaju:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, -2),\ \overrightarrow{OB} = (0, -1, 2) \text{ i } \overrightarrow{OC} = (-1, -2, 0) .$$

Dakle, skup S za koji želimo pokazati da predstavlja bazu prostora $V^3(O)$ izgleda ovako:

$$S = \left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right\} = \{(1, 0, -2), (0, -1, 2), (-1, -2, 0)\}$$

Taj se skup očito sastoji od tri različita radijvektora, pa je prvi uvjet iz definicije baze ispunjen.

Korak 2. Preostaje provjeriti linearnu nezavisnost skupa S. U tu svrhu izračunajmo mješoviti umnožak svih radijvektora koji tvore skup S. Podsjetimo se da je mješoviti umnožak triju radijvektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ realan broj M određen izrazom:

$$M := \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c} := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

(Simbol := treba čitati "po definiciji", $\times$ je simobl za vektorski umnožak, a $\bullet$ simbol za skalarni umnožak dvaju vektora). U našem je slučaju:

$$M := \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \bullet \overrightarrow{OC} := \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} .$$

(Isključivo u slučajevima kad provjeravamo linearnu nezavisnost skupa S smijemo zamijeniti poredak radijvektora, pa npr. izračunati mješoviti umnožak $M = \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) \bullet \overrightarrow{OA}$ ili $M = \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\right) \bullet \overrightarrow{OB}$ i iz njega izvesti zaključak, ali to nam nepotrebno komplicira izračun: jednostavnije je radijvektore smještati u determinantu redoslijedom kojim su navedeni u zapisu skupa S).

Izračunajmo navedenu determinantu koristeći Sarrusovo pravilo:

$$M = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{matrix} = \left[1 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 \cdot 2\right] - \left[(-1) \cdot (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0\right] =$$

$$= 0 - (-2 - 4 + 0) = 0 - (-6) = 6$$

Dakle, mješoviti umnožak radijvektora koji tvore skup S jednak je 6. Budući da je $6 \neq 0$, prema ranije navedenom kriteriju zaključujemo da je skup S linearno nezavisan.

Tako smo zaključili da je skup S linearno nezavisan tročlani podskup skupa $V^3(O)$, a to znači da je S baza toga prostora. Time je tvrdnja **a)** dokazana.

b) U rješenju **a)** podzadatka već smo izračunali radijvektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, te dobili:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, -2),\ \overrightarrow{OB} = (0, -1, 2) \text{ i } \overrightarrow{OC} = (-1, -2, 0) .$$

MATEMATIKA 1

zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama (grupe D i E)

Računamo redom sve radijvektore koji su nam potrebni u rješavanju ovoga zadatka.

Korak 1. Izračunajmo najprije sve zbrojeve navedene u okruglim zagradama. Podsjetimo se, dva radijvektora zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove prve komponente, posebno druge, a posebno treće. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(1,0,-2)+(0,-1,2)=(1+0,0+(-1),(-2)+2)=(1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(0,-1,2)+(-1,-2,0)=(0+(-1),(-1)+(-2),2+0)=(-1,-3,2)$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(1,0,-2)+(-1,-2,0)=(1+(-1),0+(-2),(-2)+0)=(0,-2,-2)$$

Korak 2. Računamo svaki od triju vektorskih umnožaka koji se pojavljuju u navedenom izrazu. Podsjetimo se da je vektorski umnožak radijvektora $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ opet *radijvektor* (za razliku od skalarnoga i mješovitoga umnoška koji kao rezultat daju realne brojeve) formalno određen determinantom

$$\vec{a}\times\vec{b}:=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

(Ovdje treba **jako** pripaziti jer zamjena redoslijeda radijvektora ili "promiješanje" (točnije, permutiranje) redaka determinante dovodi do pogrešnoga rezultata: dobije se radijvektor suprotan traženom.) Ovu determinantu u pravilu računamo koristeći Laplaceov razvoj determinante po 1. retku **osim ako neki redak ili stupac determinante ne sadrži dvije nule** (tada determinantu razvijamo po tom retku ili stupcu). Tako ćemo traženi radijvektor $\vec{a}\times\vec{b}$ zapravo prikazati kao linearnu kombinaciju radijvektora $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ i $\vec{k}=(0,0,1)$, a iz te je kombinacije vrlo lako "očitati" krajnju točku radijvektora $\vec{a}\times\vec{b}$: kako smo pokazali na vježbama, ona je jednaka koeficijentima uz radijvektore $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ i $\vec{k}=(0,0,1)$ napisanima u istom poretku kao i ti radijvektori.

Istaknimo još da pri Laplaceovu razvoju navedene determinante uz radijvektor $\vec{i}$ uvijek treba nadopisati predznak +, uz radijvektor $\vec{j}$ predznak –, a uz radijvektor $\vec{k}$ opet predznak +.

Tako redom dobivamo:

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=$ (treći stupac sadrži dvije nule, pa determinantu razvijamo po tom stupcu) =

$=+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=+\vec{k}\cdot[1\cdot(-2)-(-1)\cdot(-1)]=+\vec{k}\cdot[-2-1]=-3\cdot\vec{k}=(0,0,-3)$

$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[(-3)\cdot(-2)-0\cdot 2]-\vec{j}\cdot$

$\cdot[(-1)\cdot(-2)-1\cdot 2]+\vec{k}\cdot[(-1)\cdot 0-1\cdot(-3)]=6\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}=(6,0,3)$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=$ (prvi stupac sadrži dvije nule, pa determinantu razvijamo po tom stupcu) =

$=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[(-2)\cdot 2-(-1)\cdot(-2)]=-6\cdot\vec{i}=(-6,0,0)$

<u>**Korak 3.**</u> Preostaje nam zbrojiti sve radijvektore dobivene u Koraku 2. Dobivamo:

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\times\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OB}=(0,0,-3)+(6,0,3)+(-6,0,0)=(0+6+(-6),0+0+0,$
$-3+3+0)=(0,0,0)=\vec{0}$

Zaključujemo da je traženi radijvektor jednak nulvektoru.

2. Zadane su točke $A=(2,0,-1)$, $B=(0,1,-1)$ i $C=(1,2,0)$.

a) Pokažite da je skup $S=\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ baza prostora $V^3(O)$.

b) Izračunajte $\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: **a)** Skup $S=\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}=\{(2,0,-1),(0,1,-1),(1,2,0)\}$ je očito tročlani skup, a budući da je mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak $M=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=5\neq 0$, skup S je linearno nezavisan. Time su ispunjena oba uvjeta iz definicije baze, pa slijedi tvrdnja.
b) Vrijede sljedeće jednakosti:

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(1,3,-1),\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(3,2,-1),\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2,1,-2);$
$\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(3,1,6),\ \overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=(1,-3,-3),\ \overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(-4,2,-3)$

Stoga je $\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(0,0,0)=\vec{0}$.

3. Zadane su točke $A = (1, a, 2)$, $B = (0, -1, 1)$ i $C = (1, -1, -1)$, pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da točke O, A, B i C tvore četverokut, pa izračunajte površinu toga četverokuta. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>*Rješenje*</u>: Točke O, A, B i C će tvoriti četverokut ako i samo ako sve četiri točke budu pripadale istoj ravnini (tj. ako sve četiri točke budu *komplanarne*) i nikoje tri od njih ne budu kolinearne. To znači da trebamo provjeriti sljedećih pet uvjeta:

1. Sve četiri točke pripadaju istoj ravnini, tj. sve četiri točke su komplanarne.
2. Točke O, A i B nisu kolinearne.
3. Točke O, A i C nisu kolinearne.
4. Točke O, B i C nisu kolinearne.
5. Točke A, B i C nisu kolinearne.

Uvjet **1**. zamjenjujemo njemu ekvivalentnim uvjetom da mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (slično kao u prethodnim dvama zadatcima) treba biti jednak nuli. Naime, prema prethodnim dvama zadatcima znamo da će to značiti da su radijvektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ linearno zavisni, odnosno da se barem jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija preostalih dvaju radijvektora. No, takvo što je moguće jedino ako sve četiri točke pripadaju istoj ravnini jer linearna kombinacija dvaju radijvektora uvijek pripada ravnini određenoj tim radijvektorima.

<u>**Korak 1.**</u> Odredimo radijvektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Imamo:

$$\overrightarrow{OA}=(1,a,2),\ \overrightarrow{OB}=(0,-1,1),\ \overrightarrow{OC}=(1,-1,-1) .$$

<u>**Korak 2.**</u> Izračunajmo mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku). Dobivamo:

$$M=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & a\\ 0 & -1\\ 1 & -1\end{matrix}=\left[1\cdot(-1)\cdot(-1)+a\cdot 1\cdot 1+2\cdot 0\cdot(-1)\right]-\left[1\cdot(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 0\cdot a\right]=$$
$$=1+a-(-2-1)=1+a+3=a+4$$

<u>**Korak 3.**</u> Izjednačimo mješoviti umnožak izračunan u prethodnom koraku s nulom. Dobivamo linearnu jednadžbu

$$a+4=0$$

čije je rješenje $a = -4$. Dakle, mogući vrhovi četverokuta su sljedeće četiri točke:

$$O = (0, 0, 0),\ A = (1, -4, 2),\ B = (0, -1, 1) \text{ i } C = (1, -1, -1).$$

Korak 3. U nastavku provjeravamo da nikoje tri od gore navedenih četiriju točaka ne pripadaju istom pravcu, tj. da nikoje tri od navedenih točaka nisu *kolinearne*. To ćemo učiniti koristeći radijvektore ili vektore.

Korak 3.a) Najprije provjerimo pripadaju li točke O, A i B istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OA} = (1,-4,2)$ i $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$ kolinearni. (Mogli smo promatrati i neki drugi par vektora, npr. $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$, ali ovaj način je kraći jer ne moramo zasebno određivati niti jedan drugi vektor.) Niti jedan od tih radijvektora nije nulvektor (koji je kolinearan sa *svakim* radijvektorom), pa ćemo primijeniti definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Prema toj definiciji, ti radijvektori kolinearni su ako i samo postoji realan broj k takav da je $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}$ (ili obrnuto, svejedno je), odnosno ako i samo ako postoji realan broj k takav da je $(1,-4,2) = k \cdot (0,-1,1)$, odnosno ako i samo ako postoji realan broj k takav da je $(1,-4,2) = (0,-k,k)$. Odmah vidimo da, ma koji god realan broj odabrali za vrijednost k, lijeva i desna strana nikad neće biti jednake jer se ne podudaraju u prvoj komponenti (a moraju se podudarati u *svim trima* komponentama). Stoga radijvektori $\overrightarrow{OA} = (1,-4,2)$ i $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$ nisu kolinearni, tj. točke O, A i B ne pripadaju istom pravcu.

Korak 3.b) Provjerimo pripadaju li točke O, A i C istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OA} = (1,-4,2)$ i $\overrightarrow{OC} = (1,-1,-1)$ kolinearni. Niti jedan od tih dvaju vektora nije nulvektor, pa ponovno primijenjujemo definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Tražimo postoji li realan broj k takav da je $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OC}$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(1,-4,2) = k \cdot (1,-1,-1)$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(1,-4,2) = (k,-k,-k)$. Izjednačavanjem prve komponente lijeve strane s prvom komponentom desne strane dobivamo $k = 1$, a izjednačavanjem druge komponente lijeve strane s drugom komponentom desne strane dobivamo $k = 4$. Nemoguće je da jedna te ista varijabla *istovremeno* poprima dvije različite vrijednosti ($k = 1$ i $k = 4$), pa zaključujemo da traženi realan broj k ne postoji. To znači da radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ nisu kolinearni, odnosno da točke O, A i C ne pripadaju istom pravcu.

Korak 3.c) Provjeravamo pripadaju li točke O, B i C istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OC} = (1,-1,1)$ kolinearni. Niti jedan od tih dvaju vektora nije nulvektor, pa ponovno primijenjujemo definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Tražimo postoji li realan broj k takav da je $\overrightarrow{OB} = k \cdot \overrightarrow{OC}$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(0,1,-1) = k \cdot (1,-1,-1)$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(0,1,-1) = (k,-k,-k)$. Izjednačavanjem prve komponente lijeve strane s prvom komponentom desne strane dobivamo $k = 0$, a izjednačavanjem druge komponente lijeve strane s drugom komponentom desne strane dobivamo $k = -1$. Nemoguće je da jedna te ista varijabla *istovremeno* poprima dvije različite vrijednosti ($k = 0$ i $k = -1$), pa zaključujemo da traženi realan broj k ne postoji. To znači da radijvektori $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ nisu kolinearni, odnosno da točke O, B i C ne pripadaju istom pravcu.

Korak 3.d) Preostaje provjeriti pripadaju li točke A, B i C istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,1) - (1,-4,2) = (0-1,-4-(-1),2-1) = (-1,-3,1) \text{ i}$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,-1,-1) - (1,-4,2) = (1-1,-4-(-1),2-(-1)) = (0,-3,3)$$

kolinearni. (Opet smo mogli gledati i bilo koju drugu dvočlanu kombinaciju vektora, npr. $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$.) Niti jedan od tih dvaju vektora nije nulvektor, pa ponovno primijenjujemo definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Tražimo postoji li realan broj k takav da je $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(-1,-3,1) = k \cdot (0,-3,3)$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(-1,-3,1) = (0,(-3)\cdot k, 3\cdot k)$. Odmah vidimo da, ma koji god realan broj odabrali za vrijednost k, lijeva i desna strana nikad neće biti jednake jer se ne podudaraju u prvoj komponenti (a moraju se podudarati u *svim trima* komponentama), pa zaključujemo da traženi realan broj k ne postoji. Dakle, radijvektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ nisu kolinearni, odnosno točke A, B i C ne pripadaju istom pravcu.

Ovime smo provjerili svih pet uvjeta potrebnih za zaključak da točke O, A, B i C određuju četverokut. Preostaje izračunati površinu toga četverokuta. Koristit ćemo jednu od geometrijskih interpretacija *duljine vektorskoga umnoška* dvaju radijvektora: *polovica duljine vektorskoga umnoška dvaju radijvektora jednaka je površini trokuta kojemu su dvije stranice određene tim radijvektorima*. Četverokut $OABC$ jednom od njegovih dijagonala, npr. dijagonalom OC, podijelimo na dva trokuta: OAB i OBC. (To sigurno možemo učiniti jer smo u prethodnom dijelu zadatka pokazali da točke O, A i B, odnosno O, B i C nisu kolinearne.) Tada je površina četverokuta $OABC$ jednaka zbroju površina trokutova OAB i OBC, tj.

$$P_{OABC} = P_{OAB} + P_{OBC}.$$

Izračunajmo zasebno svaku površinu na desnoj strani te jednakosti.

<u>Korak 4.</u> Dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ su dvije stranice trokuta OAB. Prema gornjoj interpretaciji duljine vektorskoga produkta, površina toga trokuta jednaka je polovici duljine vektorskoga produkta radijvektora $\overrightarrow{OA} = (1,4,2)$ i $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$. Izračunajmo najprije taj vektorski umnožak:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot [-4\cdot 1 - (-1)\cdot 2] - \vec{j} \cdot (1\cdot 1 - 2\cdot 0) +$$

$$+\vec{k} \cdot [1\cdot(-1) - 0\cdot(-4)] = (-2)\cdot\vec{i} - 1\cdot\vec{j} - 1\cdot\vec{k} = (-2,-1,-1)$$

Stoga je površina trokuta OAB jednaka

$$P_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6} \text{ kv.jed.}$$

<u>Korak 5.</u> Dužine $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ su dvije stranice trokuta OBC. Prema gornjoj interpretaciji duljine vektorskoga produkta, površina toga trokuta jednaka je polovici duljine vektorskoga produkta radijvektora $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OC} = (1,-1,-1)$. Izračunajmo najprije taj vektorski umnožak:

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot 1]-$$

$$-\vec{j}\cdot[0\cdot(-1)-1\cdot 1]+\vec{k}\cdot[0\cdot(-1)-1\cdot(-1)]=2\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}=(2,1,1)$$

Stoga je površina trokuta OBC jednaka

$$P_{OBC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\text{ kv.jed.}$$

<u>Korak 6.</u> Površina četverokuta $OABC$ jednaka je

$$P_{OABC}=P_{OAB}+P_{OBC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}\text{ kv.jed.}$$

4. Zadane su točke $A = (0, a, -1)$, $B = (1, 0, 1)$ i $C = (-1, 1, 0)$, pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da točke O, A, B i C tvore četverokut, pa izračunajte opseg i površinu toga četverokuta. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>Naputak i rezultat</u>: Iz zahtjeva da mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ treba biti jednak nuli dobiva se jednadžba $\begin{vmatrix}0 & a & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$, tj. $-x - 1 = 0$ čije rješenje je $x = -1$. Dakle, $A = (0, -1, -1)$, $B = (1, 0, 1)$ i $C = (-1, 1, 0)$. Lako se provjeri da svaki od skupova $\{O, A, B\}$, $\{O, A, C\}$, $\{O, B, C\}$ i $\{A, B, C\}$ ne sadrži kolinearne točke. Stoga je $OABC$ četverokut. Njegov opseg jednak je zbroju duljina vektora koji određuju njegove stranice:

$$\overrightarrow{OA}=(0,-1,-1),\ \overrightarrow{AB}=(1,0,1)-(0,-1,-1)=(1,1,2),\ \overrightarrow{BC}=(-1,1,0)-(1,0,1)=(-2,1,-1)\text{ i }\overrightarrow{OC}=(-1,1,0)$$

Stoga je opseg četverokuta $OABC$ jednak

$$O=\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\text{ jed.}$$

Površina toga četverokuta jednaka je zbroju površina trokutova OAB i OBC. Vektorski umnošci radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, odnosno $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ su:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot\vec{i}+(-1)\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}=(-1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\vec{i}+(-1)\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}=(-1,-1,1)$$,

pa je površina četverokuta $OABC$ jednaka

$$P_{OABC}=P_{OAB}+P_{OBC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\text{ kv.jed.}$$

5. Zadane su točke $A = (0, -1, 1)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (1, -1, 0)$.

a) Pokažite da su točke O, A, B i C vrhovi tetraedra.
b) Izračunajte oplošje i obujam tetraedra $OABC$.
c) Izračunajte duljinu najkraće visine tetraedra $OABC$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: **a)** Za razliku od prethodnih dvaju zadataka, ovdje trebamo pokazati da točke O, A, B i C *nisu* komplanarne, tj. da ne pripadaju jednoj ravnini. Naime, točke O, A, B i C tvore tetraedar ako i samo ako sve četiri točke nisu komplanarne, odnosno ako i samo ako sve četiri točke ne pripadaju istoj ravnini. Stoga ćemo izračunati mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku) i usporediti ga s nulom. Bude li taj umnožak jednak nuli, točke O, A, B i C su komplanarne i ne određuju tetraedar. U suprotnom, tj. bude li mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku) različit od nule, točke O, A, B i C nisu komplanarne i određuju tetraedar.

Dakle, mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je:

$$M=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\text{ (razvoj npr. po 1. stupcu) }=+1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot\left[(-1)\cdot 0-1\cdot 1\right]=1\cdot(-1)=-1$$

Budući da je $M = -1 \neq 0$, navedene četiri točke nisu komplanarne i određuju vrhove tetraedra, što je i trebalo pokazati.

b) **Korak 1.** Prema jednoj od geometrijskih interpretacija *mješovitoga umnoška* radijvektora, obujam tetraedra kojega određuju radijvektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je jednoj šestini apsolutne vrijednosti mješovitoga umnoška tih radijvektora. Taj mješoviti umnožak već smo izračunali u **a)** podzadatku i dobili da je $M = = -1$. Stoga je obujam tetraedra $OABC$ jednak

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot |M| = \frac{1}{6} \cdot |-1| = \frac{1}{6} \text{ kub.jed.}$$

Korak 2. Oplošje tetraedra jednako je zbroju površina četiriju trokutova: *OAB*, *OAC*, *OBC* i *ABC*. U prethodnim dvama zadatcima vidjeli smo da se površina svakoga takvoga trokuta izračunava kao jedna polovica duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koje određuju stranice trokuta (uz nužan dodatni uvjet da oba ta vektora imaju istu početnu točku).

Korak 2.a) Izračunajmo najprije površinu trokuta *OAB*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA} = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OB} = (0,1,0)$. Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj po 1. stupcu) } = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \vec{i} = (-1,0,0)$$

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ kv.jed.}$$

Korak 2.b) Izračunajmo površinu trokuta *OAC*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA} = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OC} = (1,-1,0)$. Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \left[(-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1\right] - \vec{j} \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) +$$

$$+\vec{k} \cdot \left[0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)\right] = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = (1,1,1)$$

$$P_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ kv.jed.}$$

Korak 2.c) Izračunajmo površinu trokuta *OBC*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OB} = (0,1,0)$ i $\overrightarrow{OC} = (1,-1,0)$. Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj po 3. stupcu) } = +\vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{k} \cdot \left[0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\right] = (-1) \cdot \vec{k} = (0,0,-1)$$

$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ kv.jed.}$$

Korak 2.d) Izračunajmo površinu trokuta *ABC*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška vektora $\overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (0,-1,1) = (0-0, 1-(-1), 0-1) = (0,2,-1)$ i vektora $\overrightarrow{AC} = (1,-1,0) - (0,-1,1) = (1-0, -1-(-1), 0-1) = (1,0,-1)$ Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\text{ (razvoj po 1. stupcu) }=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}\vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\left[2\cdot(-1)-0\cdot(-1)\right]+$$
$$+1\cdot\left[\vec{j}\cdot(-1)-2\cdot\vec{k}\right]=(-2)\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$$
$$P_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3. Oplošje tetraedra *OABC* jednako je

$$O=P_{OAB}+P_{OAB}+P_{OBC}+P_{ABC}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}\text{ kv.jed.}$$

c) Podsjetimo se da je obujam tetraedra jednak jednoj trećini umnoška površine osnovke tetraedra i duljine visine tetraedra povučene na tu osnovku. Osnovka tetraedra može biti *bilo koja* strana tetraedra, pa – budući da tetraedar ima ukupno 4 različite strane – imamo ukupno 4 različite visine tetraedra koje se razlikuju po vrhu iz kojega su povučene, ali ne nužno i po duljini. Vrijedi sljedeće pravilo:

Površina osnovke tetraedra i duljina pripadne visine tetraedra su obrnuto razmjerne veličine. Što je veća površina osnovke, to je manja duljina pripadne visine i obrnuto. Najkraća visina tetraedra je visina povučena na osnovku najveće površine, a najdulja visina tetraedra je visina povučena na osnovku najmanje površine.

Iz toga pravila zaključujemo sljedeće: Neka je S bilo koja strana tetraedra određena (stručni naziv je: *razapeta*) vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, te neka je P_S površina te strane. Tada je duljina visine tetraedra povučene na tu stranu jednaka

$$h_S=\frac{3\cdot V}{P_S}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot|M|}{\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\frac{|M|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}.$$

(**Oprez:** U brojniku je s | | označena apsolutna vrijednost realnoga broja M, dok je u nazivniku s | | označena duljina vektorskoga umnoška $\vec{a}\times\vec{b}$. Iako je oznaka ista, riječ je o bitno različitim veličinama.) U našem slučaju tražimo duljinu najkraće visine tetraedra *OABC*. Ta visina povučena je na stranu tetraedra koja ima najveću površinu. Budući da su strane tetraedra trokutovi *OAB*, *OAC*, *OBC* i *ABC*, najprije utvrdimo koji od tih trokutova ima najveću površinu. Očito vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}<\frac{3}{2},$$

tj.

$$P_{OAB}=P_{OBC}<P_{OAC}<P_{ABC},$$

pa najveću površinu ima strana *ABC*. Stoga je duljina pripadne visine tetraedra

$$h_{ABC} = \frac{|M|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1}{3} \text{ jed.}$$

6. Zadane su točke $A = (-4, 2, 0)$ i $B = (a, 8, 6)$, gdje je a realan parametar.

a) Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ razapinju pravokutnik, pa odredite koordinate svih vrhova toga pravokutnika.
b) Izračunajte oplošje i obujam paralelepipeda kojemu je osnovka pravokutnik razapet radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, a jedna stranica radijvektor $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>*Rješenje*</u>: **a)** Radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ razapinju dvije stranice pravokutnika ako i samo ako su ti radijvektori okomiti. Znamo da su radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Prema tome, vrijednost parametra a odredit ćemo iz zahtjeva da skalarni umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ bude jednak nuli. Budući da je

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = (-4, 2, 0) \bullet (a, 8, 6) = (-4) \cdot a + 2 \cdot 8 + 0 \cdot 6 = -4 \cdot a + 16,$$

(pri čemu je s $\bullet$ označen skalarni umnožak), iz zahtjeva

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = 0,$$

tj. iz jednadžbe

$$-4 \cdot a + 16 = 0$$

slijedi $a = 4$. Dakle, tri vrha pravokutnika su $O = (0,0,0)$, $A = (-4, 2, 0)$ i $B = (4, 8, 6)$. Četvrti vrh pravokutnika odredit ćemo koristeći činjenicu da dijagonale *bilo kojega* usporednika, pa posebno i pravokutnika, imaju isto polovište. Označimo li nepoznati, četvrti vrh pravokutnika s $C = (x_C, y_C, z_C)$, to znači da dijagonale pravokutnika OC i AB imaju isto polovište. Stoga istodobno moraju vrijediti sljedeće tri jednakosti:

$$x_O + x_C = x_A + x_B,$$
$$y_O + y_C = y_A + y_B,$$
$$z_O + z_C = z_A + z_B.$$

Uvrštavanjem koordinata točaka O, A i B dobivamo:

$$0 + x_C = -4 + 4,$$
$$0 + y_C = 2 + 8,$$
$$0 + z_C = 0 + 6.$$

odnosno

$$x_C = 0,$$
$$y_C = 10,$$
$$z_C = 6.$$

Dakle, svi vrhovi pravokutnika $OABC$ su: $O = (0,0,0)$, $A = (-4, 2, 0)$, $B = (4, 8, 6)$ i $C = (0, 10, 6)$.

b) S predavanja znamo da je vektorski umnožak dvaju radijvektora *uvijek* okomit i na jedan i na drugi radijvektor (točnije, na ravninu određenu tim dvama radijvektorima). U našem slučaju, to znači da je vektorski umnožak $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ okomit na ravninu određenu radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Pravokutnik $OABC$ pripada ravnini određenoj radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, pa iz uvjeta zadatka proizlazi da je jedna stranica paralelepipeda okomita na pravokutnik razapet radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ koji je ujedno i jedna od ukupno šest različitih osnovki paralelepipeda. Jedini paralelepiped koji ima to svojstvo (da je jedna stranica paralelepipeda okomita na jednu osnovku paralelepipeda) je *kvadar*. Stoga ovaj podzadatak zapravo traži da izračunamo oplošje i obujam kvadra čiju osnovku određuju radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, a čija je visina na tu istu osnovku jednaka $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

<u>**Korak 1.**</u> Izračunajmo najprije vektorski umnožak $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (2 \cdot 6 - 0 \cdot 8) - \vec{j} \cdot [(-4) \cdot 6 - 4 \cdot 0] +$$
$$+\vec{k} \cdot [(-4) \cdot 8 - 4 \cdot 2] = 12 \cdot \vec{i} + 24 \cdot \vec{j} - 40 \cdot \vec{k} = (12, 24, -40)$$

<u>**Korak 2.**</u> Obujam paralelepipeda, tj. obujam kvadra jednak je mješovitom umnošku radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$M(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \\ 12 & 24 & -40 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \\ 12 & 24 & -40 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -4 & 2 \\ 4 & 8 \\ 12 & 24 \end{matrix} = [(-4) \cdot 8 \cdot (-40) + 2 \cdot 6 \cdot 12 + 0 \cdot 4 \cdot 24] -$$
$$-[12 \cdot 8 \cdot 0 + 24 \cdot 6 \cdot (-4) + (-40) \cdot 4 \cdot 2] = 1280 + 144 + 576 + 320 = 2320$$

pa je obujam kvadra

$$V = |M| = 2320 \text{ kub.jed.}$$

<u>**Korak 3.**</u> Oplošje kvadra jednako je dvostrukom zbroju površina sljedećih strana kvadra:

– strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$;
– strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$;
– strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

Sve navedene strane su pravokutnici, odnosno, općenito, usporednici. Kako znamo s predavanja, jedna od geometrijskih interpretacija vektorskoga umnoška je i sljedeća: *Duljina vektorskoga umnoška dvaju* *radijvektora jednaka je površini usporednika razapetoga tim radijvektorima.* Prema tome, površinu svake strane izračunat ćemo kao duljinu vektorskoga umnpška radijvektora koji razapinju tu stranu. Imamo redom:

Korak 3.a) Strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ je upravo pravokutnik *OABC*. Vektorski umnožak $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ već smo izračunali u Koraku 1. i on je jednak $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(12,24,-40)$. Stoga je površina pravokutnika *OABC* jednaka

$$P_{OABC}=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{12^2+24^2+40^2}=\sqrt{2320}=4\cdot\sqrt{145}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3.b) Izračunajmo površinu P_1 strane razapete radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & 0\\ 12 & 24 & -40\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 24 & -40\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 12 & -40\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 12 & 24\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[2\cdot(-40)-24\cdot 0]-$$

$$-\vec{j}\cdot[(-4)\cdot(-40)-12\cdot 0]+\vec{k}\cdot[(-4)\cdot 24-12\cdot 2]=-80\cdot\vec{i}+160\cdot\vec{j}-120\cdot\vec{k}=(-80,-160,-120)$$

$$P_1=\left|\overrightarrow{OA}\times\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\right|=\sqrt{(-80)^2+(-160)^2+(-120)^2}=\sqrt{46400}=40\cdot\sqrt{29}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3.c) Izračunajmo površinu P_2 strane razapete radijvektorima $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 8 & 6\\ 12 & 24 & -40\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}8 & 6\\ 24 & -40\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 12 & -40\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & 8\\ 12 & 24\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[8\cdot(-40)-24\cdot 6]-$$

$$-\vec{j}\cdot[4\cdot(-40)-12\cdot 6]+\vec{k}\cdot[4\cdot 24-12\cdot 8]=(-464)\cdot\vec{i}+232\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=(-464,232,0)$$

$$P_2=\left|\overrightarrow{OB}\times\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\right|=\sqrt{(-464)^2+232^2+0^2}=\sqrt{269120}=232\cdot\sqrt{5}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3.d). Oplošje kvadra iznosi:

Izračunajmo površinu P_1 strane razapete radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$O=2\cdot(P_{OABC}+P_1+P_2)=2\cdot\left(4\cdot\sqrt{145}+40\cdot\sqrt{29}+232\cdot\sqrt{5}\right)=8\cdot\left(\sqrt{145}+10\cdot\sqrt{29}+58\cdot\sqrt{5}\right)\text{ kv.jed.}$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama (grupe D i E)

RJEŠENJA ZADATAKA
S 1. KOLOKVIJA – GRUPA 1.

1. Neka su z_0, z_1 i z_2 međusobno različita rješenja jednadžbe $z^3 = i$. Izračunajte $z_0 \cdot z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2$.

<u>Rješenje</u>: Najprije ćemo zapisati broj $z_3 = i$ u trigonometrijskom obliku, pa primijeniti de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja.

<u>Korak 1.</u> Broju $z_3 = i$ u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini pridružena je točka $Z_3 = (0, 1)$. Nacrtamo li tu točku, iz slike ćemo odmah uočiti da je njezina udaljenost od ishodišta Gaussove ravnine jednaka $r = 1$, a da je kut koji spojnica te točke i ishodišta Gaussove ravnine zatvara s realnom osi jednak $\varphi = 90° + 90° + 90° = 270°$: Prema tome, zapis kompleksnoga broja z_3 u trigonometrijskom obliku glasi:

$$z_3 = 1 \cdot \text{cis } 270°.$$

<u>Korak 2.</u> Koristeći de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja, izračunavamo vrijednosti brojeva z_0, z_1 i z_2. Sva rješenja jednadžbe $z^3 = i$ dana su formulom

$$z_k = \sqrt[3]{1} \cdot \text{cis}\left(\frac{270° + k \cdot 360°}{3}\right), \text{ za } k = 0, 1, 2,$$

a tu formulu možemo jednostavnije zapisati kao

$$z_k = \text{cis}(90° + k \cdot 120°),\ \text{za } k = 0,1,2$$

Uvrštavanjem $k = 0$, $k = 1$ i $k = 2$ dobijemo:

$$z_0 = \text{cis}(90° + 0 \cdot 120°) = \text{cis } 90°;$$
$$z_1 = \text{cis}(90° + 1 \cdot 120°) = \text{cis } 210°;$$
$$z_0 = \text{cis}(90° + 2 \cdot 120°) = \text{cis } 330°.$$

Korak 3. Uvrštavanjem gore izračunanih vrijednosti u izraz čiju vrijednost tražimo dobijemo:

$z_0 \cdot z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2 = \text{cis } 90° \cdot \text{cis } 210° + \text{cis } 90° \cdot \text{cis } 330° + \text{cis } 210° \cdot \text{cis } 330° = \text{cis } (90° + 210°) +$
$+ \text{ cis } (90° + 330°) + \text{cis } (210° + 330°) = \text{cis } 300° + \text{cis } 420° + \text{cis } 540° =$ (420 pri dijeljenju sa 360 daje ostatak 60, a 540 pri dijeljenju s 360 daje ostatak 180) $= \text{cis } 300° + \text{cis } 60° + \text{cis } 180° =$
$= \cos 300° + i \cdot \sin 300° + \cos 60° + i \cdot \sin 60° + \cos 180° + i \cdot \sin 180° =$
$= (\cos 300° + \cos 60° + \cos 180°) + i \cdot (\sin 300° + \sin 60° + \sin 180°) =$
$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (-1)\right] + i \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right] = 0 + i \cdot 0 = 0$

2. Isključivo koristeći metodu determinanti dokažite da je za svaki $a \in \mathbf{R}$ sustav

$$\begin{aligned} x \quad &+(a-1) \cdot y &= 1 - a \\ (a+1) \cdot x \quad &-2 \cdot y &= 2 \end{aligned}$$

Cramerov sustav.

Rješenje: Dovoljno je dokazati da je determinanta sustava D različita od nule. (Vrijednosti pomoćnih determinanti D_1 i D_2 nisu bitne za rješenje zadatka i ne treba ih računati.)

Korak 1. Determinanta sustava D jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a+1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (a+1) \cdot (a-1) = -2 - (a^2 - 1) = -a^2 - 1 .$$

Korak 2. Za svaki realan broj a vrijedi nejednakost $a^2 \geq 0$. Množenjem te nejednakosti s (-1) dobijemo:

$$-a^2 \leq 0.$$

Oduzmemo li 1 od lijeve i desne strane dobivene nejednakosti, dobit ćemo:

$$-a^2 - 1 \leq 0 - 1,$$

odnosno

$$-a^2 - 1 \leq -1,$$

tj.

$$D \leq -1.$$

Odatle izravno slijedi da je za svaki $a \in \mathbf{R}$ vrijednost determinante sustava D različita od nule (još preciznije, ta je vrijednost manja ili jednaka -1), čime je dokazana tvrdnja zadatka.

3. <u>Isključivo koristeći metodu determinanti</u> odredite vrijednost parametra $a \in \mathbf{R}$ tako da sustav

$$\begin{array}{rrrcl} 17 \cdot x & -15 \cdot y & +23 \cdot z & = & 56 \\ 21 \cdot x & +43 \cdot y & -31 \cdot z & = & 14 \\ 9 \cdot x & -131 \cdot y & +131 \cdot z & = & a+139 \end{array}$$

ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja. Koje od tih rješenja ima zbroj svih komponenti jednak 6?

<u>*Rješenje*</u>: Prvi dio zadatka riješit ćemo tako da izračunamo vrijednosti determinante sustava D i svih triju pomoćnih determinanti D_1, D_2 i D_3, pa sve četiri dobivene vrijednosti izjednačimo s nulom. Vrijednost parametra $a \in \mathbf{R}$ za koju su sve četiri navedene determinante jednake nuli bit će tražena vrijednost.

<u>**Korak 1.**</u> Determinanta sustava D jednaka je:

$$D = \begin{vmatrix} 17 & -15 & 23 \\ 21 & 43 & -31 \\ 9 & -131 & 131 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 17 & -15 & 23 \\ 21 & 43 & -31 \\ 9 & -131 & 131 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 17 & -15 \\ 21 & 43 \\ 9 & -131 \end{matrix} = [17 \cdot 43 \cdot 131 + (-15) \cdot (-31) \cdot 9 + 23 \cdot 21 \cdot (-131)] -$$
$$-[9 \cdot 43 \cdot 23 + (-131) \cdot (-31) \cdot 17 + 131 \cdot 21 \cdot (-15)] = 36673 - 36673 = 0$$

<u>**Korak 2.**</u> Prva pomoćna determinanta D_1 jednaka je:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 56 & -15 & 23 \\ 14 & 43 & -31 \\ a+139 & -131 & 131 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 56 & -15 & 23 \\ 14 & 43 & -31 \\ a+139 & -131 & 131 \end{vmatrix} \begin{matrix} 56 & -15 \\ 14 & 43 \\ a+139 & -131 \end{matrix} =$$

$$= [56 \cdot 43 \cdot 131 + (-15) \cdot (-31) \cdot (a+139) + 23 \cdot 14 \cdot (-131)] - [(a+139) \cdot 43 \cdot 23 + (-131) \cdot (-31) \cdot 56 + 131 \cdot 14 \cdot (-15)] =$$

$$= (465 \cdot a + 337901) - (989 \cdot a + 337377) = -524 \cdot a + 524$$

Korak 2. Druga pomoćna determinanta D_2 jednaka je:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 17 & 56 & 23 \\ 21 & 14 & -31 \\ 9 & a+139 & 131 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 56 & 23 \\ 21 & 14 & -31 \\ 9 & a+139 & 131 \end{vmatrix} \begin{matrix} 17 & 56 \\ 21 & 14 \\ 9 & a+139 \end{matrix} =$$

$$= [17 \cdot 14 \cdot 131 + 56 \cdot (-31) \cdot 9 + 23 \cdot 21 \cdot (a+139)] - [9 \cdot 14 \cdot 23 + (a+139) \cdot (-31) \cdot 17 + 131 \cdot 21 \cdot 56]$$

$$= (483 \cdot a + 82691) - [(-527) \cdot a + 83701] = 1010 \cdot a - 1010$$

Korak 3. Treća pomoćna determinanta D_3 jednaka je:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 17 & -15 & 56 \\ 21 & 43 & 14 \\ 9 & -131 & a+139 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -15 & 56 \\ 21 & 43 & 14 \\ 9 & -131 & a+139 \end{vmatrix} \begin{matrix} 17 & -15 \\ 21 & 43 \\ 9 & -131 \end{matrix} =$$

$$= [17 \cdot 43 \cdot (a+139) + (-15) \cdot 14 \cdot 9 + 56 \cdot 21 \cdot (-131)] - [9 \cdot 43 \cdot 56 + (-131) \cdot 14 \cdot 17 + (a+139) \cdot 21 \cdot (-15)]$$

$$= (731 \cdot a - 54337) - [(-315) \cdot a - 53291] = 1046 \cdot a - 1046$$

Korak 4. Izjednačavanjem svih četiriju izračunanih determinanti s nulom dobivamo:

$(D, D_1, D_2, D_3) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (0, -524 \cdot a + 524, 1010 \cdot a - 1010, 1046 \cdot a - 1046) = (0, 0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -524 \cdot a + 524 = 0 \\ 1010 \cdot a - 1010 = 0 \\ 1046 \cdot a - 1046 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Dakle, vrijednost svih triju pomoćnih determinanti jednaka je nuli ako i samo ako je $a = 1$, dok je vrijednost determinante sustava D uvijek jednaka nuli i ne zavisi o vrijednosti parametra $a \in \mathbf{R}$. Stoga je tražena vrijednost $a = 1$.

U drugom dijelu zadatka iz skupa kojega tvore sva rješenja zadanoga sustava kad je $a = 1$ (a tih rješenja ima beskonačno mnogo) trebamo izdvojiti ono rješenje za koje je zbroj svih njegovih komponenti jednak 6. Taj dodatni zahtjev možemo zapisati u obliku jednadžbe

$$x + y + z = 6.$$

Traženo rješenje možemo odrediti tako da *bilo koju* od jednadžbi koje tvore polazni sustav zamijenimo s jednadžbom $x + y + z = 6$. Opredijelimo se npr. za treću jednadžbu. Dakle, rješavamo metodom determinanti rješavamo novi sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rrrcr} 17\cdot x & -15\cdot y & +23\cdot z & = & 56 \\ 21\cdot x & +43\cdot y & -31\cdot z & = & 14 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{array}$$

__Korak 4.__ Determinanta navedenoga sustava D jednaka je

$$D=\begin{vmatrix} 17 & -15 & 23 \\ 21 & 43 & -31 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{rrr|rr} 17 & -15 & 23 & 17 & -15 \\ 21 & 43 & -31 & 21 & 43 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.=\left[17\cdot 43\cdot 1+(-15)\cdot(-31)\cdot 1+23\cdot 21\cdot 1\right]-$$
$$-\left[1\cdot 43\cdot 23+1\cdot(-31)\cdot 17+1\cdot 21\cdot(-15)\right]=1679-147=1532$$

__Korak 5.__ Prva pomoćna determinanta D_1 jednaka je:

$$D_1=\begin{vmatrix} 56 & -15 & 23 \\ 14 & 43 & -31 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{rrr|rr} 56 & -15 & 23 & 56 & -15 \\ 14 & 43 & -31 & 14 & 43 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right.=$$
$$=\left[56\cdot 43\cdot 1+(-15)\cdot(-31)\cdot 6+23\cdot 14\cdot 1\right]-\left[6\cdot 43\cdot 23+1\cdot(-31)\cdot 56+1\cdot 14\cdot(-15)\right]=5520-3988=1532$$

__Korak 6.__ Druga pomoćna determinanta D_2 jednaka je:

$$D_2=\begin{vmatrix} 17 & 56 & 23 \\ 21 & 14 & -31 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{rrr|rr} 17 & 56 & 23 & 17 & 56 \\ 21 & 14 & -31 & 21 & 14 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right.=$$
$$=\left[17\cdot 14\cdot 1+56\cdot(-31)\cdot 1+23\cdot 21\cdot 6\right]-\left[1\cdot 14\cdot 23+6\cdot(-31)\cdot 17+1\cdot 21\cdot 56\right]=1400-(-1664)=3064$$

__Korak 7.__ Treća pomoćna determinanta D_3 jednaka je:

$$D_3=\begin{vmatrix} 17 & -15 & 56 \\ 21 & 43 & 14 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{rrr|rr} 17 & -15 & 56 & 17 & -15 \\ 21 & 43 & 14 & 21 & 43 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{array}\right.=$$
$$=\left[17\cdot 43\cdot 6+(-15)\cdot 14\cdot 1+56\cdot 21\cdot 1\right]-\left[1\cdot 43\cdot 56+1\cdot 14\cdot 17+6\cdot 21\cdot(-15)\right]=5352-756=4596$$

__Korak 8.__ Traženo rješenje dobit ćemo primjenom Cramerova pravila:

$$(x,y,z)=\left(\frac{D_1}{D},\frac{D_2}{D},\frac{D_3}{D}\right)=\left(\frac{1532}{1532},\frac{3064}{1532},\frac{4596}{1532}\right)=(1,2,3)\ .$$

Dakle, rješenje polaznoga sustava takvo da je zbroj svih njegovih komponenti jednak 6 glasi:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3).$$

4. Zadane su točke $A = (-1, 0, 2)$, $B = (2, 0, 1)$ i $C = (1,1,1)$.

MATEMATIKA 1

zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama (grupe D i E)

a) Dokažite da je uređeni skup $S = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ baza prostora $V^3(O)$.

b) Izračunajte duljinu najkraće visine tetraedra $OABC$.

<u>*Rješenje*</u>: **a)** *Svaka* baza prostora $V^3(O)$ je tročlani linearno nezavisan podskup toga prostora i obrnuto: svaki tročlani linearno nezavisan podskup prostora $V^3(O)$ je baza toga prostora. Skup S se očito sastoji od točno tri različita radijvektora, pa je dovoljno dokazati da je taj skup linearno nezavisan.

Nadalje, tročlani podskup prostora $V^3(O)$ je linearno nezavisan ako i samo ako pripadni radijvektori nisu komplanarni, odnosno ako i samo ako je mješoviti umnožak tih radijvektora (u *bilo kojem* poretku tih radijvektora) različit od nule. Stoga će tvrdnja **a)** zadatka biti dokazana pokažemo li da je mješoviti umnožak triju radijvektora koji tvore skup S različit od nule.

<u>**Korak 1.**</u> Mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku) jednak je:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(razvoj determinante po 2. stupcu)} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2] = 5.$$

<u>**Korak 2.**</u> Budući da je $M = 5 \neq 0$, radijvektori koji tvore skup S nisu komplanarni, pa je skup S linearno nezavisan. Time je tvrdnja **a)** zadatka dokazana.

b) Duljina najkraće visine tetraedra $OABC$ jednaka je količniku trostrukoga obujma tetraedra i najveće od četiriju površina strana tetraedra. Dakle, najprije trebamo izračunati površine svih četiriju strana tetraedra i utvrditi koja od njih je najveća.

<u>**Korak 1.**</u> Računamo površinu strane OAB, tj. trokuta OAB. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Najlakše i najjednostavnije je odabrati radijvektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jer je njihov koordinatni zapis jednak koordinatama njihovih krajnjih točaka.

<u>**Korak 1.a)**</u> Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jednak je:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{(razvoj determinante po 2. stupcu)} = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot [(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2] = 5 \cdot \vec{j} = (0, 5, 0).$$

<u>**Korak 1.b)**</u> Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jednaka je:

$$\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5.$$

<u>**Korak 1.c)**</u> Površina trokuta OAB, odnosno strane OAB tetraedra $OABC$, jednaka je:

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \text{ kv.jed.}$$

Korak 2. Računamo površinu strane OAC, tj. trokuta OAC. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Najlakše i najjednostavnije je odabrati radijvektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ jer je njihov koordinatni zapis jednak koordinatama njihovih krajnjih točaka.

Korak 2.a) Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot \left[(-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \right] - 1 \cdot \left[2 \cdot \vec{i} - (-1) \cdot \vec{k} \right] = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} = (-2, 3, -1).$$

Korak 2.b) Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednaka je:

$$\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \, .$$

Korak 2.c) Površina trokuta OAC, odnosno strane OAC tetraedra $OABC$, jednaka je:

$$P_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \text{ kv.jed.}$$

Korak 3. Računamo površinu strane OBC, tj. trokuta OBC. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Najlakše i najjednostavnije je odabrati radijvektore $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jer je njihov koordinatni zapis jednak koordinatama njihovih krajnjih točaka.

Korak 3.a) Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je:

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot \left[2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \right] + (-1) \cdot (1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{k}) = (-1) \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (-1, -1, 2).$$

Korak 3.b) Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednaka je:

$$\left| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \, .$$

Korak 3.c) Površina trokuta OBC, odnosno strane OBC tetraedra $OABC$, jednaka je:

$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \text{ kv.jed.}$$

<u>**Korak 4.**</u> Računamo površinu strane *ABC*, tj. trokuta *ABC*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Odaberimo npr. radijvektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ čija je početna točka *A*.

<u>**Korak 4.a)**</u> Odredimo koordinatni zapis radijvektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Na vježbama (Primjer 4. u poglavlju 3. *Vektori*) pokazali smo da je vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak razlici radijvektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}$, pa je:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,0,1) - (-1,0,2) = \left[2-(-1), 0-0, 1-2\right] = (3,0,-1) .$$

Analogno, vektor $\overrightarrow{AC}$ jednak je razlici radijvektora $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OA}$, pa je:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1,1,1) - (-1,0,2) = \left[1-(-1), 1-0, 1-2\right] = (2,1,-1) .$$

<u>**Korak 4.b)**</u> Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednak je:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot \left[3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)\right] + (-1) \cdot \left[(-1) \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{k}\right] = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k} = (1,1,3).$$

<u>**Korak 4.c)**</u> Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednaka je:

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11} \text{ kv.jed.}$$

<u>**Korak 4.d)**</u> Površina trokuta *ABC*, odnosno strane *ABC* tetraedra *OABC*, jednaka je:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{11} \text{ kv.jed.}$$

<u>**Korak 5.**</u> Usporedimo sve četiri izračunane površine, tj. usporedimo pozitivne realne brojeve

$$\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \text{ i } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{11} .$$

Kvadriranjem dobijemo:

$$\frac{25}{4}, \frac{14}{4}, \frac{6}{4} \text{ i } \frac{11}{4},$$

pa je očito

$$\frac{6}{4} < \frac{11}{4} < \frac{14}{4} < \frac{25}{4},$$

odnosno

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{11} < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} < \frac{5}{2},$$

odnosno

$$P_{OBC} < P_{ABC} < P_{OAC} < P_{OAB}.$$

Dakle, najveću površinu ima strana *OAB* i ta površina iznosi $P_{OAB} = \frac{5}{2}$ kv. jed.

Korak 6. Obujam tetraedra jednak je jednoj šestini apsolutne vrijednosti mješovitoga umnoška *bilo kojih* triju radijvektora koji razapinju taj tetraedar. U našem je slučaju najlakše i najjednostavnije za tri radijvektora koji razapinju tetraedar *OABC* odabrati upravo radijvektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Njihov mješoviti umnožak izračunali smo u **a)** podzadatku i on je jednak

$$M = 5.$$

Dakle, obujam tetraedra jednak je

$$V = \frac{1}{6} \cdot |M| = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} \text{ kub.jed.}$$

Korak 7. Tražena duljina najkraće visine jednaka je količniku trostrukoga obujma tetraedra i površine strane *OAB* (jer, prema rezultatu Koraka 5., ta strana ima najveću površinu). Dakle,

$$h_{\min} = \frac{3 \cdot V}{P_{OAB}} = \frac{3 \cdot \frac{5}{6}}{\frac{5}{2}} = 1.$$