TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: KOMPLEKSNI BROJEVI

Napomena: U svim zadacima koristi se skraćena oznaka: $\text{cis}\,\varphi := \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

1. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y \cdot i$, $z_2 = \overline{\left(-\sqrt{3} \cdot i - 1\right)^7}$ i $z_3 = \left(2 \cdot \text{cis}\frac{13 \cdot \pi}{18}\right)^6$.

Odredite $x, y \in \mathbf{R}$ tako da vrijedi jednakost $z_1 = \frac{z_2}{z_3}$.

Rješenje: **Korak 1.** Zapišimo broj $z_4 := -\sqrt{3} \cdot i - 1$ u trigonometrijskom obliku.

Korak 1.a) Apsolutna vrijednost (modul) broja z_4 jednaka je

$$r_4 = \sqrt{\left[\text{Re}(z_4)\right]^2 + \left[\text{Im}(z_4)\right]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2\,.$$

Korak 1.b) Broju z_4 pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine je $Z_4 = \left(\text{Re}(z_4), \text{Im}(z_4)\right)$, odnosno $Z_4 = \left(-1, -\sqrt{3}\right)$. Ona se nalazi u trećem kvadrantu kompleksne (Gaussove) ravnine.

Korak 1.c) Rješenje trigonometrijske jednadžbe

$$\text{tg}\, x = \left|\frac{\text{Im}(z_4)}{\text{Re}(z_4)}\right|,$$

tj.

$$\text{tg}\, x = \left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right|,$$

tj.

$$\text{tg}\, x = \sqrt{3}$$

u prvom kvadrantu je kut $x = 60°$. Budući da iz Koraka 1.b) znamo da se točka pridružena broju z_4 nalazi u trećem kvadrantu, argument φ_4 toga broja dobit ćemo tako da na 180° dodamo mjeru kuta x:

$$\varphi_4 = 180° + x,$$
$$\varphi_4 = 180° + 60°,$$
$$\varphi_4 = 240°.$$

Korak 1.d) Trigonometrijski zapis broja z_4 dobivamo koristeći rezultate Koraka 1.a) i 1.d):

$$z_4 = 2 \cdot (\cos 240° + i \cdot \sin 240°)$$

ili skraćeno:

$$z_4 = 2 \cdot \text{cis } 240°.$$

Korak 2. Računamo broj z_2 koristeći de Moivrèovu formulu za potenciranje kompleksnoga broja zapisanoga u trigonometrijskom obliku, te rezultat dobiven na kraju Koraka 1.

Korak 2.a)

$$z_2 = \overline{(z_4)^7} = \overline{(2 \cdot \text{cis } 240°)^7} = \overline{2^7 \cdot \text{cis}(240° \cdot 7)} = \overline{2^7 \cdot \text{cis}(1680°)}$$

Korak 2.b) Kut od 1680° ne pripada intervalu [0°, 360°⟩, pa ga moramo svesti na neki kut iz toga intervala. To radimo tako da taj kut cjelobrojno podijelimo s 360° i pogledamo cjelobrojni ostatak dobiven pri tom dijeljenju:

$$1680 : 360 = 4 \text{ i ostatak } 240°.$$

Ovu jednakost kraće pišemo kao:

$$1680° \equiv 240° \ (\text{mod } 360°).$$

Dakle,

$$z_2 = \overline{2^7 \cdot \text{cis}(240°)}.$$

Korak 2.c) Prigodom konjugiranja kompleksnoga broja zapisanoga u trigonometrijskom obliku njegova apsolutna vrijednost ostaje nepromijenjena, dok se novi argument računa iz izraza:

novi argument = 360° – stari argument.

U našem slučaju je:

$$z_2 = 2^7 \cdot \text{cis}(360° - 240°),$$

odnosno

$$z_2 = 2^7 \cdot \text{cis}(120°).$$

Korak 3. Računamo vrijednost broja z_3. Taj broj je već zapisan u trigonometrijskom obliku, pa odmah možemo primijeniti de Moivrèovu formulu za potenciranje kompleksnoga broja.

Korak 3.a) $z_3 = \left(2 \cdot \text{cis}\frac{13 \cdot \pi}{18}\right)^6 = 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{13 \cdot \pi}{18} \cdot 6\right) = 2^6 \cdot \text{cis}\frac{13 \cdot \pi}{3}.$

Korak 3.b) Kut od $\frac{13 \cdot \pi}{3}$ radijana izrazimo u stupnjevima. Pretvorbu radimo tako da kut iskazan u radijanima pomnožimo sa $\frac{180}{\pi}$. U našem slučaju dobivamo:

$$\frac{13 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 13 \cdot 60 = 780°.$$

Korak 3.c) Kut od 780° ne pripada intervalu [0°, 360°⟩, pa ga moramo svesti na neki kut iz toga intervala. To radimo tako da 780 cjelobrojno podijelimo s 360 i pogledamo cjelobrojni ostatak pri tome dijeljenju:

$$780° : 360° = 2 \text{ i ostatak } 60°,$$

što kraće zapisujemo kao:

$$780° \equiv 60° \text{ (mod } 360°).$$

Korak 3.d) Koristeći rezultat dobiven na kraju Koraka 3.c) zaključujemo da je

$$z_3 = 2^6 \cdot \text{cis } 60°.$$

Korak 4. Podijelimo brojeve z_2 i z_3. Prilikom dijeljenja dvaju kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku, njihove apsolutne vrijednosti se podijele, a a argumenti se oduzmu. Dobivamo:

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2^7 \cdot \text{cis } 120°}{2^6 \cdot \text{ cis } 60°} = \frac{2^7}{2^6} \cdot \text{cis}(120° - 60°) = 2 \cdot \text{cis } 60° .$$

Korak 5. Da bismo mogli usporediti kompleksne brojeve z_1 (zapisanoga u algebarskom obliku) i $\frac{z_2}{z_3}$ (zapisanoga u trigonometrijskom obliku), potonji kompleksan broj moramo zapisati u algebarskom obliku, što je bitno jednostavnije negoli zapisati broj z_1 u trigonometrijskom obliku. Imamo:

$$\frac{z_2}{z_3} = 2 \cdot \text{ cis } 60° = 2 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3} \cdot i .$$

Korak 6. Kompleksni brojevi z_1 i $\frac{z_2}{z_3}$ bit će međusobno jednaki ako i samo ako istodobno budu međusobno jednaki realni dijelovi tih brojeva, odnosno međusobno jednaki imaginarni dijelovi tih brojeva.

Korak 6.a) Realni dio broja z_1 je $\text{Re}(z_1) = \frac{1}{2} \cdot x$, a imaginarni dio broja z_1 je $\text{Im}(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y$.

Korak 6.b) Realni dio broja $\frac{z_2}{z_3}$ je $\text{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = 1$, a imaginarni dio broja z_1 je $\text{Im}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \sqrt{3}$.

Korak 6.c) Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $x = 2$, a iz druge $y = 3$. Dakle, traženi brojevi su $x = 2$ i $y = 3$.

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

2. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = (x + y) + (x - y) \cdot i$, $z_2 = \overline{\left(\frac{1}{2} \cdot \text{cis} \frac{43 \cdot \pi}{24}\right)^{12}}$ i $z_3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^{15}$. Odredite $x, y \in \mathbf{R}$ tako da vrijedi jednakost $z_1 = z_2 \cdot z_3$.

Naputak i rezultat: Primjenom de Moivrèove formule za potenciranje kompleksnoga broja dobiva se $z_2 = \frac{1}{2^{12}} \cdot \text{cis } 90°$. Budući da je $\sqrt{3} - i = 2 \cdot \text{cis } 330°$, slijedi da je $z_3 = 2^{15} \cdot \text{cis } 270°$. Stoga je $z_2 \cdot z_3 = 8 \cdot \text{cis } 360° = 8 \cdot \text{cis } 0° = 8$. Tako dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$ čije rješenje je $x = y = 4$.

3. Skicirajte u Gaussovoj ravnini skup $S = \left\{z \in \mathbf{C} : \text{Re}(z) = -2 \cdot \text{Im}\left(\overline{z}\right)\right\}$.

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = x + y \cdot i$, pri čemu su $x, y \in \mathbf{R}$. Želimo pronaći vezu između brojeva x i y, odnosno kako vrijednost broja y ovisi o vrijednosti broja x. U tu svrhu koristimo uvjet kojim je definiran skup S.

Korak 1. Realni dio kompleksnoga broja $z = x + y \cdot i$ jednak je $\text{Re}(z) = x$.

Korak 2. Konjugat kompleksnoga broja $z = x + y \cdot i$ jednak je $\overline{z} = x - y \cdot i$.

Korak 3. Imaginarni dio konjugata kompleksnoga broja $z = x + y \cdot i$ jednak je $\text{Im}\left(\overline{z}\right) = -y$.

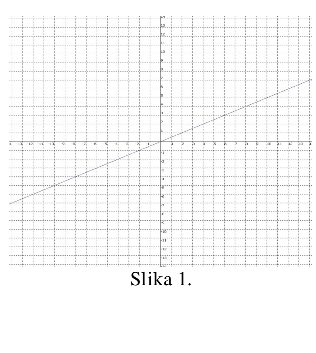
Korak 4. Prema uvjetu kojim je definiran skup S, mora vrijediti jednakost $\text{Re}(z) = -2 \cdot \text{Im}\left(\overline{z}\right)$. Uvrstimo u tu jednakost rezultate dobivene na kraju Koraka 1. i Koraka 3.:

$$x = -2 \cdot (-y),$$

otkuda je

$$y = \frac{1}{2} \cdot x .$$

Dakle, traženi skup točaka tvore sve točke pravca $p \ldots\ y = \frac{1}{2} \cdot x$ (vidjeti Sliku 1.).



Slika 1.

4. Skicirajte u Gaussovoj ravnini skup $S = \left\{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im}(-2 \cdot z) + \operatorname{Re}\left(-\overline{z}\right) \geq 0 \right\}$.

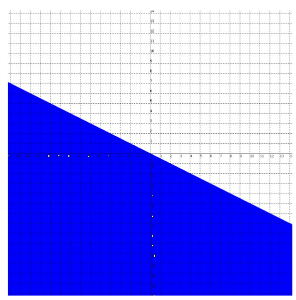
<u>*Naputak i rezultat*</u>: Pretpostavimo da je $z = x + y \cdot i$, pri čemu su $x, y \in \mathbf{R}$. Tada je $\operatorname{Im}(-2 \cdot z) = -2 \cdot y$, a $\operatorname{Re}\left(-\overline{z}\right) = -x$, pa uvrštavanjem u uvjet kojim je definiran skup S dobivamo nejednakost

$$-2 \cdot y - x \geq 0,$$

otkuda je

$$y \leq -\frac{1}{2} \cdot x .$$

Stoga traženi skup točaka tvore sve točke poluravnine ograničene odozgo s pravcem $y = -\frac{1}{2} \cdot x$ (vidjeti Sliku 2.)



Slika 2.

5. Neka su z_0, z_1 i z_2 međusobno različita rješenja jednadžbe $z^3 = 2 + 2 \cdot i$. S točnošću od 10^{-5} izračunajte vrijednost izraza $z_0^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1 \cdot z_2^2$.

<u>*Rješenje*</u>: Koristeći de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja, izračunat ćemo sve treće korijene (zapisane i u algebarskom i u trigonometrijskom obliku) iz kompleksnoga broja $z = 2 + 2 \cdot i$. Potom ćemo te korijene uvrstiti u navedeni izraz.

<u>**Korak 1.**</u> Zapišimo kompleksan broj $z_3 := 2 + 2 \cdot i$ u trigonometrijskom obliku.

Korak 1.a) Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnoga broja z_3 jednaka je

$$r_3 = \sqrt{\left[\operatorname{Re}(z_3)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}(z_3)\right]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

Korak 1.b) Broju z_3 pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine je

$$Z_3 = (\operatorname{Re}(z_3), \operatorname{Im}(z_3)) = (2, 2).$$

Ta točka nalazi se u <u>prvom</u> kvadrantu kompleksne (Gaussove) ravnine.

Korak 1.c) Rješenje trigonometrijske jednadžbe

$$\operatorname{tg} x = \left|\frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Re}(z_3)}\right|,$$

tj.

$$\operatorname{tg} x = \left|\frac{2}{2}\right|,$$

tj.

$$\operatorname{tg} x = 1$$

u prvom kvadrantu je kut $x = 45°$. Budući da iz Koraka 1.b) znamo da se broju z_3 pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine nalazi u prvom kvadrantu, dobiveni kut ujedno je i argument kompleksnoga broja z_3. Dakle,

$$\varphi_3 := \arg z_3 = x = 45°.$$

Korak 1.d) Koristeći rezultate dobivene na kraju Koraka 1.a) i 1.c) zaključujemo da je zapis kompleksnoga broja z_3 u trigonometrijskom obliku

$$z_3 = \sqrt{8} \cdot \operatorname{cis} 45° .$$

Korak 2. Prema de Moivrèovoj formuli za korjenovanje kompleksnoga broja, sva rješenja algebarske jednadžbe

$$z^3 = 2 + 2 \cdot i$$

dana su izrazom

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{45° + k \cdot 360°}{3}\right), \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2,$$

odnosno

$$z_k = \sqrt[6]{2^3} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{45°}{3} + k \cdot \frac{360°}{3}\right), \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2,$$

odnosno

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + k \cdot 120°), \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Stoga je:

– za $k = 0$: $z_0 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + 0 \cdot 120°) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} 15° = \sqrt{2} \cdot (\cos 15° + i \cdot \sin 15°) \approx 1.36603 + 0.36603 \cdot i$
– za $k = 1$: $z_1 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + 1 \cdot 120°) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} 135° = \sqrt{2} \cdot (\cos 135° + i \cdot \sin 135°) = -1 + i$
– za $k = 2$: $z_2 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}(15° + 2 \cdot 120°) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} 255° = \sqrt{2} \cdot (\cos 255° + i \cdot \sin 255°) \approx -0.36603 - 1.36603 \cdot i$

Korak 3. Transformirajmo izraz čiju vrijednost želimo izračunati tako da iz svakoga člana izlučimo faktor $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2$. Dobivamo:

$$z_0^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1 \cdot z_2^2 = (z_0 \cdot z_1 \cdot z_2) \cdot (z_0 + z_1 + z_2).$$

Izračunajmo zasebno svaki od tih dvaju faktora:

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis } 15°\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis } 135°\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis } 255°\right) = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \text{cis}(15° + 135° + 255°) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{cis}(405°)$$

Broj 405 pri dijeljenju s 360 daje ostatak 45, tj. vrijedi kongruencija $405° \equiv 45° \pmod{360°}$. Stoga je:

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{cis } 45°.$$

Korak 4. Koristeći algebarski zapis svakoga rješenja zadane jednadžbe dobivamo:
$z_0 + z_1 + z_2 = (1.36603 + 0.36603 \cdot i) + (-1 + i) + (-0.36603 - 1.36603 \cdot i) = (1.36603 - 1 - 0.36603) + i \cdot$
$\cdot (0.36603 + 1 - 1.36603) = 0 + 0 \cdot i = 0.$

Korak 5. Koristeći rezultate dobivene na krajevima Koraka 3. i 4. dobivamo:

$$z_0^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + z_0 \cdot z_1 \cdot z_2^2 = (z_0 \cdot z_1 \cdot z_2) \cdot (z_0 + z_1 + z_2) = (\sqrt{2} \cdot \text{cis } 45°) \cdot 0 = 0.$$

6. Odredite ukupan broj svih međusobno različitih rješenja algebarske jednadžbe $z^9 = -i$ koja pripadaju intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{4 \cdot \pi}{3} \right]$. Zapišite u algebarskom obliku umnožak najmanjega i najvećega od tih rješenja.

Rješenje: Trigonometrijski oblik broja $x = -i$ je z_{13} = cis 270°. Stoga su sva rješenja zadane jednadžbe dana izrazom

$$z_k = \text{cis}\left(\frac{270° + k \cdot 360°}{9}\right) = \text{cis}(30° + k \cdot 40°), \text{ za } k = 0, 1, \ldots, 8, 9.$$

Budući da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \text{ rad} &= 30° \\ \frac{4 \cdot \pi}{3} \text{ rad} &= 240° \end{aligned},$$

tražimo ukupan broj cijelih brojeva iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} koji zadovoljavaju nejednakost

$$30° < 30° + k \cdot 40° \le 240°,$$

tj. nejednakost

$$0° < k \cdot 40° \le 210°,$$

odnosno nejednakost

$$0 < k \leq 5.25.$$

Ukupno je 5 takvih cijelih brojeva: to su 1, 2, 3, 4 i 5. Najmanji od njih – to je broj 1 – daje i najmanje rješenje polazne jednadžbe koje pripada zadanom intervalu:

$$x_1 = \text{cis}(30° + 1 \cdot 40°) = \text{cis } 70°.$$

Najveći od njih – to je broj 5 – daje i najveće rješenje polazne jendadžbe koje pripada zadanom intervalu:

$$x_5 = \text{cis}(30° + 5 \cdot 40°) = \text{cis } 230°.$$

Stoga je traženi umnožak jednak

$$x_1 \cdot x_5 = \text{cis}(70° + 230°) = \text{cis } 300° = \cos 300° + i \cdot \sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i .$$

7. Odredite ukupan broj svih međusobno različitih rješenja jednadžbe $z^{12} = i$ koja pripadaju intervalu $\left\langle \frac{5 \cdot \pi}{12}, \frac{17 \cdot \pi}{12} \right\rangle$. Zapišite u algebarskom obliku količnik najvećega i najmanjega od tih rješenja.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Trigonometrijski oblik broja $x = i$ je z_{13} = cis 90°. Stoga su sva rješenja zadane jednadžbe dana izrazom:

$$z_k = \text{cis}\left(\frac{90° + k \cdot 360°}{12}\right) = \text{cis}\left(7.5° + k \cdot 30°\right), \text{ za } k = 0, 1, \ldots, 10, 11.$$

Budući da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot \pi}{12} \text{ rad} &= 75°, \\ \frac{17 \cdot \pi}{12} \text{ rad} &= 255° \end{aligned},$$

tražimo ukupan broj cijelih brojeva iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} koji zadovoljavaju nejednakost

$$75° < 7.5° + k \cdot 30° < 255°.$$

odnosno nejednakost

$$2.25 < k < 8.25.$$

Ukupno je 6 takvih cijelih brojeva: to su 3, 4, 5, 6, 7 i 8. Najmanji od njih je $k = 3$ i za tu vrijednost broja k dobivamo x_3 = cis 97.5°. Najveći od njih je $k = 8$ i za tu vrijednost broja k dobivamo x_8 = cis 247.5°. Stoga je traženi količnik jednak

$$\frac{x_8}{x_1} = \frac{\text{cis } 247.5°}{\text{cis } 97.5°} = \text{cis } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i .$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: MATRICE

1. Napišite sve elemente matrice A reda 3 čiji su elementi definirani propisom:

a) $a_{ij} = 2 \cdot i + 3 \cdot j$, za svaki $i, j = 1, 2, 3$;
b) $a_{ij} = 2^{i+j}$, za svaki $i, j = 1, 2, 3$;
c) $a_{ij} = \cos[\pi \cdot (i - j)]$, za svaki $i, j = 1, 2, 3$.

Rješenje: **a)** Imamo redom:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$; $a_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$; $a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$;
$a_{21} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$; $a_{22} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$; $a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$;
$a_{31} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9$; $a_{32} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$; $a_{33} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 6 + 9 = 15$.

Stoga je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

b) Imamo redom:

$a_{11} = 2^{1+1} = 2^2 = 4$; $a_{12} = 2^{1+2} = 2^3 = 8$; $a_{13} = 2^{1+3} = 2^4 = 16$;
$a_{21} = 2^{2+1} = 2^3 = 8$; $a_{22} = 2^{2+2} = 2^4 = 16$; $a_{23} = 2^{2+3} = 2^5 = 32$;
$a_{31} = 2^{3+1} = 2^4 = 16$; $a_{32} = 2^{3+2} = 2^5 = 32$; $a_{33} = 2^{3+3} = 2^6 = 64$.

Stoga je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \\ 16 & 32 & 64 \end{bmatrix}.$$

c) Imamo redom:

$a_{11} = \cos[\pi \cdot (1 - 1)] = \cos 0 = 1$;
$a_{12} = \cos[\pi \cdot (1 - 2)] = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1$;
$a_{13} = \cos[\pi \cdot (1 - 3)] = \cos(-2 \cdot \pi) = \cos(2 \cdot \pi) = 1$;
$a_{21} = \cos[\pi \cdot (2 - 1)] = \cos \pi = -1$;
$a_{22} = \cos[\pi \cdot (2 - 2)] = \cos 0 = 1$;
$a_{23} = \cos[\pi \cdot (2 - 3)] = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1$;
$a_{31} = \cos[\pi \cdot (3 - 1)] = \cos(2 \cdot \pi) = 1$;
$a_{32} = \cos[\pi \cdot (3 - 2)] = \cos \pi = -1$;
$a_{33} = \cos[\pi \cdot (3 - 3)] = \cos 0 = 1$.

Stoga je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

2. Napišite donjetrokutastu matricu B reda 3 određenu propisom

$$b_{ij} = |i - 2 \cdot j|, \text{ za } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \leq j.$$

Rezultat: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Napišite gornjetrokutastu matricu C reda 3 određenu propisom

$$c_{ij} = i^{j-1}, \text{ za } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \geq j.$$

Rezultat: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

4. Napišite dijagonalnu matricu D reda 3 određenu propisom

$$d_{ii} = i^{i+1} + 1 \text{ za } i = 1, 2, 3.$$

Rezultat: $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 82 \end{bmatrix}$.

5. Matrica E je simetrična matrica reda 3. Napišite matricu E ako vrijedi:

$$e_{ij} = j^{i-1} - 1, \text{ za } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \leq j.$$

Rezultat: $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

6. Matrica F je simetrična matrica reda 3. Napišite matricu F ako vrijedi:

$$f_{ij} = \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot i - j)\right], \text{ za } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \geq j.$$

Rezultat: $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Matrica G je antisimetrična matrica reda 3. Napišite matricu G ako vrijedi:

$$g_{ij} = \log_2(4 \cdot i^2 - j), \text{ za } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \leq j.$$

Rezultat: $G=\begin{bmatrix}\log_2 3 & 1 & 0\\ -1 & \log_2 14 & \log_2 13\\ 0 & -\log_2 13 & \log_2 33\end{bmatrix}$.

8. Matrica H je antisimetrična matrica reda 3. Napišite matricu H ako vrijedi:

$$h_{ij}=\ln(2\cdot i^2-j),\ \text{za } i,j\in\{1,2,3\},\ i\geq j.$$

Rezultat: $H=\begin{bmatrix}0 & -\ln 7 & -\ln 17\\ \ln 7 & \ln 6 & -\ln 16\\ \ln 17 & \ln 16 & \ln 15\end{bmatrix}$.

9. Izračunajte $\det(2\cdot A+3\cdot B)$ ako je zadano:

a) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Rezultati: **a)** 50; **b)** 162;

10. Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra $a\in\mathbf{R}$ za koje je matrica A regularna ako je:

a) $A=\begin{bmatrix}a & 2\\ -3 & 1-a\end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix}1-a & 3-a\\ a+1 & a+2\end{bmatrix}$;

c) $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{a}{2} & \sin\frac{a}{2}\\ \cos a & \sin a\end{bmatrix}$.

Naputak i rezultat: Neka je S skup svih realnih rješenja jednadžbe $\det(A)=0$. Tada je skup svih traženih vrijednosti jednak $S_1=\mathbf{R}\setminus S$. Stoga treba izračunati determinantu zadane matrice, riješiti jednadžbu $\det(A)=$ $=0$ u skupu $\mathbf{R}$, pa skup svih traženih vrijednosti dobiti „izbacivanjem“ dobivenih rješenja jednadžbe $\det(A)$ $=0$ iz skupa $\mathbf{R}$. Dobiva se:

a) $a\in\mathbf{R}\setminus\{-2,3\}$;

b) $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$;

c) $a\in\mathbf{R}\setminus\{2\cdot k\cdot\pi : k\in\mathbf{Z}\}$.

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

11. Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra x za koje je matrica A singularna ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} 1-a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} a & a+1 & a-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 8 & -5 & a+3 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} a & 1-a & a+2 \\ 2-a & a+1 & a \\ -a & a & -a \end{bmatrix}$.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Traženi skup S je skup svih realnih rješenja jednadžbe $\det(A) = 0$. Stoga treba izračunati determinantu zadane matrice i riješiti jednadžbu $\det(A) = 0$ u skupu $\mathbf{R}$.

a) Izračunajmo determinantu $\begin{vmatrix} 1-a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ Laplaceovim razvojem po drugom retku. Iznad elementa 1 stoji znak –, iznad elementa 2 znak +, a iznad elementa 3 znak –. Stoga imamo:

$$\begin{vmatrix} 1-a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} a-1 & a+1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 1-a & a+1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 1\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1-a & a-1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -[8\cdot(a-1) - 4\cdot(a+1)] +$$
$$+2\cdot[8\cdot(1-a) - 2\cdot(a+1)] - 3\cdot[4\cdot(1-a) - 2\cdot(a-1)] = -(4\cdot a - 12) + 2\cdot(-10\cdot a + 6) - 3\cdot(-6\cdot a + 6) = -6\cdot a + 6$$

Tako iz $6 - 6 \cdot a = 0$ slijedi $a = 1$.

b) Postupimo analogno kao u **a)**, ali determinantu razvijemo po trećem retku. Iznad elemenata 3 i 5 stoji znak +, dok element 0 zanemarujemo. Tako odmah imamo:

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} a+1 & a-2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} a & a+1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot[1\cdot(a+1) - 2\cdot(a-2)] + 3\cdot[2\cdot a - 3\cdot(a+1)] =$$
$$= 5\cdot(-a+5) + 3\cdot(-a-3) = -8\cdot a + 16$$

Stoga iz $8 \cdot a + 16 = 0$ slijedi $a = 2$.

c) Postupimo analogno kao u **a)** i **b)**. Determinantu je najbolje razviti po drugom retku. Dobiva se: $\det(A) = a^2 + 27 \cdot a$. Tako iz $a^2 + 27 \cdot a = 0$ slijedi $a \in \{-27, 0\}$.
d) Postupimo analogno kao u **a)** i **b)**. Dobiva se $\det(A) = -2 \cdot a^2 + 8 \cdot a$. Tako iz $-2 \cdot a^2 + 8 \cdot a = 0$ slijedi $a \in \{-4, 0\}$.

12. Ispitajte je li svaka od sljedećih matrica regularna, pa, ako jest, odredite joj inverz:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{bmatrix} 38 & 37 & 35 \\ 38 & 41 & 30 \\ 29 & 28 & 27 \end{bmatrix}$.

Naputci i rezultati: **a)** **Korak 1**. Najprije izračunamo $\det(A) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$. Determinanta zadane matrice je različita od nule, pa zaključujemo da je A regularna matrica i da inverz postoji A^{-1}.
Korak 2. Računamo elemente adjunkte polazne matrice:
b_{11} = (u mislima precrtamo prvi redak i prvi stupac) $= (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$;
b_{12} = (u mislima precrtamo prvi redak i drugi stupac) $= (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$;
b_{21} = (u mislima precrtamo drugi redak i prvi stupac) $= (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4$;
b_{22} = (u mislima precrtamo drugi redak i drugi stupac) $= (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$.
Stoga je $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Korak 3. Adjunktu $\tilde{A}$ polazne matrice dobijemo transponiranjem matrice B. Transponirati znači retke matrice B pisati kao stupce (ili obratno: stupce matrice B pisati kao retke). Dobiva se: $\tilde{A} = B^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Korak 4. Traženi inverz jednak je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Analognim postupkom kao u **a)** dobiva se da je matrica B regularna i da je $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$. Primijetimo da za regularne matrice reda 2 općenito vrijedi ekvivalencija: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

c) **Korak 1.** Laplaceovim razvojem po prvom retku izračunamo determinantu matrice C. Imamo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot[1\cdot(-1)-(-2)\cdot 3] - 1\cdot[(-2)\cdot(-1)-3\cdot 3] +$$
$$+(-1)\cdot[(-2)\cdot(-2)-3\cdot 1] = (-1)\cdot(-1+6) - 1\cdot(2-9) - 1\cdot(4-3) = -5+7-1 = 1$$

Dakle, determinanta matrice C je različita od nule, pa je matrica C regularna i postoji inverz C^{-1}.

Korak 2. Računamo elemente adjunkte polazne matrice. Polazna matrica je reda 3, pa će adjunkta imati ukupno 9 elemenata. Imamo redom:

$$b_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot[1\cdot(-1)-(-2)\cdot 3] = -1+6 = 5;$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot[(-2)\cdot(-1)-3\cdot 3] = (-1)\cdot(2-9) = 7;$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot[(-2)\cdot(-2)-3\cdot 1] = 4-3 = 1;$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot[1\cdot(-1)-(-2)\cdot(-1)] = (-1)\cdot(-1-2) = 3;$$

$$b_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot[(-1)\cdot(-1)-3\cdot(-1)] = 1+3 = 4;$$

$$b_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot[(-1)\cdot(-2)-3\cdot 1] = (-1)\cdot(2-3) = 1;$$

$$b_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot[1\cdot 3-1\cdot(-1)] = 3+1 = 4;$$

$$b_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot[(-1)\cdot 3-(-2)\cdot(-1)] = (-1)\cdot(-3-2) = 5;$$

$$b_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot[(-1)\cdot 1-(-2)\cdot 1] = -1+2 = 1.$$

Stoga je $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno $\tilde{A} = B^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Korak 3. Traženi inverz jednak je $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot\tilde{A} = \frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d) Analognim postupkom kao u **c)** najprije dobivamo (najbolje Laplaceovim razvojem po trećem retku) $\det(D) = -1$. To znači da je matrica D regularna i da postoji inverz D^{-1}. Uz malo računa dobije se

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -267 & 19 & 325 \\ 156 & -11 & -190 \\ 125 & -9 & -152 \end{bmatrix}.$$

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

13. Odredite matricu X iz svake od sljedećih jednakosti:

a) $X^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$;

b) $X^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -7 & 2\\ -1 & 3 & -1\end{bmatrix}$;

c) $(X^{-1})^T=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$;

d) $(X^T)^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 8 & -1\\ 3 & -13 & 2\\ -1 & 6 & -1\end{bmatrix}$;

e) $(2\cdot X^{-1})^T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 5\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$;

f) $\left(\frac{1}{3}\cdot X^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$.

<u>*Naputci i rezultati*</u>: **a)** Koristimo identitet $(X^{-1})^{-1} = X$ koji vrijedi za svaku regularnu matricu X. Stoga je $X=(X^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$.

b) Analogno kao u **a)** dobijemo $X=(X^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -7 & 2\\ -1 & 3 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

c) Koristimo identitete $(X^{-1})^{-1} = X$ i $(X^T)^T = X$. (Potonji identitet vrijedi za *bilo koju* realnu matricu X.) Iz njih proizlazi da je jednakost $(X^{-1})^{\mathrm{T}} = A$ ekvivalentna jednakosti $X = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$. Stoga je $X=\left(\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

d) Analogno kao u **c)** podzadatku zaključujemo da je jednakost $(X^{\mathrm{T}})^{-1} = A$ ekvivalentna jednakosti $X = (A^{-1})^T$. Stoga je $X=\left(\begin{bmatrix}-2 & 8 & -1\\ 3 & -13 & 2\\ -1 & 6 & -1\end{bmatrix}^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

e) Analogno kao u **c)** podzadatku slijedi

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&-1&5\\1&1&-3\end{bmatrix}^T\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&-1&1\\1&5&-3\end{bmatrix}^{-1}=2\cdot\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&-1&1\\1&5&-3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&1&1\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

f) Analogno kao u **c)** podzadatku slijedi $X=\left(3\cdot\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&-1&1\\6&4&-1\end{bmatrix}^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&-1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

14. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}-4&-5\\4&6\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}$. Odredite matricu X tako da vrijedi jednakost $E_2-(2\cdot X^{-1})^{\mathrm{T}}=A\cdot B$. ($E_2$ je jedinična matrica reda 2.)

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Koristimo identitete iz zadatka 13. Iz jednakosti $E_2-(2\cdot X^{-1})^{\mathrm{T}}=A\cdot B$ redom slijedi:

$$(2\cdot X^{-1})^T=E_2-A\cdot B$$
$$2\cdot X^{-1}=(E_2-A\cdot B)^T\quad /:2$$
$$X^{-1}=\frac{1}{2}\cdot(E_2-A\cdot B)^T$$
$$X=\left[\frac{1}{2}\cdot(E_2-A\cdot B)^T\right]^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left[(E_2-A\cdot B)^T\right]^{-1}=2\cdot\left[(E_2-A\cdot B)^T\right]^{-1}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo $X=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$.

15. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}-2&-2\\7&9\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}$. Odredite matricu X tako da vrijedi jednakost $(E_2-2\cdot X^{-1})^{\mathrm{T}}=A\cdot B$. ($E_2$ je jedinična matrica reda 2.)

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Koristimo identitete iz zadatka 13. Iz jednakosti $(E_2-2\cdot X^{-1})^{\mathrm{T}}=A\cdot B$ redom slijedi:

$$E_2-2\cdot X^{-1}=(A\cdot B)^T$$
$$2\cdot X^{-1}=E_2-(A\cdot B)^T$$
$$X^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\left[E_2-(A\cdot B)^T\right]$$
$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot\left[E_2-(A\cdot B)^T\right]\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left[E_2-(A\cdot B)^T\right]^{-1}=2\cdot\left[E_2-(A\cdot B)^T\right]^{-1}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo $X=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

1. Za koje vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a \cdot x - 3 \cdot y &= 1 - a \\ 12 \cdot x - a \cdot y &= -12 \end{aligned}$$

a) nema rješenja;
b) ima jedinstveno rješenje (i koje je to rješenje);
c) ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja?

Rješenje: Zadani sustav je sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Formirajmo determinantu sustava D, te dvije pomoćne determinante D_x i D_y.

Korak 1. Determinanta sustava D je determinanta reda 2. To je shema oblika

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

gdje su:

– a_{11} = koeficijent uz nepoznanicu x u 1. jednadžbi;
– a_{12} = koeficijent uz nepoznanicu y u 1. jednadžbi;
– a_{21} = koeficijent uz nepoznanicu x u 2. jednadžbi;
– a_{22} = koeficijent uz nepoznanicu y u 2. jednadžbi.

U našem je slučaju:

$$a_{11} = a,\ a_{12} = -3,\ a_{21} = 12,\ a_{22} = -a$$

pa dobivamo:

$$D = \begin{vmatrix} a & -3 \\ 12 & -a \end{vmatrix} = a \cdot (-a) - 12 \cdot (-3) = 36 - a^2.$$

Korak 2. Prvu pomoćnu determinantu D_x dobijemo tako da prvi stupac determinante D zamijenimo stupcem u kojemu se nalaze slobodni članovi sustava. Drugim riječima, determinanta D_x je je shema oblika

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

gdje su:

– b_1 = slobodni član u 1. jednadžbi;
– a_{12} = koeficijent uz nepoznanicu y u 1. jednadžbi;
– b_2 = slobodni član u 2. jednadžbi;
– a_{22} = koeficijent uz nepoznanicu y u 2. jednadžbi.

U našem je slučaju:

$$b_1 = 1 - a,\ a_{12} = -3,\ b_2 = -12,\ a_{22} = -a$$

pa dobivamo:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-a & -3 \\ -12 & -a \end{vmatrix} = (1-a)\cdot(-a) - (-12)\cdot(-3) = a^2 - a - 36\,.$$

Korak 3. Drugu pomoćnu determinantu D_y dobijemo tako da drugi stupac determinante D zamijenimo stupcem u kojemu se nalaze slobodni članovi sustava. Drugim riječima, determinanta D_y je je shema oblika

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

gdje su:

- a_{11} = koeficijent uz nepoznanicu x u 1. jednadžbi;
- b_1 = slobodni član u 1. jednadžbi;
- a_{21} = koeficijent uz nepoznanicu x u 2. jednadžbi;
- b_2 = slobodni član u 2. jednadžbi.

U našem je slučaju:

$$a_{11} = a,\ b_1 = 1 - a,\ a_{21} = 12,\ b_2 = -12$$

pa dobivamo:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 12 & -12 \end{vmatrix} = a\cdot(-12) - 12\cdot(1-a) = -12\,.$$

Korak 4. Vrijednosti nepoznanica x i y računamo iz izraza

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza dobivenih na krajevima prethodnih triju koraka dobivamo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - a - 36}{36 - a^2} \\ y = \dfrac{12}{a^2 - 36} \end{cases}.$$

a) Polazni sustav nema rješenja za one vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ takve da je $D = 0$, a barem jedna od pomoćnih determinanti D_x i D_y različita od nule. Odredimo $a \in \mathbf{R}$ za koje je $D = 0$. Iz jednadžbe

$$D = 0,$$

odnosno

$$36 - a^2 = 0$$

slijedi $a_1 = -6$, $a_2 = 6$. Za $a = -6$ je $D_x = (-6)^2 - (-6) - 36 = 6 > 0$ i $D_y = -12 < 0$, a za $a = 6$ je $D_x = 6^2 - 6 - 36 = -6 < 0$ i $D_y = -12 < 0$. Dakle, polazni sustav nema rješenja za $a \in \{-6, 6\}$.

b) Polazni sustav ima jedinstveno rješenje za one vrijednosti $a \in \mathbf{R}$ takve da je $D \neq 0$. U **a)** podzadatku smo utvrdili da je $D = 0$ ako i samo ako je $a \in \{-6, 6\}$. Stoga je rješenje zadatka skup svih realnih brojeva različitih od –6 i 6. Kratko pišemo:

$$a \in \mathbf{R} \setminus \{-6, 6\}.$$

To jedinstveno rješenje dano je izrazom

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - a - 36}{36 - a^2} \\ y = \dfrac{12}{a^2 - 36} \end{cases}$$

c) Polazni sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja ako i samo ako su glavna i obje pomoćne determinante istodobno jednake nuli (za neki $a \in \mathbf{R}$). Međutim, $D_y = -12 \neq 0$ neovisno o vrijednosti $a \in \mathbf{R}$, pa zaključujemo da ni za jedan $a \in \mathbf{R}$ sustav nema beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja.

2. Pokažite da je za bilo koje vrijednosti realnoga parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ sustav linearnih jednadžbi

$$[\cos(2012 \cdot \alpha)] \cdot x + [\sin(2012 \cdot \alpha)] \cdot y = \cos(2012 \cdot \alpha)$$
$$[\sin(2012 \cdot \alpha)] \cdot x - [\cos(2010 \cdot 2)] \cdot y = \sin(2012 \cdot \alpha)$$

Cramerov i riješite ga.

<u>Naputak i rezultat</u>: Zadani sustav je Cramerov sustav ako i samo ako istodobno vrijede sljedeća svojstva:

<u>Svojstvo 1.</u> Ukupan broj međusobno različitih jednadžbi sustava (m) jednak je ukupnom broju međusobno različitih nepoznanica (n).
<u>Svojstvo 2.</u> Determinanta sustava je različita od nule.

Polazni sustav linearnih jednadžbi je sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Stoga vrijedi prvo svojstvo ($m = n = 2$). Determinanta sustava jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} \cos(2012 \cdot \alpha) & \sin(2012 \cdot \alpha) \\ \sin(2012 \cdot \alpha) & -\cos(2012 \cdot \alpha) \end{vmatrix} = -\cos^2(2012 \cdot \alpha) - \sin^2(2012 \cdot \alpha) = -\left[\cos^2(2012 \cdot \alpha) + \sin^2(2012 \cdot \alpha)\right] = -1$$

Budući da je $D = -1 \neq 0$ neovisno o vrijednosti realnoga parametra α, vrijedi i drugo svojstvo. Time smo pokazali da je polazni sustav Cramerov sustav. Vrijednosti dviju pomoćnih determinanti su:

$$D_x = \begin{vmatrix} \cos(2012 \cdot \alpha) & \sin(2012 \cdot \alpha) \\ \sin(2012 \cdot \alpha) & -\cos(2012 \cdot \alpha) \end{vmatrix} = -1$$
$$D_y = \begin{vmatrix} \cos(2012 \cdot \alpha) & \cos(2012 \cdot \alpha) \\ \sin(2012 \cdot \alpha) & \sin(2012 \cdot \alpha) \end{vmatrix} = 0 .$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{0}{1} = 0 \end{cases}, \text{ tj. } (x, y) = (1, 0).$$

3. <u>Isključivo koristeći Cramerovo pravilo</u> odredite vrijednost realnoga parametra $t \in \mathbf{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + t \cdot y + 3 \cdot z &= 0 \\ -t \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot z &= 0 \\ 3 \cdot x - 5 \cdot y + z &= 0 \end{aligned}$$

a) nema rješenja;
b) ima točno jedno rješenje (i odredite to rješenje);
c) ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja.

<u>Rješenje</u>: Zadani sustav je sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice. Formirajmo determinantu sustava i tri pomoćne determinante.

<u>Korak 1.</u> Determinanta sustava je determinanta reda 3. To je shema oblika

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

gdje su:

- a_{11} = koeficijent uz nepoznanicu x u 1. jednadžbi;
- a_{12} = koeficijent uz nepoznanicu y u 1. jednadžbi;
- a_{13} = koeficijent uz nepoznanicu z u 1. jednadžbi;
- a_{21} = koeficijent uz nepoznanicu x u 2. jednadžbi;
- a_{22} = koeficijent uz nepoznanicu y u 2. jednadžbi;
- a_{23} = koeficijent uz nepoznanicu z u 2. jednadžbi;
- a_{31} = koeficijent uz nepoznanicu x u 3. jednadžbi;
- a_{32} = koeficijent uz nepoznanicu y u 3. jednadžbi;
- a_{33} = koeficijent uz nepoznanicu z u 3. jednadžbi;

U našem je slučaju:

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = t,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = -t,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 3,\ a_{32} = -5,\ a_{33} = -t,$$

pa dobivamo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t & 3 \\ -t & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ovu determinantu najbrže računamo Saarusovim pravilom. Pokraj determinante nadopišemo njezina prva dva stupca. Izračunamo zbroj svih umnožaka trojki elemenata koje se nalaze na dijagonalama „sjeverozapad – jugoistok“. Potom izračunamo zbroj svih umnožaka trojki elemenata koje se nalaze na dijagonalama „jugozapad – sjeveroistok“. Naposljetku, od prvoga zbroja oduzmemo drugi.

Korak 1.a) Formiramo shemu

$$\left|\begin{matrix} 1 & t & 3 \\ -t & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & t \\ -t & 4 \\ 3 & -5 \end{matrix}$$

Korak 1.b) Trojke elemenata na dijagonalama „sjeverozapad – jugoistok“ su (1, 4, 1), (t, 2, 3) i (3, $-t$, -5), pa računamo zbroj:

$$1 \cdot 4 \cdot 1 + t \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-t) \cdot (-5) = 4 + 6 \cdot t + 15 \cdot t = 21 \cdot t + 4.$$

Korak 1.c) Trojke elemenata na dijagonalama „jugozapad – sjeveroistok“ su (3, 4, 3), (–5, 2, 1) i (1, $-t$, t), pa računamo zbroj:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-t) \cdot t = 36 - 10 - t^3 = 26 - t^2.$$

Korak 1.d) Determinanta sustava D jednaka je razlici izraza dobivenih na krajevima Koraka 1.b) i 1.c):

$$D = 21 \cdot t + 4 - (26 - t^2) = t^2 + 21 \cdot t - 22.$$

Korak 2. Izračunajmo vrijednosti svih pomoćnih determinanti D_x, D_y i D_z. Svaku od tih determinanti dobijemo tako da odgovarajući stupac determinante D zamijenimo sa stupcem koji tvore slobodni koeficijenti (zapisani u istom poretku kao i jednadžbe sustava). No, stupac koji tvore slobodni koeficijenti je nulstupac (0, 0, 0), pa svaka od pomoćnih determinanti ima jedan stupac jednak nulstupcu (determinanta D_x ima prvi stupac jednak nulstupcu, determinanta D_y ima drugi stupac jednak nulstupcu, a determinanta D_z ima treći stupac jednak nulstupcu). Laplaceovim razvojem svake determinante upravo po tom nulstupcu (to smijemo napraviti jer determinantu uvijek smijemo razviti po bilo kojem retku ili stupcu) dobivamo da su sve tri pomoćne determinante jednake 0:

$$D_x = D_y = D_z = 0.$$

(Možemo koristiti i svojstvo determinante: Ako je jedan redak/stupac determinante jednak nulretku/nulstupcu, vrijednost determinante jednaka je 0.)

a) Zadani sustav neće imati niti jedno rješenje ako i samo ako je determinanta sustava D jednaka 0, a barem jedna od triju pomoćnih determinanti različita od nule. Međutim, na kraju Koraka 2. vidjeli smo da su sve tri pomoćne determinante jednake 0 neovisno o vrijednosti realnoga parametra t. Prema tome, ne možemo odabrati realan parametar $t \in \mathbf{R}$ tako da determinanta sustava D bude jednaka nuli, a da barem jedna od pomoćnih determinanti bude različita od nule.

b) Zadani sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je determinanta sustava D različita od nule. Stoga ćemo najprije utvrditi za koje je vrijednosti realnoga parametra t determinanta D jednaka nuli.

$$D = 0 \Rightarrow t^2 + 21 \cdot t - 22 = 0 \Rightarrow t_1 = -22,\ t_2 = 1.$$

Dakle, za $t \in \{-22, 1\}$ determinanta sustava D jednaka je 0. Za sve ostale vrijednosti realnoga parametra t determinanta sustava D je različita od 0. Stoga za t možemo odabrati bilo koji realan broj različit od –22 i različit od –1. To kratko pišemo ovako:

$$t \in \mathbf{R}\backslash\{-22, 1\}.$$

U tom slučaju jedinstveno rješenje sustava je

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{0}{t^2 + 21 \cdot t - 22} = 0 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{0}{t^2 + 21 \cdot t - 22} = 0, \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{0}{t^2 + 21 \cdot t - 22} = 0 \end{cases}$$

tj. $x = y = z = 0$.

c) Zadani sustav će imati beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja ako i samo ako su determinanta sustava D i sve tri pomoćne determinante D_x, D_y i D_z istodobno jednake 0. Na kraju Koraka 2. vidjeli smo da vrijedi jednakost

$$D_x = D_y = D_z = 0, \text{ za svaki } t \in \mathbf{R}.$$

Stoga treba utvrditi za koje $t \in \mathbf{R}$ je determinanta sustava D jednaka nuli. To smo već napravili u rješenju **b)** podzadatka i dobili smo

$$t \in \{-22, 1\}.$$

Dakle, polazni sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja za $t \in \{-22, 1\}$.

4. Isključivo koristeći Cramerovo pravilo pokažite da je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2 \cdot x - y + 2 \cdot z &= 6 \\ x - 2 \cdot y - z &= -6 \end{aligned}$$

Cramerov i riješite ga.

Naputak i rezultat: Analogno kao u Zadatku 2., treba provjeriti vrijede li Svojstvo 1. i Svojstvo 2.

Zadani sustav je sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice, pa vrijedi prvo svojstvo ($m = n = 3$). Determinanta sustava D jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

pa vrijedi i drugo svojstvo. Stoga je zadani sustav Cramerov. Pripadne pomoćne determinante su:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 12 \text{ i } D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 18\,.$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{18}{6} = 3 \end{cases},$$

tj. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

5. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} 97 \cdot x + 173 \cdot y - 29 \cdot z &= 18 \\ -101 \cdot x - 43 \cdot y + 11 \cdot z &= 80 \\ 85 \cdot x + 563 \cdot y - 83 \cdot z &= a + 311 \end{aligned}$$

pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. <u>Isključivo koristeći Cramerovo pravilo</u> odredite vrijednosti realnoga parametra a za koje taj sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja. Koje od tih rješenja ima zbroj svih komponenti jednak 2? Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>Naputak i rješenje</u>: Determinanta sustava D, te sve tri pomoćne determinante D_1, D_2 i D_3 jednake su:

$$D = \begin{vmatrix} 97 & 173 & -29 \\ -101 & -43 & 11 \\ 85 & 563 & -83 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 173 & -29 \\ 80 & -43 & 11 \\ a+311 & 563 & -83 \end{vmatrix} = 656 \cdot a - 656,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 97 & 18 & -29 \\ -101 & 80 & 11 \\ 85 & a+311 & -83 \end{vmatrix} = 1862 \cdot a - 1862,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 97 & 173 & 18 \\ -101 & -43 & 80 \\ 85 & 563 & a+311 \end{vmatrix} = 13302 \cdot a - 13302.$$

Sustav će imati beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja ako i samo ako istodobno vrijedi $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Odatle slijedi

$$\begin{gathered} 656 \cdot a - 656 = 0 \\ 1862 \cdot a - 1862 = 0 \\ 13302 \cdot a - 13302 = 0 \end{gathered}$$

Zajedničko rješenje svih triju jednadžbi je $a = 1$. Prema tome, za $a = 1$ polazni sustav ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja.

Nadalje, iz beskonačnoga skupa kojega tvore sva rješenja sustava za $a = 1$ trebamo izdvojiti ono rješenje za koje je zbroj svih njegovih komponenti jednak 2. Odaberemo *bilo koje* dvije jednadžbe polaznoga sustava (najbolje prvu i drugu), te im dopišemo uvjet $x + y + z = 2$. Tako dobivamo novi sustav:

$$\begin{gathered} 97 \cdot x + 173 \cdot y - 29 \cdot z = 18, \\ -101 \cdot x - 43 \cdot y + 11 \cdot z = 80, \\ x + y + z = 2 \end{gathered}$$

čije rješenje je $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$.

6. Zadan je sustav

$$\begin{gathered} 73 \cdot x - 97 \cdot y + 29 \cdot z = 38 \\ -43 \cdot x + 37 \cdot y - 13 \cdot z = 10 \\ a \cdot x + 19 \cdot y + 11 \cdot z = 7 \cdot a + 5 \end{gathered}$$

pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Isključivo koristeći Cramerovo pravilo odredite vrijednosti realnoga parametra a za koje je zbroj svih triju komponenti rješenja sustava jednak 0. Koje rješenje odgovara toj vrijednosti parametra a? Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Naputak i rješenje: Determinanta sustava D, te sve tri pomoćne determinante D_1, D_2 i D_3 jednake su:

$$D = \begin{vmatrix} 73 & -97 & 29 \\ -43 & 37 & -13 \\ a & 19 & 11 \end{vmatrix} = 188 \cdot a - 21832,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 38 & -97 & 29 \\ 10 & 37 & -13 \\ 7 \cdot a + 5 & 19 & 11 \end{vmatrix} = 1316 \cdot a + 41972,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 73 & 38 & 29 \\ -43 & 10 & -13 \\ a & 7 \cdot a + 5 & 11 \end{vmatrix} = -2870 \cdot a + 24514 ,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 73 & -97 & 38 \\ -43 & 37 & 10 \\ a & 19 & 7 \cdot a + 5 \end{vmatrix} = -12666 \cdot a - 52266 .$$

Rješenje sustava je

$$(x, y, z) = \left(\frac{1316 \cdot a + 41972}{188 \cdot a - 21832}, \frac{-2870 \cdot a + 24514}{188 \cdot a - 21832}, \frac{-12666 \cdot a - 52266}{188 \cdot a - 21832} \right).$$

Iz uvjeta da zbroj svih triju komponenti toga rješenja treba biti jednak 0 slijedi

$$\frac{1316 \cdot a + 41972}{188 \cdot a - 21832} + \frac{-2870 \cdot a + 24514}{188 \cdot a - 21832} + \frac{-12666 \cdot a - 52266}{188 \cdot a - 21832} = 0 ,$$

odnosno

$$\frac{-14220 \cdot a + 14220}{188 \cdot a - 21832} = 0 .$$

Vrijednost razlomka je jednaka nuli ako i samo ako je vrijednost njegova brojnika jednaka nuli. Odatle dobivamo jednadžbu

$$-14220 \cdot a + 14220 = 0,$$

iz koje je $a = 1$. Uvrštavanjem $a = 1$ u izraz za rješenje sustava dobijemo pripadno rješenje:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1316 \cdot 1 + 41972}{188 \cdot 1 - 21832}, \frac{-2870 \cdot 1 + 24514}{188 \cdot 1 - 21832}, \frac{-12666 \cdot 1 - 52266}{188 \cdot 1 - 21832} \right) = (-2, -1, 3) .$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: RADIJVEKTORI

1. Zadane su točke $A = (1, 0, -2)$, $B = (0, -1, 2)$ i $C = (-1, -2, 0)$.

a) Pokažite da je skup $S = \left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right\}$ baza prostora $V^3(O)$.

b) Izračunajte $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \times \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \times \overrightarrow{OB}$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>*Rješenje*</u>: **a)** Prema definiciji, neki skup S je *baza* prostora radijvektora $V^3(O)$ ako se *svaki* vektor iz skupa $V^3(O)$ može prikazati kao linearna kombinacija svih elemenata skupa S (pri čemu neki koeficijenti u toj linearnoj kombinaciji mogu biti jednaki nula). Formalno, ako je $S = \left\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\right\}$ i ako želimo provjeriti je li S baza prostora $V^3(O)$, onda za *svaki* radijvektor $\vec{b} \in V^3(O)$ moramo tražiti realne brojeve (tj. skalare) α_1, α_2, …, α_n tako da vrijedi jednakost $\vec{b} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}$. Takav kriterij je potpuno nepraktičan jer radijvektora ima beskonačno mnogo i nemoguće je za *svaki* od njih provjeriti postojanje navedenih realnih brojeva (a svaki od njih ima posebnu "kombinaciju" skalara, tj. ne postoje dva različita radijvektora koja imaju isti prikaz pomoću radijvektora iz skupa S). Stoga navedenu definiciju moramo zamijeniti praktično korisnijim i primjenjivijim kriterijem.

Na predavanjima i vježbama pokazano je da je skup S baza za prostor $V^3(O)$ ako i samo je S linearno nezavisan tročlani podskup prostora $V^3(O)$, tj. ako i samo ako *istodobno* vrijede sljedeća dva uvjeta:

1.) Skup S se sastoji od točno tri različita elementa.
2.) Skup S je *linearno nezavisan*, tj. niti jedan od elemenata koji tvore skup S ne može se prikazati kao linearna kombinacija *svih* preostalih elemenata toga skupa.

Za konkretan skup S uvjet **1.)** je vrlo lako provjeriti: treba prebrojati koliko različitih elemenata sadrži taj skup. Ako je taj broj različit od tri, gotovi smo s provjerom jer S sigurno nije baza. Ako je taj broj jednak tri, nastavljamo provjeru.

Provjera linearne nezavisnosti tročlanoga skupa (tj. provjera uvjeta 2.) <u>isključivo u prostoru $V^3(O)$</u> svodi se na izračunavanje mješovitoga umnoška svih elemenata toga skupa *u bilo kojem poretku.* Točnije, vrijedi sljedeći kriterij:

Tročlani skup $S \subseteq V^3(O)$ je linearno nezavisan ako i samo ako je mješoviti umnožak svih radijvektora koji tvore taj skup različit od nule. U suprotnom, tj. ako je mješoviti umnožak svih radijvektora koji tvore skup S jednak nuli, skup S je linearno zavisan, tj. barem jedan od elemenata skupa S može se prikazati kao linearna kombinacija *svih* preostalih elemenata skupa S.

Što treba napraviti u zadatku ovakvoga tipa? Najprije prebrojati koliko elemenata ima skup S i izravno ih napisati. Ako skup S nema tri elementa, zadatak je gotov. Ako skup S ima točno tri elementa, treba izračunati njihov mješoviti umnožak. Bude li taj umnožak jednak nuli, skup S je linearno zavisan i nije baza prostora $V^3(O)$. Bude li taj umnožak različit od nule, skup S je linearno nezavisan i predstavlja bazu prostora $V^3(O)$.

<u>**Korak 1.**</u> Popišimo točno sve elemente skupa S. Na predavanjima smo rekli da *radijvektore* (tj. vektore koji počinju u ishodištu koordinatnoga sustava) poistovjećujemo ili identificiramo s njihovom krajnjom točkom

jer su svi elementi potrebni za određivanje vektora (duljina i smjer) jednoznačno zadani ako zadamo krajnju točku vektora. U našem je slučaju:

$$\overrightarrow{OA}=(1,0,-2),\ \overrightarrow{OB}=(0,-1,2) \text{ i } \overrightarrow{OC}=(-1,-2,0)\ .$$

Dakle, skup S za koji želimo pokazati da predstavlja bazu prostora $V^3(O)$ izgleda ovako:

$$S=\left\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right\}=\{(1,0,-2),(0,-1,2),(-1,-2,0)\}$$

Taj se skup očito sastoji od tri različita radijvektora, pa je prvi uvjet iz definicije baze ispunjen.

Korak 2. Preostaje provjeriti linearnu nezavisnost skupa S. U tu svrhu izračunajmo mješoviti umnožak svih radijvektora koji tvore skup S. Podsjetimo se da je mješoviti umnožak triju radijvektora $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ realan broj M određen izrazom:

$$M:=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}:=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Simbol := treba čitati "po definiciji", $\times$ je simobl za vektorski umnožak, a $\bullet$ simbol za skalarni umnožak dvaju vektora). U našem je slučaju:

$$M:=\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\bullet\overrightarrow{OC}:=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Isključivo u slučajevima kad provjeravamo linearnu nezavisnost skupa S smijemo zamijeniti poredak radijvektora, pa npr. izračunati mješoviti umnožak $M=\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)\bullet\overrightarrow{OA}$ ili $M=\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\bullet\overrightarrow{OB}$ i iz njega izvesti zaključak, ali to nam nepotrebno komplicira izračun: jednostavnije je radijvektore smještati u determinantu redoslijedom kojim su navedeni u zapisu skupa S).

Izračunajmo navedenu determinantu koristeći Sarrusovo pravilo:

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{matrix}=[1\cdot(-1)\cdot 0+0\cdot 2\cdot(-1)+(-2)\cdot 0\cdot 2]-[(-1)\cdot(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot 2\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0]=$$
$$=0-(-2-4+0)=0-(-6)=6$$

Dakle, mješoviti umnožak radijvektora koji tvore skup S jednak je 6. Budući da je $6\neq 0$, prema ranije navedenom kriteriju zaključujemo da je skup S linearno nezavisan.

Tako smo zaključili da je skup S linearno nezavisan točlani podskup skupa $V^3(O)$, a to znači da je S baza toga prostora. Time je tvrdnja **a)** dokazana.

b) U rješenju **a)** podzadatka već smo izračunali radijvektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, te dobili:

$$\overrightarrow{OA} = (1,0,-2),\ \overrightarrow{OB} = (0,-1,2) \text{ i } \overrightarrow{OC} = (-1,-2,0)\ .$$

Računamo redom sve radijvektore koji su nam potrebni u rješavanju ovoga zadatka.

<u>**Korak 1.**</u> Izračunajmo najprije sve zbrojeve navedene u okruglim zagradama. Podsjetimo se, dva radijvektora zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove prve komponente, posebno druge, a posebno treće. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (1,0,-2) + (0,-1,2) = (1+0, 0+(-1), (-2)+2) = (1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (0,-1,2) + (-1,-2,0) = (0+(-1), (-1)+(-2), 2+0) = (-1,-3,2)$$
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (1,0,-2) + (-1,-2,0) = (1+(-1), 0+(-2), (-2)+0) = (0,-2,-2)$$

<u>**Korak 2.**</u> Računamo svaki od triju vektorskih umnožaka koji se pojavljuju u navedenom izrazu. Podsjetimo se da je vektorski umnožak radijvektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ opet *radijvektor* (za razliku od skalarnoga i mješovitoga umnoška koji kao rezultat daju realne brojeve) formalno određen determinantom

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

(Ovdje treba **jako** pripaziti jer zamjena redoslijeda radijvektora ili "miješanje" (točnije, permutiranje) redaka determinante dovodi do pogrešnoga rezultata: dobije se radijvektor suprotan traženom.) Ovu determinantu u pravilu računamo koristeći Laplaceov razvoj determinante po prvomu retku **osim ako neki redak ili stupac determinante ne sadrži dvije nule** (tada determinantu razvijamo po tom retku ili stupcu). Tako ćemo traženi radijvektor $\vec{a} \times \vec{b}$ zapravo prikazati kao linearnu kombinaciju radijvektora $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ i $\vec{k} = (0,0,1)$, a iz te je kombinacije vrlo lako "očitati" krajnju točku radijvektora $\vec{a} \times \vec{b}$: kako smo pokazali na vježbama, ona je jednaka koeficijentima uz radijvektore $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ i $\vec{k} = (0,0,1)$ napisanima u istom poretku kao i ti radijvektori.

Istaknimo još da pri Laplaceovu razvoju navedene determinante uz radijvektor $\vec{i}$ uvijek treba nadopisati predznak +, uz radijvektor $\vec{j}$ predznak –, a uz radijvektor $\vec{k}$ opet predznak +.

Tako redom dobivamo:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \text{ (treći stupac sadrži dvije nule, pa determinantu razvijamo po tom stupcu) } =$$

$$= +\vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = +\vec{k} \cdot [1 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1)] = +\vec{k} \cdot [-2-1] = -3 \cdot \vec{k} = (0,0,-3)$$

$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \times \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot [(-3) \cdot (-2) - 0 \cdot 2] - \vec{j} \cdot$$

$\cdot[(-1)\cdot(-2)-1\cdot 2]+\vec{k}\cdot[(-1)\cdot 0-1\cdot(-3)]=6\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}=(6,0,3)$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=$ (prvi stupac sadrži dvije nule, pa determinantu razvijamo po tom stupcu) =

$=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[(-2)\cdot 2-(-1)\cdot(-2)]=-6\cdot\vec{i}=(-6,0,0)$

Korak 3. Preostaje nam zbrojiti sve radijvektore dobivene u Koraku 2. Dobivamo:

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\times\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\times\overrightarrow{OB}=(0,0,-3)+(6,0,3)+(-6,0,0)=(0+6+(-6),0+0+0,$
$-3+3+0)=(0,0,0)=\vec{0}$

Zaključujemo da je traženi radijvektor jednak nulvektoru.

2. Zadane su točke $A=(2,0,-1)$, $B=(0,1,-1)$ i $C=(1,2,0)$.

a) Pokažite da je skup $S=\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ baza prostora $V^3(O)$.

b) Izračunajte $\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Naputak i rezultat: **a)** Skup $S=\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}=\{(2,0,-1),(0,1,-1),(1,2,0)\}$ je očito tročlani skup, a budući da je mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak $M=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=5\neq 0$, skup S je linearno nezavisan. Time su ispunjena oba uvjeta iz definicije baze, pa slijedi tvrdnja.

b) Vrijede sljedeće jednakosti:

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(1,3,-1),\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(3,2,-1),\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2,1,-2);$$
$$\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(3,1,6),\ \overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=(1,-3,-3),\ \overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(-4,2,-3)$$

Stoga je $\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(0,0,0)=\vec{0}$.

3. Zadane su točke $A=(1,a,2)$, $B=(0,-1,1)$ i $C=(1,-1,-1)$, pri čemu je $a\in\mathbf{R}$ realan parametar. Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da točke O, A, B i C tvore četverokut, pa izračunajte površinu toga četverokuta. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Točke O, A, B i C će tvoriti četverokut ako i samo ako sve četiri točke budu pripadale istoj ravnini (tj. ako sve četiri točke budu *komplanarne*) i nikoje tri od njih ne budu kolinearne. To znači da trebamo provjeriti sljedećih pet uvjeta:

1. Sve četiri točke pripadaju istoj ravnini, tj. sve četiri točke su komplanarne.
2. Točke O, A i B nisu kolinearne.
3. Točke O, A i C nisu kolinearne.
4. Točke O, B i C nisu kolinearne.
5. Točke A, B i C nisu kolinearne.

Uvjet **1**. zamjenjujemo njemu ekvivalentnim uvjetom da mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (slično kao u prethodnim dvama zadatcima) treba biti jednak nuli. Naime, prema prethodnim dvama zadatcima znamo da će to značiti da su radijvektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ linearno zavisni, odnosno da se barem jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija preostalih dvaju radijvektora. No, takvo što je moguće jedino ako sve četiri točke pripadaju istoj ravnini jer linearna kombinacija dvaju radijvektora uvijek pripada ravnini određenoj tim radijvektorima.

<u>**Korak 1.**</u> Odredimo radijvektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Imamo:

$$\overrightarrow{OA}=(1,a,2),\ \overrightarrow{OB}=(0,-1,1),\ \overrightarrow{OC}=(1,-1,-1).$$

<u>**Korak 2.**</u> Izračunajmo mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku). Dobivamo:

$$M=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & a\\ 0 & -1\\ 1 & -1\end{matrix}=\left[1\cdot(-1)\cdot(-1)+a\cdot 1\cdot 1+2\cdot 0\cdot(-1)\right]-\left[1\cdot(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 0\cdot a\right]=$$
$$=1+a-(-2-1)=1+a+3=a+4$$

<u>**Korak 3.**</u> Izjednačimo mješoviti umnožak izračunan u prethodnom koraku s nulom. Dobivamo linearnu jednadžbu

$$a+4=0$$

čije je rješenje $a=-4$. Dakle, mogući vrhovi četverokuta su sljedeće četiri točke:

$$O=(0,0,0),\ A=(1,-4,2),\ B=(0,-1,1) \text{ i } C=(1,-1,-1).$$

<u>**Korak 3.**</u> U nastavku provjeravamo da nikoje tri od gore navedenih četiriju točaka ne pripadaju istom pravcu, tj. da nikoje tri od navedenih točaka nisu *kolinearne*. To ćemo učiniti koristeći radijvektore ili vektore.

Korak 3.a) Najprije provjerimo pripadaju li točke O, A i B istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OA}=(1,-4,2)$ i $\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$ kolinearni. (Mogli smo promatrati i neki drugi par vektora, npr. $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$, ali ovaj način je kraći jer ne moramo zasebno određivati niti jedan drugi vektor.) Niti jedan od tih radijvektora nije nulvektor (koji je kolinearan sa *svakim* radijvektorom), pa ćemo primijeniti definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Prema toj definiciji, ti radijvektori kolinearni su ako i samo postoji realan broj k takav da je $\overrightarrow{OA}=k\cdot\overrightarrow{OB}$ (ili obrnuto, svejedno je), odnosno ako i samo ako postoji realan broj k takav da je $(1,-4,2)=k\cdot(0,-1,1)$, odnosno ako i samo ako postoji realan broj k takav da je $(1,-4,2)=(0,-k,k)$. Odmah vidimo da, ma koji god realan broj odabrali za vrijednost k, lijeva i desna strana nikad neće biti jednake jer se ne podudaraju u

prvoj komponenti (a moraju se podudarati u *svim trima* komponentama). Stoga radijvektori $\overrightarrow{OA}=(1,-4,2)$ i $\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$ nisu kolinearni, tj. točke O, A i B ne pripadaju istom pravcu.

Korak 3.b) Provjerimo pripadaju li točke O, A i C istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OA}=(1,-4,2)$ i $\overrightarrow{OC}=(1,-1,-1)$ kolinearni. Niti jedan od tih dvaju vektora nije nulvektor, pa ponovno primijenjujemo definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Tražimo postoji li realan broj k takav da je $\overrightarrow{OA}=k\cdot\overrightarrow{OC}$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(1,-4,2)=k\cdot(1,-1,-1)$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(1,-4,2)=(k,-k,-k)$. Izjednačavanjem prve komponente lijeve strane s prvom komponentom desne strane dobivamo $k=1$, a izjednačavanjem druge komponente lijeve strane s drugom komponentom desne strane dobivamo $k=4$. Nemoguće je da jedna te ista varijabla *istovremeno* poprima dvije različite vrijednosti ($k=1$ i $k=4$), pa zaključujemo da traženi realan broj k ne postoji. To znači da radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ nisu kolinearni, odnosno da točke O, A i C ne pripadaju istom pravcu.

Korak 3.c) Provjeravamo pripadaju li točke O, B i C istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OC}=(1,-1,1)$ kolinearni. Niti jedan od tih dvaju vektora nije nulvektor, pa ponovno primijenjujemo definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Tražimo postoji li realan broj k takav da je $\overrightarrow{OB}=k\cdot\overrightarrow{OC}$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(0,1,-1)=k\cdot(1,-1,-1)$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(0,1,-1)=(k,-k,-k)$. Izjednačavanjem prve komponente lijeve strane s prvom komponentom desne strane dobivamo $k=0$, a izjednačavanjem druge komponente lijeve strane s drugom komponentom desne strane dobivamo $k=-1$. Nemoguće je da jedna te ista varijabla *istovremeno* poprima dvije različite vrijednosti ($k=0$ i $k=-1$), pa zaključujemo da traženi realan broj k ne postoji. To znači da radijvektori $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ nisu kolinearni, odnosno da točke O, B i C ne pripadaju istom pravcu.

Korak 3.d) Preostaje provjeriti pripadaju li točke A, B i C istom pravcu. Te točke pripadaju istom pravcu ako i samo ako su vektori

$$\overrightarrow{AB}=(0,-1,1)-(1,-4,2)=(0-1,-4-(-1),2-1)=(-1,-3,1) \text{ i}$$
$$\overrightarrow{AC}=(1,-1,-1)-(1,-4,2)=(1-1,-4-(-1),2-(-1))=(0,-3,3)$$

kolinearni. (Opet smo mogli gledati i bilo koju drugu dvočlanu kombinaciju vektora, npr. $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$.) Niti jedan od tih dvaju vektora nije nulvektor, pa ponovno primijenjujemo definiciju kolinearnosti dvaju radijvektora u slučaju kad niti jedan od njih nije nulvektor. Tražimo postoji li realan broj k takav da je $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(-1,-3,1)=k\cdot(0,-3,3)$, odnosno postoji li realan broj k takav da je $(-1,-3,1)=(0,(-3)\cdot k,3\cdot k)$. Odmah vidimo da, ma koji god realan broj odabrali za vrijednost k, lijeva i desna strana nikad neće biti jednake jer se ne podudaraju u prvoj komponenti (a moraju se podudarati u *svim trima* komponentama), pa zaključujemo da traženi realan broj k ne postoji. Dakle, radijvektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ nisu kolinearni, odnosno točke A, B i C ne pripadaju istom pravcu.

Ovime smo provjerili svih pet uvjeta potrebnih za zaključak da točke O, A, B i C određuju četverokut. Preostaje izračunati površinu toga četverokuta. Koristit ćemo jednu od geometrijskih interpretacija *duljine vektorskoga umnoška* dvaju radijvektora: *polovica duljine vektorskoga umnoška dvaju radijvektora jednaka je površini trokuta kojemu su dvije stranice određene tim radijvektorima*. Četverokut $OABC$ jednom od njegovih dijagonala, npr. dijagonalom OC, podijelimo na dva trokuta: OAB i OBC. (To sigurno možemo učiniti jer smo u prethodnom dijelu zadatka pokazali da točke O, A i B, odnosno O, B i C nisu kolinearne.) Tada je površina četverokuta $OABC$ jednaka zbroju površina trokutova OAB i OBC, tj.

$$P_{OABC} = P_{OAB} + P_{OBC}.$$

Izračunajmo zasebno svaku površinu na desnoj strani te jednakosti.

Korak 4. Dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ su dvije stranice trokuta OAB. Prema gornjoj interpretaciji duljine vektorskoga umnoška, površina toga trokuta jednaka je polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA} = (1,4,2)$ i $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$. Izračunajmo najprije taj vektorski umnožak:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot [-4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2] - \vec{j} \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) +$$

$$+\vec{k} \cdot [1 \cdot (-1) - 0 \cdot (-4)] = (-2) \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} = (-2,-1,-1)$$

Stoga je površina trokuta OAB jednaka

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \text{ kv.jed.}$$

Korak 5. Dužine $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ su dvije stranice trokuta OBC. Prema gornjoj interpretaciji duljine vektorskoga umnoška, površina toga trokuta jednaka je polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OB} = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OC} = (1,-1,-1)$. Izračunajmo najprije taj vektorski umnožak:

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot [(-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1] -$$

$$-\vec{j} \cdot [0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] + \vec{k} \cdot [0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)] = 2 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = (2,1,1)$$

Stoga je površina trokuta OBC jednaka

$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \text{ kv.jed.}$$

Korak 6. Površina četverokuta $OABC$ jednaka je

$$P_{OABC} = P_{OAB} + P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6} \text{ kv.jed.}$$

4. Zadane su točke $A = (0, a, -1)$, $B = (1, 0, 1)$ i $C = (-1, 1, 0)$, pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da točke O, A, B i C tvore četverokut, pa izračunajte opseg i površinu toga četverokuta. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>Naputak i rezultat</u>: Iz zahtjeva da mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ treba biti jednak nuli dobiva se jednadžba $\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, tj. $-a - 1 = 0$ čije rješenje je $a = -1$. Dakle, $A = (0, -1, -1)$, $B = (1, 0, 1)$ i $C = (-1, 1, 0)$. Lako se provjeri da svaki od skupova $\{O, A, B\}$, $\{O, A, C\}$, $\{O, B, C\}$ i $\{A, B, C\}$ ne sadrži kolinearne točke. Stoga je $OABC$ četverokut. Njegov opseg jednak je zbroju duljina vektora koji određuju njegove stranice:

$$\overrightarrow{OA} = (0,-1,-1),\ \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (0,-1,-1) = (1,1,2),\ \overrightarrow{BC} = (-1,1,0) - (1,0,1) = (-2,1,-1) \text{ i } \overrightarrow{OC} = (-1,1,0)$$

Stoga je opseg četverokuta $OABC$ jednak

$$O = \left|\overrightarrow{OA}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{OC}\right| = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \text{ jed.}$$

Površina toga četverokuta jednaka je zbroju površina trokutova OAB i OBC. Vektorski umnošci radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, odnosno $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ su:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = (-1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = (-1,-1,1)$$

pa je površina četverokuta $OABC$ jednaka

$$P_{OABC} = P_{OAB} + P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ kv.jed.}$$

5. Zadane su točke $A = (0, -1, 1)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (1, -1, 0)$.

a) Pokažite da su točke O, A, B i C vrhovi tetraedra.
b) Izračunajte oplošje i obujam tetraedra $OABC$.
c) Izračunajte duljinu najkraće visine tetraedra $OABC$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>Rješenje</u>: **a)** Za razliku od prethodnih dvaju zadataka, ovdje trebamo pokazati da točke O, A, B i C *nisu* komplanarne, tj. da ne pripadaju jednoj ravnini. Naime, točke O, A, B i C tvore tetraedar ako i samo ako sve četiri točke nisu komplanarne, odnosno ako i samo ako sve četiri točke ne pripadaju istoj ravnini.

Stoga ćemo izračunati mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku) i usporediti ga s nulom. Bude li taj umnožak jednak nuli, točke O, A, B i C su komplanarne i ne određuju tetraedar. U suprotnom, tj. bude li mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku) različit od nule, točke O, A, B i C nisu komplanarne i određuju tetraedar.

Dakle, mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je:

$$M=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\text{ (razvoj npr. po 1. stupcu) }=+1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot[(-1)\cdot 0-1\cdot 1]=1\cdot(-1)=-1$$

Budući da je $M = -1 \neq 0$, navedene četiri točke nisu komplanarne i određuju vrhove tetraedra, što je i trebalo pokazati.

b) **Korak 1.** Prema jednoj od geometrijskih interpretacija *mješovitoga umnoška* radijvektora, obujam tetraedra kojega određuju radijvektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je jednoj šestini apsolutne vrijednosti mješovitoga umnoška tih radijvektora. Taj mješoviti umnožak već smo izračunali u **a)** podzadatku i dobili da je $M = -1$. Stoga je obujam tetraedra $OABC$ jednak

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot|M|=\frac{1}{6}\cdot|-1|=\frac{1}{6}\text{ kub.jed.}$$

Korak 2. Oplošje tetraedra jednako je zbroju površina četiriju trokutova: OAB, OAC, OBC i ABC. U prethodnim dvama zadatcima vidjeli smo da se površina svakoga takvoga trokuta izračunava kao jedna polovica duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koje određuju stranice trokuta (uz nužan dodatni uvjet da oba ta vektora imaju istu početnu točku).

Korak 2.a) Izračunajmo najprije površinu trokuta OAB. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA}=(0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$. Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\text{ (razvoj po 1. stupcu) }=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\vec{i}=(-1,0,0)$$

$$P_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\text{ kv.jed.}$$

Korak 2.b) Izračunajmo površinu trokuta OAC. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA}=(0,-1,1)$ i $\overrightarrow{OC}=(1,-1,0)$. Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[(-1)\cdot 0-(-1)\cdot 1]-\vec{j}\cdot(0\cdot 0-1\cdot 1)+$$

$$+\vec{k}\cdot[0\cdot(-1)-1\cdot(-1)]=1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}=(1,1,1)$$

$$P_{OAC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\text{ kv.jed.}$$

Korak 2.c) Izračunajmo površinu trokuta OBC. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$ i $\overrightarrow{OC}=(1,-1,0)$. Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\text{ (razvoj po 3. stupcu) }=+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{k}\cdot\left[0\cdot(-1)-1\cdot 1\right]=(-1)\cdot\vec{k}=(0,0,-1)$$

$$P_{OBC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\text{ kv.jed.}$$

Korak 2.d) Izračunajmo površinu trokuta ABC. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška vektora $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(0,-1,1)=(0-0,1-(-1),0-1)=(0,2,-1)$ i vektora $\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)-(0,-1,1)=(1-0,-1-(-1),0-1)=(1,0,-1)$ Stoga redom imamo:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\text{ (razvoj po 1. stupcu) }=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}\vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\left[2\cdot(-1)-0\cdot(-1)\right]+$$

$$+1\cdot\left[\vec{j}\cdot(-1)-2\cdot\vec{k}\right]=(-2)\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$$

$$P_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}\text{ kv.jed.}$$

<u>**Korak 3.**</u> Oplošje tetraedra $OABC$ jednako je

$$O=P_{OAB}+P_{OAB}+P_{OBC}+P_{ABC}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}\text{ kv.jed.}$$

c) Podsjetimo se da je obujam tetraedra jednak jednoj trećini umnoška površine osnovke tetraedra i duljine visine tetraedra povučene na tu osnovku. Osnovka tetraedra može biti *bilo koja* strana tetraedra, pa – budući da tetraedar ima ukupno 4 različite strane – imamo ukupno 4 različite visine tetraedra koje se razlikuju po vrhu iz kojega su povučene, ali ne nužno i po duljini. Vrijedi sljedeće pravilo:

Površina osnovke tetraedra i duljina pripadne visine tetraedra su obrnuto razmjerne veličine. Što je veća površina osnovke, to je manja duljina pripadne visine i obrnuto. Najkraća visina tetraedra je visina povučena na osnovku najveće površine, a najdulja visina tetraedra je visina povučena na osnovku najmanje površine.

Iz toga pravila zaključujemo sljedeće: Neka je S bilo koja strana tetraedra određena (stručni naziv je: *razapeta*) vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, te neka je P_S površina te strane. Tada je duljina visine tetraedra povučene na tu stranu jednaka

$$h_S=\frac{3\cdot V}{P_S}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot|M|}{\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\frac{|M|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}.$$

(**Oprez:** U brojniku je s | | označena apsolutna vrijednost realnoga broja M, dok je u nazivniku s | | označena duljina vektorskoga umnoška $\vec{a}\times\vec{b}$. Iako je oznaka ista, riječ je o bitno različitim veličinama.)

U našem slučaju tražimo duljinu najkraće visine tetraedra $OABC$. Ta visina povučena je na stranu tetraedra koja ima najveću površinu. Budući da su strane tetraedra trokutovi OAB, OAC, OBC i ABC, najprije utvrdimo koji od tih trokutova ima najveću površinu. Očito vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}<\frac{3}{2},$$

tj.

$$P_{OAB}=P_{OBC}<P_{OAC}<P_{ABC},$$

pa najveću površinu ima strana ABC. Stoga je duljina pripadne visine tetraedra

$$h_{ABC}=\frac{|M|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1}{3}\text{ jed.}$$

6. Zadane su točke $A = (–4, 2, 0)$ i $B = (a, 8, 6)$, gdje je a realan parametar.

a) Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ razapinju pravokutnik, pa odredite koordinate svih vrhova toga pravokutnika.

b) Izračunajte oplošje i obujam paralelepipeda kojemu je osnovka pravokutnik razapet radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, a jedna stranica radijvektor $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: **a)** Radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ razapinju dvije stranice pravokutnika ako i samo ako su ti radijvektori okomiti. Znamo da su radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Prema tome, vrijednost parametra a odredit ćemo iz zahtjeva da skalarni umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ bude jednak nuli. Budući da je

$$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=(-4,2,0)\bullet(a,8,6)=(-4)\cdot a+2\cdot 8+0\cdot 6=-4\cdot a+16,$$

(pri čemu je s • označen skalarni umnožak), iz zahtjeva

$$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0,$$

tj. iz jednadžbe

$$-4\cdot a+16=0$$

slijedi $a = 4$. Dakle, tri vrha pravokutnika su $O = (0,0,0)$, $A = (–4, 2, 0)$ i $B = (4, 8, 6)$. Četvrti vrh pravokutnika odredit ćemo koristeći činjenicu da dijagonale *bilo kojega* usporednika, pa posebno i pravokutnika, imaju isto polovište. Označimo li nepoznati, četvrti vrh pravokutnika s $C = (x_C, y_C, z_C)$, to znači da dijagonale pravokutnika OC i AB imaju isto polovište. Stoga istodobno moraju vrijediti sljedeće tri jednakosti:

$$x_O + x_C = x_A + x_B,$$
$$y_O + y_C = y_A + y_B,$$
$$z_O + z_C = z_A + z_B.$$

Uvrštavanjem koordinata točaka O, A i B dobivamo:

$$0 + x_C = -4 + 4,$$
$$0 + y_C = 2 + 8,$$
$$0 + z_C = 0 + 6.$$

odnosno

$$x_C = 0,$$
$$y_C = 10,$$
$$z_C = 6.$$

Dakle, svi vrhovi pravokutnika $OABC$ su: $O = (0,0,0)$, $A = (-4, 2, 0)$, $B = (4, 8, 6)$ i $C = (0, 10, 6)$.

b) S predavanja znamo da je vektorski umnožak dvaju radijvektora *uvijek* okomit i na jedan i na drugi radijvektor (točnije, na ravninu određenu tim dvama radijvektorima). U našem slučaju, to znači da je vektorski umnožak $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ okomit na ravninu određenu radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Pravokutnik $OABC$ pripada ravnini određenoj radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, pa iz uvjeta zadatka proizlazi da je jedna stranica paralelepipeda okomita na pravokutnik razapet radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ koji je ujedno i jedna od ukupno šest različitih osnovki paralelepipeda. Jedini paralelepiped koji ima to svojstvo (da je jedna stranica paralelepipeda okomita na jednu osnovku paralelepipeda) je *kvadar*. Stoga ovaj podzadatak zapravo traži da izračunamo oplošje i obujam kvadra čiju osnovku određuju radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, a čija je visina na tu istu osnovku jednaka $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

Korak 1. Izračunajmo najprije vektorski umnožak $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = +\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (2 \cdot 6 - 0 \cdot 8) - \vec{j} \cdot [(-4) \cdot 6 - 4 \cdot 0] +$$
$$+\vec{k} \cdot [(-4) \cdot 8 - 4 \cdot 2] = 12 \cdot \vec{i} + 24 \cdot \vec{j} - 40 \cdot \vec{k} = (12, 24, -40)$$

Korak 2. Obujam paralelepipeda, tj. obujam kvadra jednak je mješovitom umnošku radijvektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$M(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \\ 12 & 24 & -40 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \\ 12 & 24 & -40 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -4 & 2 \\ 4 & 8 \\ 12 & 24 \end{matrix} = [(-4) \cdot 8 \cdot (-40) + 2 \cdot 6 \cdot 12 + 0 \cdot 4 \cdot 24] -$$
$$-[12 \cdot 8 \cdot 0 + 24 \cdot 6 \cdot (-4) + (-40) \cdot 4 \cdot 2] = 1280 + 144 + 576 + 320 = 2320$$

pa je obujam kvadra

$$V = |M| = 2320 \text{ kub.jed.}$$

Korak 3. Oplošje kvadra jednako je dvostrukom zbroju površina sljedećih strana kvadra:

– strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$;
– strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$;

– strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

Sve navedene strane su pravokutnici, odnosno, općenito, usporednici. Kako znamo s predavanja, jedna od geometrijskih interpretacija vektorskoga umnoška je i sljedeća: *Duljina vektorskoga umnoška dvaju radijvektora jednaka je površini usporednika razapetoga tim radijvektorima*. Prema tome, površinu svake strane izračunat ćemo kao duljinu vektorskoga umnpška radijvektora koji razapinju tu stranu. Imamo redom:

Korak 3.a) Strana razapeta radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ je upravo pravokutnik *OABC*. Vektorski umnožak $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ već smo izračunali u Koraku 1. i on je jednak $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(12,24,-40)$. Stoga je površina pravokutnika *OABC* jednaka

$$P_{OABC}=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{12^2+24^2+40^2}=\sqrt{2320}=4\cdot\sqrt{145}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3.b) Izračunajmo površinu P_1 strane razapete radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & 0\\ 12 & 24 & -40\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 24 & -40\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 12 & -40\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 12 & 24\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[2\cdot(-40)-24\cdot 0]-$$

$$-\vec{j}\cdot[(-4)\cdot(-40)-12\cdot 0]+\vec{k}\cdot[(-4)\cdot 24-12\cdot 2]=-80\cdot\vec{i}+160\cdot\vec{j}-120\cdot\vec{k}=(-80,-160,-120)$$

$$P_1=\left|\overrightarrow{OA}\times\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\right|=\sqrt{(-80)^2+(-160)^2+(-120)^2}=\sqrt{46400}=40\cdot\sqrt{29}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3.c) Izračunajmo površinu P_2 strane razapete radijvektorima $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$. Imamo redom:

$$\overrightarrow{OB}\times(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 8 & 6\\ 12 & 24 & -40\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}8 & 6\\ 24 & -40\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 12 & -40\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & 8\\ 12 & 24\end{vmatrix}=+\vec{i}\cdot[8\cdot(-40)-24\cdot 6]-$$

$$-\vec{j}\cdot[4\cdot(-40)-12\cdot 6]+\vec{k}\cdot[4\cdot 24-12\cdot 8]=(-464)\cdot\vec{i}+232\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=(-464,232,0)$$

$$P_2=\left|\overrightarrow{OB}\times\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\right|=\sqrt{(-464)^2+232^2+0^2}=\sqrt{269120}=232\cdot\sqrt{5}\text{ kv.jed.}$$

Korak 3.d). Oplošje kvadra iznosi:

$$O=2\cdot(P_{OABC}+P_1+P_2)=2\cdot\left(4\cdot\sqrt{145}+40\cdot\sqrt{29}+232\cdot\sqrt{5}\right)=8\cdot\left(\sqrt{145}+10\cdot\sqrt{29}+58\cdot\sqrt{5}\right)\text{ kv.jed.}$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

RIJEŠENI PRIMJER 1. KOLOKVIJA

1. Neka su z_0, z_1 i z_2 međusobno različita rješenja jednadžbe $z^3 = i$. Izračunajte $z_0 \cdot z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2$.

<u>Rješenje</u>: Najprije ćemo zapisati broj $z_3 = i$ u trigonometrijskom obliku, pa primijeniti de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja.

<u>Korak 1.</u> Broju $z_3 = i$ u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini pridružena je točka $Z_3 = (0, 1)$. Nacrtamo li tu točku, iz slike ćemo odmah uočiti da je njezina udaljenost od ishodišta Gaussove ravnine jednaka $r = 1$, a da je kut koji spojnica te točke i ishodišta Gaussove ravnine zatvara s realnom osi jednak $\varphi = 90° + 90° + 90° = 270°$: Prema tome, zapis kompleksnoga broja z_3 u trigonometrijskom obliku glasi:

$$z_3 = 1 \cdot \text{cis } 270°.$$

<u>Korak 2.</u> Koristeći de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja, izračunavamo vrijednosti brojeva z_0, z_1 i z_2. Sva rješenja jednadžbe $z^3 = i$ dana su formulom

$$z_k = \sqrt[3]{1} \cdot \text{cis}\left(\frac{270° + k \cdot 360°}{3}\right), \text{ za } k = 0, 1, 2,$$

a tu formulu možemo jednostavnije zapisati kao

$$z_k = \text{cis}(90° + k \cdot 120°), \text{ za } k = 0, 1, 2$$

Uvrštavanjem $k = 0$, $k = 1$ i $k = 2$ dobijemo:

$$\begin{aligned} z_0 &= \text{cis}(90° + 0 \cdot 120°) = \text{ cis } 90°; \\ z_1 &= \text{cis}(90° + 1 \cdot 120°) = \text{ cis } 210°; \\ z_0 &= \text{cis}(90° + 2 \cdot 120°) = \text{ cis } 330°. \end{aligned}$$

<u>Korak 3.</u> Uvrštavanjem gore izračunanih vrijednosti u izraz čiju vrijednost tražimo dobijemo:

$z_0 \cdot z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2 = \text{cis } 90° \cdot \text{cis } 210° + \text{cis } 90° \cdot \text{cis } 330° + \text{cis } 210° \cdot \text{cis } 330° = \text{cis }(90° + 210°) +$
$+ \text{ cis }(90° + 330°) + \text{cis }(210° + 330°) = \text{cis } 300° + \text{cis } 420° + \text{cis } 540° =$ (420 pri dijeljenju sa 360 daje ostatak 60, a 540 pri dijeljenju s 360 daje ostatak 180) $= \text{cis } 300° + \text{cis } 60° + \text{cis } 180° =$
$= \cos 300° + i \cdot \sin 300° + \cos 60° + i \cdot \sin 60° + \cos 180° + i \cdot \sin 180° =$
$= (\cos 300° + \cos 60° + \cos 180°) + i \cdot (\sin 300° + \sin 60° + \sin 180°) =$
$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (-1)\right] + i \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right] = 0 + i \cdot 0 = 0$

2. <u>Isključivo koristeći metodu determinanti</u> dokažite da je za svaki $a \in \mathbf{R}$ sustav

$$\begin{aligned} x \quad &+ (a-1) \cdot y &= 1 - a \\ (a+1) \cdot x \quad &- 2 \cdot y &= 2 \end{aligned}$$

Cramerov sustav.

Rješenje: Dovoljno je dokazati da je determinanta sustava D različita od nule. (Vrijednosti pomoćnih determinanti D_1 i D_2 nisu bitne za rješenje zadatka i ne treba ih računati.)

Korak 1. Determinanta sustava D jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a+1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)-(a+1)\cdot(a-1) = -2-(a^2-1) = -a^2-1\ .$$

Korak 2. Za svaki realan broj a vrijedi nejednakost $a^2 \geq 0$. Množenjem te nejednakosti s (-1) dobijemo:

$$-a^2 \leq 0.$$

Oduzmemo li 1 od lijeve i desne strane dobivene nejednakosti, dobit ćemo:

$$-a^2 - 1 \leq 0 - 1,$$

odnosno

$$-a^2 - 1 \leq -1,$$

tj.

$$D \leq -1.$$

Odatle izravno slijedi da je za svaki $a \in \mathbf{R}$ vrijednost determinante sustava D različita od nule (još preciznije, ta je vrijednost manja ili jednaka -1), čime je dokazana tvrdnja zadatka.

3. Isključivo koristeći metodu determinanti odredite vrijednost parametra $a \in \mathbf{R}$ tako da sustav

$$\begin{array}{rrrcl} 17\cdot x & -15\cdot y & +23\cdot z & = & 56 \\ 21\cdot x & +43\cdot y & -31\cdot z & = & 14 \\ 9\cdot x & -131\cdot y & +131\cdot z & = & a+139 \end{array}$$

ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja. Koje od tih rješenja ima zbroj svih komponenti jednak 6?

Rješenje: Prvi dio zadatka riješit ćemo tako da izračunamo vrijednosti determinante sustava D i svih triju pomoćnih determinanti D_1, D_2 i D_3, pa sve četiri dobivene vrijednosti izjednačimo s nulom. Vrijednost parametra $a \in \mathbf{R}$ za koju su sve četiri navedene determinante jednake nuli bit će tražena vrijednost.

Korak 1. Determinanta sustava D jednaka je:

$$D=\begin{vmatrix}17 & -15 & 23\\ 21 & 43 & -31\\ 9 & -131 & 131\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}17 & -15 & 23\\ 21 & 43 & -31\\ 9 & -131 & 131\end{vmatrix}\begin{matrix}17 & -15\\ 21 & 43\\ 9 & -131\end{matrix}=[17\cdot 43\cdot 131+(-15)\cdot(-31)\cdot 9+23\cdot 21\cdot(-131)]-$$
$$-[9\cdot 43\cdot 23+(-131)\cdot(-31)\cdot 17+131\cdot 21\cdot(-15)]=36673-36673=0$$

Korak 2. Prva pomoćna determinanta D_1 jednaka je:

$$D_1=\begin{vmatrix}56 & -15 & 23\\ 14 & 43 & -31\\ a+139 & -131 & 131\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}56 & -15 & 23\\ 14 & 43 & -31\\ a+139 & -131 & 131\end{vmatrix}\begin{matrix}56 & -15\\ 14 & 43\\ a+139 & -131\end{matrix}=$$
$$=[56\cdot 43\cdot 131+(-15)\cdot(-31)\cdot(a+139)+23\cdot 14\cdot(-131)]-[(a+139)\cdot 43\cdot 23+(-131)\cdot(-31)\cdot 56+131\cdot 14\cdot(-15)]=$$
$$=(465\cdot a+337901)-(989\cdot a+337377)=-524\cdot a+524$$

Korak 3. Druga pomoćna determinanta D_2 jednaka je:

$$D_2=\begin{vmatrix}17 & 56 & 23\\ 21 & 14 & -31\\ 9 & a+139 & 131\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}17 & 56 & 23\\ 21 & 14 & -31\\ 9 & a+139 & 131\end{vmatrix}\begin{matrix}17 & 56\\ 21 & 14\\ 9 & a+139\end{matrix}=$$
$$=[17\cdot 14\cdot 131+56\cdot(-31)\cdot 9+23\cdot 21\cdot(a+139)]-[9\cdot 14\cdot 23+(a+139)\cdot(-31)\cdot 17+131\cdot 21\cdot 56]$$
$$=(483\cdot a+82691)-[(-527)\cdot a+83701]=1010\cdot a-1010$$

Korak 4. Treća pomoćna determinanta D_3 jednaka je:

$$D_3=\begin{vmatrix}17 & -15 & 56\\ 21 & 43 & 14\\ 9 & -131 & a+139\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}17 & -15 & 56\\ 21 & 43 & 14\\ 9 & -131 & a+139\end{vmatrix}\begin{matrix}17 & -15\\ 21 & 43\\ 9 & -131\end{matrix}=$$
$$=[17\cdot 43\cdot(a+139)+(-15)\cdot 14\cdot 9+56\cdot 21\cdot(-131)]-[9\cdot 43\cdot 56+(-131)\cdot 14\cdot 17+(a+139)\cdot 21\cdot(-15)]$$
$$=(731\cdot a-54337)-[(-315)\cdot a-53291]=1046\cdot a-1046$$

Korak 5. Izjednačavanjem svih četiriju izračunanih determinanti s nulom dobivamo:

$(D, D_1, D_2, D_3) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (0, -524 \cdot a + 524, 1010 \cdot a - 1010, 1046 \cdot a - 1046) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases}-524\cdot a+524=0\\ 1010\cdot a-1010=0\\ 1046\cdot a-1046=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ a=1\\ a=1\end{cases}.$$

Dakle, vrijednost svih triju pomoćnih determinanti jednaka je nuli ako i samo ako je $a = 1$, dok je vrijednost determinante sustava D uvijek jednaka nuli i ne zavisi o vrijednosti parametra $a \in \mathbf{R}$. Stoga je tražena vrijednost $a = 1$.

U drugom dijelu zadatka iz skupa kojega tvore sva rješenja zadanoga sustava kad je $a = 1$ (a tih rješenja ima beskonačno mnogo) trebamo izdvojiti ono rješenje za koje je zbroj svih njegovih komponenti jednak 6. Taj dodatni zahtjev možemo zapisati u obliku jednadžbe

$$x + y + z = 6.$$

Traženo rješenje možemo odrediti tako da *bilo koju* od jednadžbi koje tvore polazni sustav zamijenimo s jednadžbom $x + y + z = 6$. Opredijelimo se npr. za treću jednadžbu. Dakle, rješavamo metodom determinanti rješavamo novi sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rrrcr} 17\cdot x & -15\cdot y & +23\cdot z & = & 56 \\ 21\cdot x & +43\cdot y & -31\cdot z & = & 14 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{array}$$

Korak 6. Determinanta navedenoga sustava D jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} 17 & -15 & 23 \\ 21 & 43 & -31 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 17 & -15 & 23 & 17 & -15 \\ 21 & 43 & -31 & 21 & 43 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right. = [17\cdot 43\cdot 1 + (-15)\cdot(-31)\cdot 1 + 23\cdot 21\cdot 1] -$$
$$-[1\cdot 43\cdot 23 + 1\cdot(-31)\cdot 17 + 1\cdot 21\cdot(-15)] = 1679 - 147 = 1532$$

Korak 7. Prva pomoćna determinanta D_1 jednaka je:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 56 & -15 & 23 \\ 14 & 43 & -31 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 56 & -15 & 23 & 56 & -15 \\ 14 & 43 & -31 & 14 & 43 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right. =$$
$$= [56\cdot 43\cdot 1 + (-15)\cdot(-31)\cdot 6 + 23\cdot 14\cdot 1] - [6\cdot 43\cdot 23 + 1\cdot(-31)\cdot 56 + 1\cdot 14\cdot(-15)] = 5520 - 3988 = 1532$$

Korak 8. Druga pomoćna determinanta D_2 jednaka je:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 17 & 56 & 23 \\ 21 & 14 & -31 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 17 & 56 & 23 & 17 & 56 \\ 21 & 14 & -31 & 21 & 14 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right. =$$
$$= [17\cdot 14\cdot 1 + 56\cdot(-31)\cdot 1 + 23\cdot 21\cdot 6] - [1\cdot 14\cdot 23 + 6\cdot(-31)\cdot 17 + 1\cdot 21\cdot 56] = 1400 - (-1664) = 3064$$

Korak 9. Treća pomoćna determinanta D_3 jednaka je:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 17 & -15 & 56 \\ 21 & 43 & 14 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 17 & -15 & 56 & 17 & -15 \\ 21 & 43 & 14 & 21 & 43 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{array}\right. =$$
$$= [17\cdot 43\cdot 6 + (-15)\cdot 14\cdot 1 + 56\cdot 21\cdot 1] - [1\cdot 43\cdot 56 + 1\cdot 14\cdot 17 + 6\cdot 21\cdot(-15)] = 5352 - 756 = 4596$$

Korak 10. Traženo rješenje dobit ćemo primjenom Cramerova pravila:

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right) = \left(\frac{1532}{1532}, \frac{3064}{1532}, \frac{4596}{1532}\right) = (1, 2, 3)\ .$$

Dakle, rješenje polaznoga sustava takvo da je zbroj svih njegovih komponenti jednak 6 glasi:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3).$$

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

4. Zadane su točke $A = (-1, 0, 2)$, $B = (2, 0, 1)$ i $C = (1,1,1)$.

a) Dokažite da je uređeni skup $S = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ baza prostora $V^3(O)$.

b) Izračunajte duljinu najkraće visine tetraedra $OABC$.

<u>*Rješenje*</u>: **a)** *Svaka* baza prostora $V^3(O)$ je tročlani linearno nezavisan podskup toga prostora i obrnuto: svaki tročlani linearno nezavisan podskup prostora $V^3(O)$ je baza toga prostora. Skup S se očito sastoji od točno tri različita radijvektora, pa je dovoljno dokazati da je taj skup linearno nezavisan.

Nadalje, tročlani podskup prostora $V^3(O)$ je linearno nezavisan ako i samo ako pripadni radijvektori nisu komplanarni, odnosno ako i samo ako je mješoviti umnožak tih radijvektora (u *bilo kojem* poretku tih radijvektora) različit od nule. Stoga će tvrdnja **a)** zadatka biti dokazana pokažemo li da je mješoviti umnožak triju radijvektora koji tvore skup S različit od nule.

<u>**Korak 1.**</u> Mješoviti umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (u navedenom poretku) jednak je:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \left[(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2\right] = 5.$$

<u>**Korak 2.**</u> Budući da je $M = 5 \neq 0$, radijvektori koji tvore skup S nisu komplanarni, pa je skup S linearno nezavisan. Time je tvrdnja **a)** zadatka dokazana.

b) Duljina najkraće visine tetraedra $OABC$ jednaka je količniku trostrukoga obujma tetraedra i najveće od četiriju površina strana tetraedra. Dakle, najprije trebamo izračunati površine svih četiriju strana tetraedra i utvrditi koja od njih je najveća.

<u>**Korak 1.**</u> Računamo površinu strane OAB, tj. trokuta OAB. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Najlakše i najjednostavnije je odabrati radijvektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jer je njihov koordinatni zapis jednak koordinatama njihovih krajnjih točaka.

<u>**Korak 1.a)**</u> Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jednak je:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot \left[(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2\right] = 5 \cdot \vec{j} = (0,5,0).$$

<u>**Korak 1.b)**</u> Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jednaka je:

$$\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5\,.$$

<u>**Korak 1.c)**</u> Površina trokuta OAB, odnosno strane OAB tetraedra $OABC$, jednaka je:

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \text{ kv.jed.}$$

<u>Korak 2.</u> Računamo površinu strane *OAC*, tj. trokuta *OAC*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju radijvektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Najlakše i najjednostavnije je odabrati radijvektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ jer je njihov koordinatni zapis jednak koordinatama njihovih krajnjih točaka.

<u>Korak 2.a)</u> Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot [(-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2] - 1 \cdot \left[2 \cdot \vec{i} - (-1) \cdot \vec{k} \right] = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} = (-2, 3, -1).$$

<u>Korak 2.b)</u> Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednaka je:

$$\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}\,.$$

<u>Korak 2.c)</u> Površina trokuta *OAC*, odnosno strane *OAC* tetraedra *OABC*, jednaka je:

$$P_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \text{ kv.jed.}$$

<u>Korak 3.</u> Računamo površinu strane *OBC*, tj. trokuta *OBC*. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Najlakše i najjednostavnije je odabrati radijvektore $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jer je njihov koordinatni zapis jednak koordinatama njihovih krajnjih točaka.

<u>Korak 3.a)</u> Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednak je:

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) } = (-1) \cdot \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \vec{j} \cdot [2 \cdot 1 - 1 \cdot 1] + (-1) \cdot (1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{k}) = (-1) \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (-1, -1, 2).$$

<u>Korak 3.b)</u> Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jednaka je:

$$\left| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}\,.$$

<u>Korak 3.c)</u> Površina trokuta *OBC*, odnosno strane *OBC* tetraedra *OABC*, jednaka je:

$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \text{ kv.jed.}$$

Korak 4. Računamo površinu strane ABC, tj. trokuta ABC. Ta je površina jednaka polovici duljine vektorskoga umnoška *bilo kojih* dvaju vektora koji razapinju taj trokut (i imaju istu početnu točku). Odaberimo npr. radijvektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ čija je početna točka A.

Korak 4.a) Odredimo koordinatni zapis radijvektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Na vježbama (Primjer 4. u poglavlju 3. *Radijvektori*) pokazali smo da je vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak razlici radijvektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}$, pa je:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,0,1)-(-1,0,2)=\left[2-(-1),0-0,1-2\right]=(3,0,-1)\,.$$

Analogno, vektor $\overrightarrow{AC}$ jednak je razlici radijvektora $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OA}$, pa je:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,1,1)-(-1,0,2)=\left[1-(-1),1-0,1-2\right]=(2,1,-1)\,.$$

Korak 4.b) Vektorski umnožak radijvektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednak je:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\text{ (razvoj determinante po 2. stupcu) }=(-1)\cdot\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{k}\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot\vec{j}\cdot\left[3\cdot(-1)-2\cdot(-1)\right]+(-1)\cdot\left[(-1)\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{k}\right]=1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}=(1,1,3).$$

Korak 4.c) Duljina vektorskoga umnoška radijvektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednaka je:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}\text{ kv.jed.}$$

Korak 4.d) Površina trokuta ABC, odnosno strane ABC tetraedra $OABC$, jednaka je:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}\text{ kv.jed.}$$

Korak 5. Usporedimo sve četiri izračunane površine, tj. usporedimo pozitivne realne brojeve

$$\frac{5}{2},\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14},\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\text{ i }\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}\,.$$

Kvadriranjem dobijemo:

$$\frac{25}{4},\frac{14}{4},\frac{6}{4}\text{ i }\frac{11}{4},$$

pa je očito

$$\frac{6}{4}<\frac{11}{4}<\frac{14}{4}<\frac{25}{4},$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}<\frac{5}{2},$$

odnosno

$$P_{OBC} < P_{ABC} < P_{OAC} < P_{OAB}.$$

Dakle, najveću površinu ima strana OAB i ta površina iznosi $P_{OAB} = \frac{5}{2}$ kv. jed.

Korak 6. Obujam tetraedra jednak je jednoj šestini apsolutne vrijednosti mješovitoga umnoška *bilo kojih* triju radijvektora koji razapinju taj tetraedar. U našem je slučaju najlakše i najjednostavnije za tri radijvektora koji razapinju tetraedar $OABC$ odabrati upravo radijvektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Njihov mješoviti umnožak izračunali smo u **a)** podzadatku i on je jednak

$$M = 5.$$

Dakle, obujam tetraedra jednak je

$$V=\frac{1}{6}\cdot|M|=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}\text{ kub.jed.}$$

Korak 7. Tražena duljina najkraće visine jednaka je količniku trostrukoga obujma tetraedra i površine strane OAB (jer, prema rezultatu Koraka 5., ta strana ima najveću površinu). Dakle,

$$h_{\min}=\frac{3\cdot V}{P_{OAB}}=\frac{3\cdot\frac{5}{6}}{\frac{5}{2}}=1.$$

5. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}6&-18&7\\-7&35&-12\\2&-15&5\end{bmatrix}$. Riješite (po X) jednadžbu:

$$3\cdot E_3-(2\cdot X^{-1})^T=A\cdot B.$$

Napomena: E_3 je jedinična matrica reda 3.

Rješenje: Zadatak ćemo riješiti tako da iz zadane jednadžbe najprije izrazimo X kao „funkciju“ argumenata A, B i E_3, a potom izračunamo „vrijednost“ dobivenoga izraza. Pritom ćemo koristiti sljedeća svojstva:

1.) Za svaku regularnu matricu A vrijedi jednakost: $(A^{-1})^{-1} = A$.
2.) Za bilo koji realan broj $\alpha \neq 0$ i svaku regularnu matricu A vrijedi jednakost: $(\alpha\cdot A)^{-1} = \alpha^{-1}\cdot A^{-1}$.
3.) Za svaku matricu A (*bilo kojega* tipa!) vrijedi jednakost: $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

Korak 1.Dakle, iz zadane jednakosti najprije izrazimo X. Imamo redom:

$3\cdot E_3-(2\cdot X^{-1})^T=A\cdot B$
$(2\cdot X^{-1})^T=3\cdot E_3-A\cdot B$ $/^{\mathrm{T}}$
$[(2\cdot X^{-1})^T]^T=(3\cdot E_3-A\cdot B)^{\mathrm{T}}$ (sad primijenimo svojstvo 3)

$2 \cdot X^{-1} = (3 \cdot E_3 - A \cdot B)^{\mathrm{T}}$ $/^{-1}$
$(2 \cdot X^{-1})^{-1} = [(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^{\mathrm{T}}]^{-1}$ (sad primijenimo svojstvo 2)
$2^{-1} \cdot (X^{-1})^{-1} = [(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^{\mathrm{T}}]^{-1}$ (sad primijenimo svojstvo 1)
$2^{-1} \cdot X = [(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^{\mathrm{T}}]^{-1}$ $/\cdot 2$
$X = 2 \cdot [(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^{\mathrm{T}}]^{-1}$.

Korak 2. Izračunajmo matricu $3 \cdot E_3 - A \cdot B$. Imamo redom:

$$3 \cdot E_3 - A \cdot B = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -18 & 7 \\ -7 & 35 & -12 \\ 2 & -15 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & -2 \\ 8 & -14 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -8 & 14 & -4 \end{bmatrix}$$

Korak 3. Izračunajmo matricu $(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^{\mathrm{T}}$. Odmah imamo:

$$(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -8 & 14 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ -2 & -4 & 14 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da broj 2 dijeli svaki element ove matrice. Stoga taj broj možemo „izlučiti“ iz cijele matrice, pa dobijemo:

$$(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Korak 4. Uvrstimo dobiveni izraz u izraz za X:

$$X = 2 \cdot \left[(3 \cdot E_3 - A \cdot B)^T \right]^{-1} = 2 \cdot \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \overset{\text{svojstvo (2)}}{\overbrace{=}} 2 \cdot 2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Korak 5. Da bismo odredili inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, najprije moramo izračunati njezinu determinantu. Možemo je izračunati Laplaceovim razvojem po prvom retku, ali lakše i brže je iskoristiti svojstvo determinante koje kaže da se determinanta ne mijenja ako neki njezin redak dodamo nekom drugom retku (i rezultat zapišemo u taj drugi redak). Stoga ćemo zbrojiti prva dva retka determinante promatrane matrice, rezultat zapisati u drugi redak determinante, pa cijelu determinantu razviti po njezinu prvom stupcu. Imamo redom:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{I. redak + II. redak} \rightarrow \text{II. redak}}{\overbrace{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{razvoj po} \\ \text{1. stupcu}}}{\overbrace{=}} 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1.$$

Korak 6. Računamo elemente adjunkte matrice iz Koraka 5. Označimo pomoću matricu (pomoću koje formiramo adjunktu) s C. Imamo redom:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 7] = 4 - 7 = -3;$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot (-2) - 0 \cdot 7] = (-1) \cdot (2 - 0) = -2;$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-2)] = -1 - 0 = -1;$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4)] = (-1) \cdot (-2 + 4) = -2;$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot (-2) - 0 \cdot (-4)] = -2 - 0 = -2;$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [1 \cdot 1 - 0 \cdot 1] = (-1) \cdot (1 - 0) = -1;$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-4)] = 7 - 8 = -1;$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [1 \cdot 7 - (-1) \cdot (-4)] = (-1) \cdot (7 - 4) = -3;$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1] = -2 + 1 = -1.$$

Dakle, $C = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, pa je željena adjunkta $\widetilde{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Korak 7. Sad imamo sve potrebno za računanje matrice X. Jednostavno je:

$$X = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \cdot \widetilde{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Na raspolaganju su nam tri otpornika. Spojimo li serijski sva tri otpornika, dobit ćemo otpor od 19 Ω. Spojimo li serijski prvi i drugi otpornik, dobit ćemo otpor za 1 veći od otpora trećega otpornika. Spojimo li usporedno prvi i drugi otpornik, dobit ćemo otpor od 2.1 Ω. Odredite otpore tih otpornika.

Rješenje: Neka su R_1, R_2 i R_3 traženi otpori, pri čemu je, za svaki i = 1, 2, 3, R_i otpor i – toga otpornika. Spojimo li serijski sva tri otpornika, ukupan otpor bit će jednak zbroju otpora spojenih otpornika. Prema uvjetu zadatka, taj je otpor jednak 19 Ω, pa mora vrijediti jednakost:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 19.$$

Nadalje, spojimo li serijski prvi i drugi otpornik, ukupan otpor bit će ponovno jednak zbroju otpora spojenih otpornika. Prema uvjetu zadatka, taj ukupan otpor mora biti za 1 veći od otpora trećega otpornika, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$R_1 + R_2 = R_3 + 1.$$

Spojimo li usporedno prvi i drugi otpornik, ukupan otpor R u tom slučaju računamo prema izrazu $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Prema uvjetu zadatka je $R = 2.1$, pa mora vrijediti jednakost:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2.1}.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 19 \\ R_1 + R_2 = R_3 + 1 \\ \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{2.1} \end{cases}$$

Uvrstimo li drugu jednakost u prvu, dobit ćemo:

$$R_3 + 1 + R_3 = 19,$$

odnosno

$$2 \cdot R_3 = 18.$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $R_3 = 9\ \Omega$. Tako polazni sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice svodimo na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 10 \\ \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{2.1} \end{cases}$$

Taj sustav možemo pisati u ekvivalentnom obliku:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 10 \\ \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = \dfrac{1}{2.1} \end{cases},$$

odnosno invertiranjem obiju strana druge jednadžbe

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 10 \\ \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2.1 \end{cases}$$

Uvrstimo li prvu jednakost u drugu, dobit ćemo:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{10} = 2.1,$$

a odavde množenjem s 10 slijedi $R_1 \cdot R_2 = 21$. Tako smo dobili novi sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 10 \\ R_1 \cdot R_2 = 21 \end{cases}$$

Prema Vièteovim formulama, R_1 i R_2 su rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 10 \cdot x + 21 = 0.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobijemo:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10+4}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ x_2 = \dfrac{10-4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (7, 3)$$

Dakle, $R_1 = 7\ \Omega$ i $R_2 = 3\ \Omega$ (ili obratno). Stoga su traženi otpori promatranih otpornika (složeni kao uređeni strogo rastući niz) 3 Ω, 7 Ω i 9 Ω.

7. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = -\sqrt{3} - i$ i $z_2 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right)$. Izračunajte $(z_1 \cdot z_2)^{2012}$ i zapišite rezultat u eksponencijalnom obliku.

<u>*Naputak i rješenje*</u>: Odmah je $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, a iz jednadžbe $\mathrm{tg}\ \varphi = \sqrt{3}$ i činjenice da točka koja pripada broju z_1 leži u trećem kvadrantu Gaussove ravnine slijedi $\varphi = \frac{7}{6} \cdot \pi$. Tako je $z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7}{6} \cdot \pi}$ i $z_2 = \frac{1}{2} \cdot e^{i \cdot \frac{5}{6} \cdot \pi}$, pa konačno imamo:

$$(z_1 \cdot z_2)^{2012} = \left[\left(2 \cdot e^{i \cdot \frac{7}{6} \cdot \pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{i \cdot \frac{5}{6} \cdot \pi}\right)\right]^{2012} = \left[\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot e^{i \cdot \left(\frac{7}{6} \cdot \pi + \frac{5}{6} \cdot \pi\right)}\right]^{2012} = (e^{i \cdot 2 \cdot \pi})^{2012} = (e^{i \cdot 0})^{2012} = e^{i \cdot 0 \cdot 2012} = e^{i \cdot 0}$$

<u>*Napomena*</u>: Argument kompleksnoga broja uvijek mora pripadati intervalu $[0, 2 \cdot \pi\rangle$. Ako to nije slučaj, onda argument jednak ili veći od $2 \cdot \pi$ treba podijeliti s $2 \cdot \pi$, te kao novi argument uzeti ostatak pri tom dijeljenju. U ovome slučaju $(2 \cdot \pi) : (2 \cdot \pi) = 1$ i ostatak 0, pa je argument broja $e^{i \cdot 2 \cdot \pi}$ jednak 0, tj. vrijedi $e^{i \cdot 2 \cdot \pi} = e^{i \cdot 0}$, pa smo tu jednakosti iskoristili u pretpredzadnjem koraku računa.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: FUNKCIJE

1. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5 \cdot x - 8$. Riješite jednadžbu $f(x) = f^{-1}(x)$.

Rješenje: Na vježbama smo pokazali (Primjer 3. u točki 4.1.) da je svaka funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a \cdot x + b$ bijekcija. Stoga sigurno postoji inverz f^{-1}. Zadatak ćemo riješiti tako da najprije odredimo propis inverza zadane funkcije, a potom riješimo navedenu jednadžbu.

Korak 1. Odredimo inverz zadane funkcije. Najprije zapišimo:

$$y = 5 \cdot x - 8.$$

Zamijenimo x i y, pa dobijemo:

$$x = 5 \cdot y - 8.$$

Iz ove jednakosti izrazimo y:

$$x + 8 = 5 \cdot y,$$
$$y = \frac{1}{5} \cdot (x + 8).$$

Preostaje zamijeniti y s $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 8).$$

Korak 2. U jednadžbi $f(x) = f^{-1}(x)$ umjesto $f(x)$ zapišimo $5 \cdot x - 8$, a umjesto $f^{-1}(x)$ zapišimo $\frac{1}{5} \cdot (x + 8)$. Dobivamo jednadžbu:

$$5 \cdot x - 8 = \frac{1}{5} \cdot (x + 8).$$

Množenjem te jednadžbe s 5 dobivamo:

$$25 \cdot x - 40 = x + 8,$$

odnosno

$$24 \cdot x = 48,$$

a odavde je $x = 2$. Budući da je skup $\mathbf{R}$ domena i funkcije f i funkcije f^{-1}, $x = 2$ jest rješenje navedene jednadžbe.

Napomena: Da je npr. domena funkcije f bio segment $[3, 4]$, $x = 2$ ne bi bilo rješenje zadane jednadžbe. Naime, rješenje jednadžbe u kojoj se pojavljuju funkcije *uvijek* mora pripadati domeni svake funkcije koja se pojavljuje u jednadžbi, pa zbog toga na kraju zadatka uvijek valja provjeriti je li taj zahtjev ispunjen.

2. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a \cdot x + b$, pri čemu su $a \neq 0$ i b realni parametri. Uz koji uvjet na vrijednosti a i b jednadžba $f(x) = f^{-1}(x)$:

a) ima jedinstveno rješenje (i koje je to rješenje);
b) nema realnih rješenja;
c) ima beskonačno mnogo različitih realnih rješenja?

<u>Naputak i rezultat</u>: Funkcija f je bijekcija i njezin je inverz (Primjer 3. iz točke 4.1.)

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}.$$

Rješavanjem jednadžbe $f(x) = f^{-1}(x)$, odnosno jednadžbe

$$a \cdot x + b = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$$

dobijemo

$$x = \frac{-b - a \cdot b}{a^2 - 1},$$

odnosno

$$x = \frac{-b \cdot (a+1)}{(a-1) \cdot (a+1)}.$$

Odatle slijedi da za $a = -1$ jednadžba $f(x) = f^{-1}(x)$ ima beskonačno mnogo različitih realnih rješenja, za $a = 1$ ta jednadžba nema realnih rješenja, a za $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{b}{1-a}$. Dakle, odgovori na postavljena pitanja su redom:

a) $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ i u tom slučaju rješenje je $x = \frac{b}{1-a}$;
b) $a = 1$;
c) $a = -1$ (lako se provjeri da u tom slučaju za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi jednakost $f(x) = f^{-1}(x)$).

3. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \to \langle 1, +\infty \rangle$, $f(x) = e^x + 1$. Odredite propis neparne funkcije g ako je zadano:

$$\begin{cases} D_g = \mathbf{R} \setminus [-1, 1]; \\ g(x) = f^{-1}(x), \text{ za svaki } x \in \langle 1, +\infty \rangle. \end{cases}$$

<u>Rješenje</u>: Najprije ćemo odrediti propis funkcije f^{-1} postupkom opisanim u zadatcima 1. i 2.

<u>**Korak 1.**</u> Zapišemo

$$y = e^x + 1.$$

<u>**Korak 2.**</u> Zamijenimo x i y u gornjoj jednakosti:

$$x = e^y + 1.$$

Korak 3. Iz dobivene jednakosti izrazimo y pomoću x:

$$x = e^y + 1,$$
$$x - 1 = e^y,$$
$$y = \ln(x - 1).$$

Korak 4. Propis funkcije f^{-1} je

$$f^{-1}(x) = \ln(x - 1).$$

Korak 5. Budući da je nepoznata funkcija g definirana na skupu $D_g = \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$, tj. na skupu $D_g = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, preostaje nam odrediti propis funkcije g na skupu $\langle -\infty, -1\rangle$. Naime, propis funkcije g na skupu $\langle 1, +\infty\rangle$ već znamo: on je jednak propisu funkcije f^{-1}, tj. vrijedi:

$$g(x) = \ln(x - 1), \text{ za svaki } x \in \langle 1, +\infty\rangle.$$

Da nema uvjeta koji kaže da g mora biti neparna funkcija, njezin propis na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ mogli bismo definirati bilo kojom formulom koja ima smisla za svaki x iz toga intervala. No, u ovom slučaju je, zbog uvjeta da g mora biti neparna funkcija, ta formula jednoznačno određena.

Koristimo osnovno svojstvo neparne funkcije:

$$g(-x) = -g(x), \text{ za svaki } x \in D_g$$

kojega množenjem s -1 možemo napisati kao:

$$g(x) = -g(-x), \text{ za svaki } x \in D_g.$$

Ovaj oblik omogućava nam iskazivanje algoritma za određivanje nepoznatoga propisa koji vrijedi na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$. On glasi:

Korak I. U propisu funkcije g na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$ zamijeniti x s $(-x)$.
Korak II. Rezultat dobiven u Koraku I. pomnožiti s (-1).
Korak III. Umnožak dobiven u Koraku II. je traženi propis funkcije g na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$.

(Da smo zahtijevali da funkcija g bude parna, u gornjem algoritmu bismo izostavili Korak II. i rezultat bi bio izraz dobiven u Koraku I. Algoritam vrijedi za bilo koji od sljedećih parova intervala: $\{\langle a, b\rangle, \langle -b, -a\rangle\}$, $\{[a, b\rangle, \langle -b, -a]\}$, $\{\langle a, b], [-b, -a\rangle\}$ i $\{[a, b], [-b, -a]\}$, gdje su $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, tj. za bilo koji par intervala koji je simetričan s obzirom na nulu.)

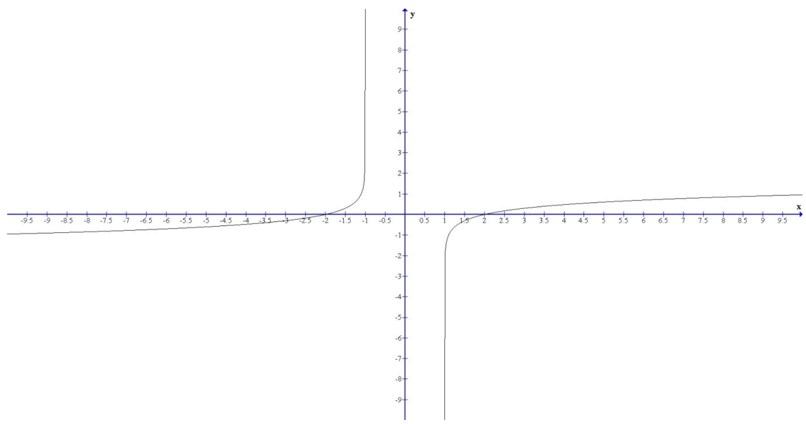
U našem slučaju odmah dobivamo:

$$g(x) = -\ln(-x - 1), \text{ za svaki } x \in \langle -\infty, -1\rangle.$$

Korak 6. Iz Koraka 5. slijedi da je traženi propis funkcije $g : \mathbf{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbf{R}$ jednak

$$g(x)=\begin{cases}\ln(x-1), \text{ za } x>1;\\ -\ln(-x-1), \text{ za } x<-1.\end{cases}$$

Graf funkcije g prikazan je na Slici 3. (Uočimo da je taj graf centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnoga sustava, što je jedno od osnovnih svojstava grafa *bilo koje* neparne realne funkcije.)



Slika 3.

4. Zadana je funkcija $f : \langle -1, +\infty\rangle \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x + 1) - 1$. Odredite propis parne funkcije g i nacrtajte njezin graf ako je zadano:

$$\begin{cases} D_g=\mathbf{R};\\ g(x)=f^{-1}(x), \text{ za svaki } x\in\left[0,+\infty\right\rangle.\end{cases}$$

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Najprije odredimo propis funkcije f^{-1}:

I. $y = \ln(x + 1) - 1$
II. $x = \ln(y + 1) - 1$
$x + 1 = \ln(y + 1)$
$y + 1 = e^{x+1}$
$y = e^{x+1} - 1$
III. $f^{-1}(x) = e^{x+1} - 1$.

Preostaje odrediti propis funkcije g na intervalu $\mathbf{R} \setminus [0, +\infty\rangle = \langle -\infty, 0\rangle$. Koristeći zahtjev da g mora biti parna funkcija, algoritmom opisanim u rješenju 3. zadatka (bez Koraka II., tj. jedino treba x zamijeniti s $-x$) dobivamo:

$$g(x) = e^{-x+1} - 1, \text{ za svaki } x \in \langle -\infty, 0\rangle,$$

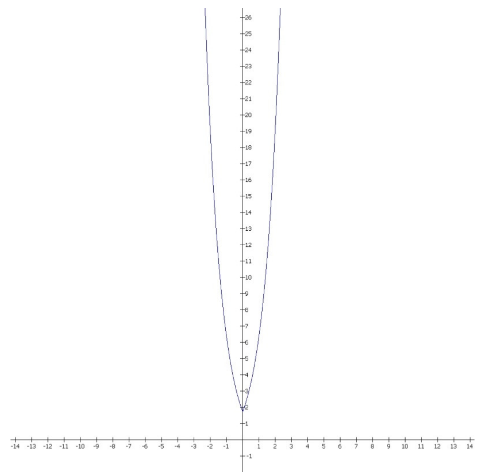
odnosno

$$g(x) = e^{1-x} - 1, \text{ za svaki } x \in \langle -\infty, 0\rangle.$$

Dakle, traženi propis funkcije g je

$$g(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 1, \text{ za } x \geq 0; \\ e^{1-x} - 1, \text{ za } x < 0. \end{cases}$$

Graf funkcije g prikazan je na Slici 4. (Uočimo da je graf funkcije g simetričan s obzirom na os Oy, tj. s obzirom na os ordinatu, što je jedno od osnovnih svojstava *bilo koje* parne realne funkcije.)



Slika 4.

5. Zadan je polinom $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $p(x) = x^4 - x^3 - 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4$. Ako je $x = 1 + i$ jedno rješenje jednadžbe $p(x) = 0$, odredite skup svih nultočaka zadanoga polinoma. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Rješenje: Na predavanjima (točka 4.2.) smo istakli sljedeći poučak:

Neka je p polinom čiji su koeficijenti realni brojevi. Ako je kompleksan broj z rješenje jednadžbe p(x) = 0, onda je i broj $\overline{z}$ rješenje iste jednadžbe.

U ovom slučaju znamo jedno rješenje jednadžbe $p(x) = 0$: to je $x = 1 + i$. Prema gornjem poučku, rješenje iste jednadžbe je i kompleksan broj $\overline{x} = 1 - i$. To znači da je polinom $p(x)$ djeljiv s polinomom

$$p_1(x) = [x - (1+i)] \cdot [x - (1-i)] = x^2 - 2 \cdot x + 2 .$$

(Polinom p_1 možemo odrediti i tako da – koristeći Vietéove formule – napišemo kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $1 + i$ i $1 - i$. Zbroj tih rješenja jednak je 2, a umnožak $1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2$, pa kvadratna jednadžba glasi $x^2 - 2 \cdot x + 2 = 0$. Lijeva strana te jednadžbe je polinom $p_1(x) = x^2 - 2 \cdot x + 2$. Budući da je skup svih rješenja jednadžbe $p_1(x) = 0$ podskup skupa svih rješenja jednadžbe $p(x) = 0$, to upravo znači da je polinom p djeljiv s polinomom p_1.)

Iz upravo navedene činjenice izravno slijedi da postoji polinom p_2 takav da je

$$p = p_1 \cdot p_2.$$

Polinom p_2 odredit ćemo tako da podijelimo polinom p s polinomom p_1:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 4) : (x^2 - 2\cdot x + 2) = x^2 + x - 2 \\
\underline{x^4 - 2\cdot x^3 + 2\cdot x^2} \\
\qquad x^3 - 4\cdot x^2 + 6\cdot x - 4 \\
\qquad \underline{x^3 - 2\cdot x^2 + 2\cdot x} \\
\qquad\quad -2\cdot x^2 + 4\cdot x - 4 \\
\qquad\quad \underline{-2\cdot x^2 + 4\cdot x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dakle, $p_2(x) = x^2 + x - 2$. Budući da polinom p_1 nema nultočaka (jer su jedini kandidati za nultočke rješenja jednadžbe $p_1(x) = 0$, a to su $x_1 = 1 + i$ i $x_2 = 1 - i$ koji nisu realni brojevi), skup svih nultočaka polinoma p jednak je skupu svih nultočaka polinoma p_2. Njih ćemo odrediti tako da riješimo jednadžbu $p_2(x) = 0$ i pogledamo samo ona njezina rješenja koja su realni brojevi.

Iz jednadžbe

$$x^2 + x - 2 = 0$$

slijedi $x_3 = -2$ i $x_4 = 1$. Ta dva rješenja su realni brojevi, pa zaključujemo da je traženi skup jednak

$$N(p) = \{-2, 1\}.$$

6. Odredite sve nultočke polinoma $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $p(x) = p(x) = x^4 + 4\cdot x^3 - 6\cdot x^2 - 4\cdot x - 5$, pa rastavite taj polinom na faktore.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Polinom p je polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^4) jednak 1. Stoga su svi kandidati za nultočke svi cjelobrojni djelitelji slobodnoga člana toga polinoma, odnosno svi cjelobrojni djelitelji broja –5. Ukupno su 4 takva djelitelja: –5, –1, 1 i 5. Izravnim uvrštavanjem se provjerava da je $p(-5) = p(-1) = p(1) = 0$ i $p(5) = 960$, pa slijedi da je skup svih nultočaka polinoma $p(x)$ jednak

$$N(p) = \{-5, -1, 1\}.$$

Stoga p možemo zapisati u obliku:

$$p(x) = (x + 5)\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot p_1(x).$$

Polinom $p_1(x)$ odredit ćemo tako da polinom $p(x)$ podijelimo polinomom $p_2(x) = (x + 5)\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)$, odnosno polinomom $p_2(x) = x^3 + 5\cdot x^2 - x - 5$. Tim dijeljenjem se dobije $p_1(x) = x - 1$. Stoga je traženi rastav jednak

$$p(x) = (x + 5)\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)^2.$$

7. Zadana je prava racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{x^2 - 3\cdot x + 2}{x^3 - 6\cdot x^2 + 8\cdot x}.$$

Odredite domenu, nultočke i polove zadane funkcije. Klasificirajte polove s obzirom na red i uklonjivost, pa skicirajte kvalitativni graf zadane funkcije.

<u>*Rješenje*</u>: Moramo riješiti dvije algebarske jednadžbe:

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

I. $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$
II. $x^3 - 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x = 0$.

Jednadžba **I.** je kvadratna jednadžba. Njezinim rješavanjem dobijemo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
Jednadžba **II.** je kubna jednadžba. Budući da je slobodni član na lijevoj strani jednak nuli, iz svakoga od članova na toj strani jednadžbe možemo izlučiti x. Tako dobijemo jednadžbu:

$$x \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 8) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nula ako i samo ako je bar jedan od njih jednak nuli. Stoga imamo dvije mogućnosti:

a) $x = 0$;
b) $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$.

Iz **a)** trivijalno slijedi $x = 0$, a rješavanjem kvadratne jednadžbe u mogućnosti **b)** dobijemo $x_1 = 2$ i $x_2 = 4$. Prema tome, skup svih rješenja jednadžbe **I**. je $N_1 = \{1, 2\}$, a skup svih rješenja jednadžbe **II.** je $N_2 = \{0, 2, 4\}$. Sada možemo prijeći na određivanje traženih skupova.

Domena funkcije f je skup koji se dobije kad se iz skupa **R** „izbace“ nultočke nazivnika te funkcije. Stoga je $D_f = \mathbf{R} \setminus N_2 = \mathbf{R}\setminus\{0, 2, 4\}$. (Ovaj skup je najpodesnije zapisati u navedenom obliku, a ne npr. kao unija triju intervala i sl.)

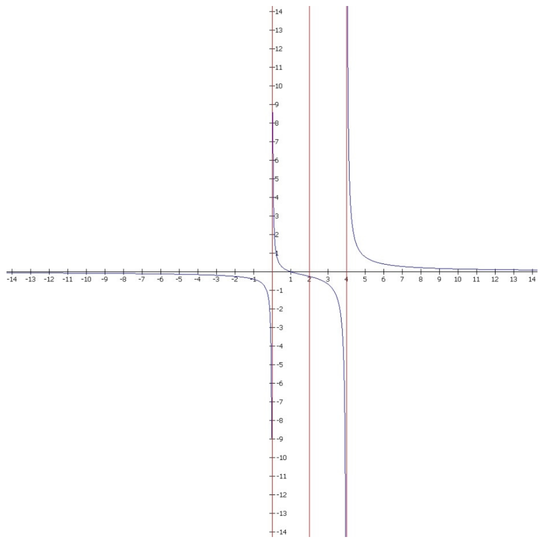
Skup svih nultočaka zadane funkcije jednak je skupu $N_1\setminus N_2$, tj. skupu svih realnih brojeva koji su nultočke brojnika funkcije f, a nisu nultočke njezina nazivnika. Očito je $N(f) = N_1\setminus N_2 = \{1\}$ jer je $x = 2$ nultočka i brojnika i nazivnika funkcije f, pa ne može biti nultočka funkcije f. (Za $x = 2$ vrijednost funkcije f nije definirana.)

Skup svih polova funkcije f jednak je skupu N_2, tj. $P(f) = N_2 = \{0, 2, 4\}$. (Taj skup se **uvijek** podudara sa skupom N_2.) Klasificirajmo svaki pol s obzirom na red i uklonjivost. Znamo da kubna jednadžba, odnosno jednadžba 3. stupnja *uvijek* ima točno tri rješenja (koja općenito pripadaju skupu kompleksnih brojeva **C**). No, rješavajući tu jednadžbu mi smo odredili sva tri rješenja: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ i $x_3 = 4$, pa zaključujemo da se svako od tih rješenja u ispisu svih rješenja javlja točno jednom. To znači da se radi o polovima 1. reda ili polovima reda 1. (Da se u ispisu svih rješenja npr. $x_1 = 0$ pojavio dva puta, taj pol bi bio pol 2. reda itd.)

Nadalje, neki pol je *uklonjiv* ako je ujedno i nultočka brojnika funkcije f i ako se u ispisu svih nultočaka brojnika funkcije f pojavljuje točno onoliko puta koliko se pojavljuje u ispisu svih nultočaka nazivnika funkcije f. Budući da je $N_1 \cap N_2 = \{2\}$, jedini kandidat za uklonjiv pol je $x = 2$. Preostaje provjeriti da se u ispisu svih rješenja jednadžbe **I.** $x = 2$ pojavljuje jednako mnogo puta kao i u ispisu svih rješenja jednadžbe **II.** Lako vidimo da je ta tvrdnja točna jer se $x = 2$ pojavljuje po jednom i u ispisu svih rješenja jednadžbe **I**. i u ispisu svih rješenja jednadžbe **II.** Stoga zaključujemo:

$x = 2$ je uklonjiv pol 1. reda, a $x = 0$ i $x = 4$ su neuklonjivi polovi 1. reda.

Preostaje skicirati kvalitativni graf zadane funkcije. U točkama $x = 0$, $x = 2$ i $x = 4$ povučemo pravce usporedne s osi ordinata (tj. s osi Oy). Potom gledamo funkciju na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 2, 4\rangle$ i $\langle 4, +\infty\rangle$. (U svakom tom intervalu odaberemo dvije–tri točke i izračunamo vrijednost funkcije f u tim točkama.) Dobivamo graf prikazan na Slici 5. (Crveno označeni pravci su pravci $x = 0$, $x = 2$ i $x = 4$.)



Slika 5.

8. Zadana je prava racionalna funkcija

$$f(x)=\frac{x^2-2\cdot x-3}{x^3-3\cdot x^2-x+3}.$$

Odredite domenu, nultočke i polove zadane funkcije. Klasificirajte polove s obzirom na red i uklonjivost, pa skicirajte kvalitativni graf zadane funkcije.

Naputak i rezultat: Nultočke nazivnika zadane funkcije određujemo rješavajući jednadžbu $x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3 = 0$. Tu jednadžbu možemo riješiti kao jednadžbu u zadatku 6., ali brže je izlučiti x^2 iz prvih dvaju članova, a (-1) iz trećega i četvrtoga člana. Tako dobijemo:

$$x^2 \cdot (x-3) + (-1) \cdot (x-3) = 0,$$

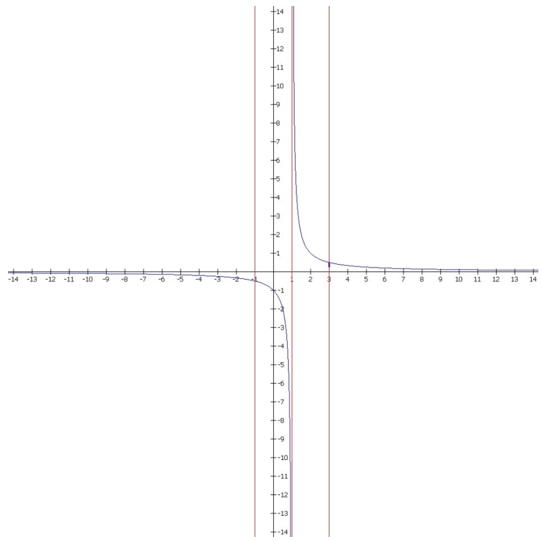
odnosno

$$(x-3) \cdot (x^2-1) = 0.$$

Stoga su sva rješenja navedene jednadžbe $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 3$. Odatle zaključujemo:

- domena zadane funkcije je skup $D_f = \mathbf{R} \backslash \{-1, 1, 3\}$;
- zadana funkcija nema nultočaka (jedini kandidati za nultočke su realna rješenja jednadžbe $x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0$, tj. $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$, ali ti brojevi su ujedno i nultočke nazivnika, pa ne mogu biti i nultočke zadane funkcije);
- skup svih polova zadane funkcije je $P(f) = \{-1, 1, 3\}$. Sva tri pola su 1. reda, a jedino pol $x = 3$ nije uklonjiv.

Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 6.



Slika 6.

9. Zadana je prava racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3}{x^3 - 3 \cdot x + 2}.$$

Odredite domenu, nultočke i polove zadane funkcije. Klasificirajte polove s obzirom na red i uklonjivost, pa skicirajte kvalitativni graf zadane funkcije.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Rješavanjem jednadžbe $4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = 0$ dobijemo $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Jednadžbu $x^3 - 3 \cdot x + 2 = 0$ rješavamo tako da najprije ispišemo sve djelitelje broja 2. To su –2, –1, 1 i 2. Izravnim uvrštavanjem u jednadžbu provjeravamo da su $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$ sva rješenja navedene jednadžbe, pa je potrebno utvrditi koje od njih se pojavljuje dva puta. Naime, ako kubna jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima ima dva cjelobrojna rješenja, onda je i treće njezino rješenje cijeli broj. U ovom slučaju to mora biti jedan od brojeva –2 i 1. Podijelimo li polinome $x^3 - 3 \cdot x + 2$ i $x + 2$, dobit ćemo količnik $x^2 - 2 \cdot x + 1$ i ostatak 0, pa vrijedi jednakost

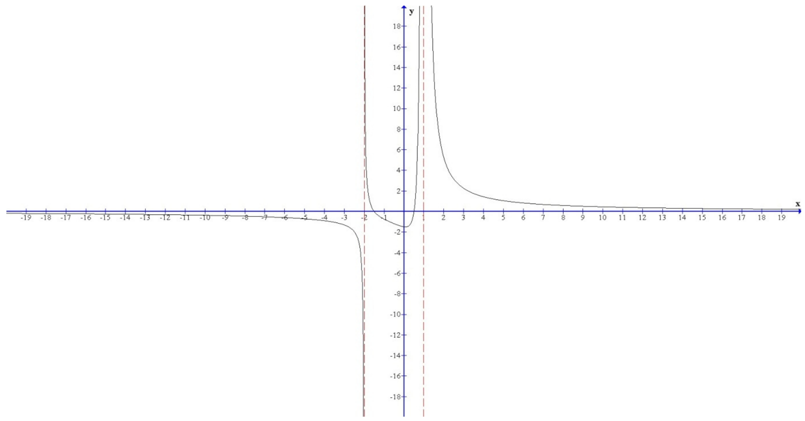
$$x^3 - 3 \cdot x + 2 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 1),$$

odnosno, zbog $x^2 - 2 \cdot x + 1 = (x - 1)^2$,

$$x^3 - 3 \cdot x + 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)^2.$$

Prema tome, $x_2 = 1$ je dvostruko rješenje jednadžbe $x^3 - 3 \cdot x + 2 = 0$, tj. sva rješenja te jednadžbe su $x_1 = -2$, $x_2 = x_3 = 1$.

Domena zadane funkcije je skup $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$, skup svih nultočaka je $N_f = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, a skup svih polova $P_f = \{-2, 1\}$. Oba pola su neuklonjiva. Prvi pol (–2) je reda 1, a drugi (1) je reda 2. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 7.



Slika 7.

10. Zadana je prava racionalna funkcija

$$f(x)=\frac{2\cdot x^2-x-1}{x^3-3\cdot x^2+4}.$$

Odredite domenu, nultočke i polove zadane funkcije. Klasificirajte polove s obzirom na red i uklonjivost, pa skicirajte kvalitativni graf zadane funkcije.

Naputak i rezultat: Rješavanjem jednadžbe $2 \cdot x^2 - x - 1 = 0$ dobijemo $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$. Jednadžbu $x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 = 0$ rješavamo tako da najprije ispišemo sve djelitelje broja 24. To su –4, –2, –1, 1, 2 i 4. Izravnim uvrštavanjem u jednadžbu provjeravamo da su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ sva rješenja navedene jednadžbe, pa je potrebno utvrditi koje od njih se pojavljuje dva puta. U ovom slučaju to mora biti jedan od brojeva –1 i 2. Podijelimo li polinome $x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$ i $x + 1$, dobit ćemo količnik $x^2 - 4 \cdot x + 4$ i ostatak 0, pa vrijedi jednakost

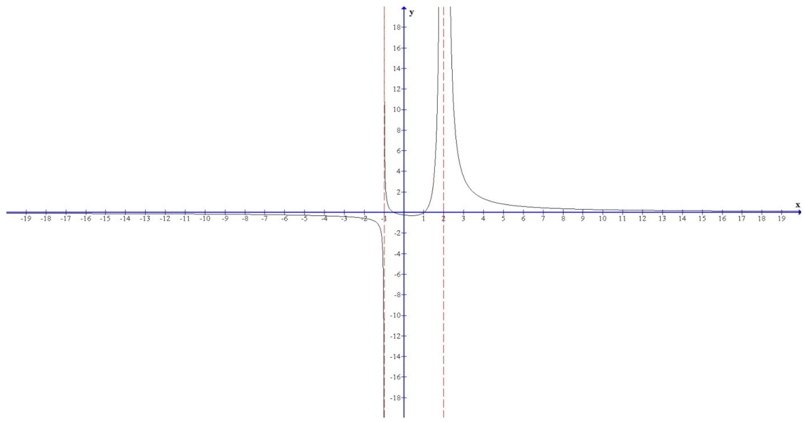
$$x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 4),$$

odnosno, zbog identiteta $x^2 - 4 \cdot x + 4 = (x - 2)^2$,

$$x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x - 2)^2.$$

Prema tome, $x_2 = 2$ je dvostruko rješenje jednadžbe $x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 = 0$, tj. sva rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 2$.

Domena zadane funkcije je skup $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1, 2\}$, skup svih nultočaka je $N_f = \left\{-\frac{1}{2},1\right\}$, a skup svih polova $P_f = \{-1, 2\}$. Oba pola su neuklonjiva. Prvi pol (–1) je reda 1, a drugi (2) je reda 2. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 8.



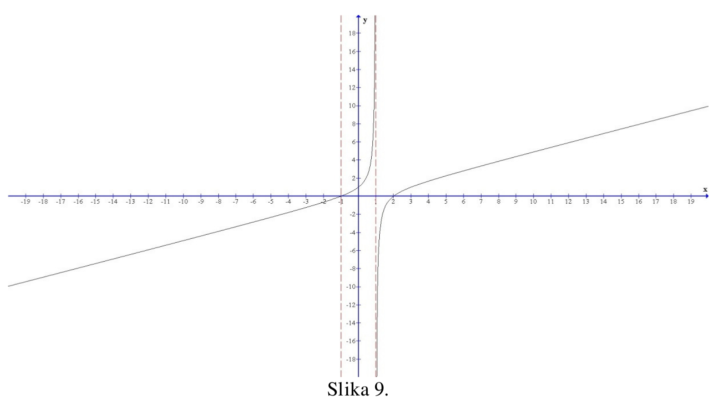
Slika 8.

11. Zadana je neprava racionalna funkcija

$$f(x)=\frac{x^3-3\cdot x-2}{2\cdot x^2-2}.$$

Odredite domenu, nultočke i polove zadane funkcije. Klasificirajte polove s obzirom na red i uklonjivost, pa skicirajte kvalitativni graf zadane funkcije.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Rješavanjem jednadžbe $x^3 - 3 \cdot x - 2 = 0$ dobije se $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 2$, a rješavanjem jednadžbe $2 \cdot x^2 - 2 = 0$ dobije se $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Domena zadane funkcije je skup $D_f = \mathbf{R} \backslash \{-1, 1\}$, skup svih nultočaka je $N_f = \{2\}$, a skup svih polova $P_f = \{-1, 1\}$. Prvi pol (-1) je reda 1 i uklonjiv je, a drugi (1) je reda 1 i neuklonjiv je. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 9.



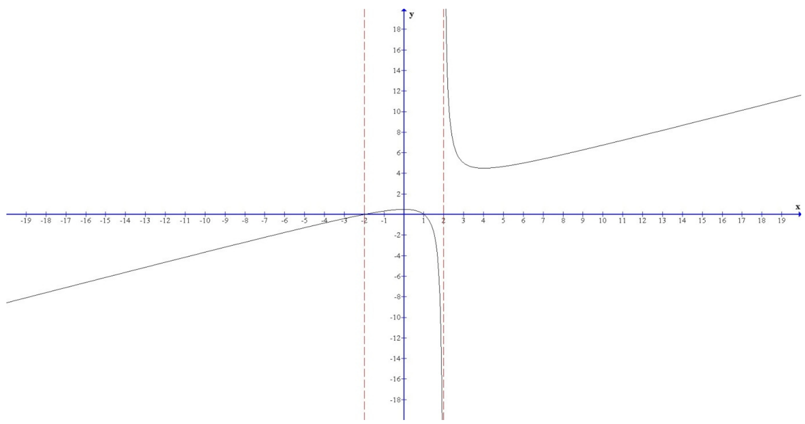
Slika 9.

12. Zadana je racionalna funkcija

$$f(x)=\frac{x^3+3\cdot x^2-4}{2\cdot x^2-8}.$$

Odredite domenu, nultočke i polove zadane funkcije. Klasificirajte polove s obzirom na red i uklonjivost, pa skicirajte kvalitativni graf zadane funkcije.

<u>Naputak i rezultat</u>: Rješavanjem jednadžbe $x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = 0$ dobije se $x_1 = x_2 = -2$, $x_3 = 1$, a rješavanjem jednadžbe $2 \cdot x^2 - 8 = 0$ dobije se $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Domena zadane funkcije je skup $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2, 2\}$, skup svih nultočaka je $N_f = \{1\}$, a skup svih polova $P_f = \{-2, 2\}$. Prvi pol (-2) je reda 1 i uklonjiv je, a drugi (2) je reda 1 i neuklonjiv je. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 10.



Slika 10.

13. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period i najmanju pozitivnu nultočku harmonijske funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane formulom

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right).$$

<u>Rješenje</u>: Opći oblik harmonijske funkcije je

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi),$$

gdje su A amplituda, ω kružna frekvencija i φ fazni pomak. Pritom nužno vrijede nejednakosti $A, \omega > 0$, tj. amplituda i kružna frekvencija nužno moraju biti strogo pozitivni realni brojevi. Također, uvijek se može postići da za fazni pomak vrijedi nejednakost $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. U našem slučaju odmah „očitamo" $A = \omega = 1$, $\varphi = \frac{3 \cdot \pi}{4}$. Temeljni period P harmonijske funkcije f jednak je

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}.$$

Uvrštavanjem $\omega = 1$ dobivamo $P = 2 \cdot \pi$, i to je temeljni period zadane funkcije.

Graf zadane funkcije nacrtat ćemo koristeći ukupno sedam karakterističnih točaka. Najprije ćemo na osi apscisa nacrtati pet točaka: T_0, T_1, T_2, T_3 i T_4 čije su koordinate definirane formulom:

$$T_k = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{k \cdot P}{4}, 0\right), \text{ za } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Tako redom imamo:

$$T_0=\left(-\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}}{1}+\frac{0\cdot 2\cdot\pi}{4},0\right)=\left(-\frac{3\cdot\pi}{4},0\right);\quad T_1=\left(-\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}}{1}+\frac{1\cdot 2\cdot\pi}{4},0\right)=\left(-\frac{\pi}{4},0\right);$$

$$T_2=\left(-\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}}{1}+\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{4},0\right)=\left(\frac{\pi}{4},0\right);\quad T_3=\left(-\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}}{1}+\frac{3\cdot 2\cdot\pi}{4},0\right)=\left(\frac{3\cdot\pi}{4},0\right);$$

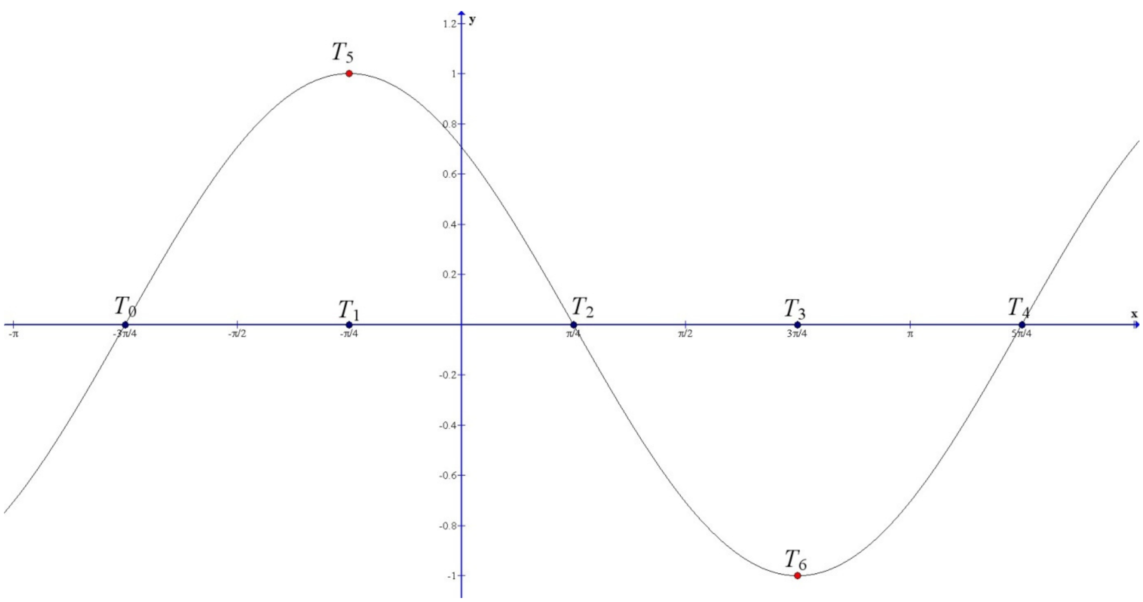
$$T_4=\left(-\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}}{1}+\frac{4\cdot 2\cdot\pi}{4},0\right)=\left(\frac{5\cdot\pi}{4},0\right)$$

Stoga je najmanja pozitivna nultočka zadane funkcije $x_0=\frac{\pi}{4}$.

Graf funkcije f prolazit će točkama T_0, T_2 i T_4. Još dvije točke toga grafa su tzv. *ekstremalne točke*, tj. točke u kojima funkcija poprima najmanju ili najveću vrijednost. U našem slučaju to su točke T_5 i T_6 čije su apscise redom jednake apscisama točaka T_1 i T_3, a ordinate redom A i $-A$. Stoga je:

$$T_5=\left(-\frac{\pi}{4},1\right),\ T_6=\left(\frac{3\cdot\pi}{4},-1\right).$$

Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 11.



Slika 11.

14. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period i najmanju pozitivnu nultočku harmonijske funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane formulom

$$f(x) = -\sin\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right).$$

<u>*Naputak i rješenje*</u>: Amplituda i kružna frekvencija *svake* harmonijske funkcije nužno moraju biti strogo pozitivni realni brojevi, dok fazni pomak treba biti iz intervala $\langle -\pi, \pi \rangle$. Stoga ćemo primijeniti identitete (koji vrijede za svaki $x \in \mathbf{R}$):

$$\sin(-x) = -\sin x,$$
$$\sin x = \sin(\pi - x),$$
$$\sin x = \sin(x - 2 \cdot \pi) = \sin(x + 2 \cdot \pi).$$

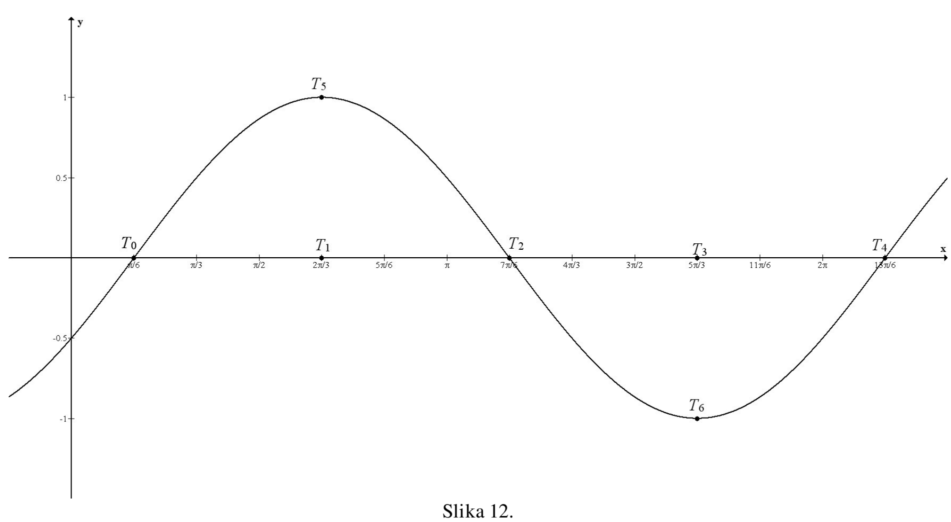
Tako polaznu funkciju transformiramo na sljedeći način:

$$f(x) = -\sin\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) = \sin\left[-\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)\right] = \sin\left\{\pi - \left[-\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)\right]\right\} = \sin\left(\pi + x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) =$$
$$= \sin\left(x + \frac{11 \cdot \pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{11 \cdot \pi}{6} - 2 \cdot \pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Odatle očitamo $A = 1$, $\omega = 1$ i $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Temeljni period funkcije f jednak je $P = 2 \cdot \pi$. Sedam karakterističnih točaka su redom:

$$T_0 = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right),\ T_1 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{3}, 0\right),\ T_2 = \left(\frac{7 \cdot \pi}{6}, 0\right), T_3 = \left(\frac{5 \cdot \pi}{3}, 0\right), T_4 = \left(\frac{13 \cdot \pi}{6}, 0\right)\ T_5 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{3}, 1\right),\ T_6 = \left(\frac{5 \cdot \pi}{3}, -1\right)$$

Stoga je najmanja pozitivna nultočka $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 12.



Slika 12.

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

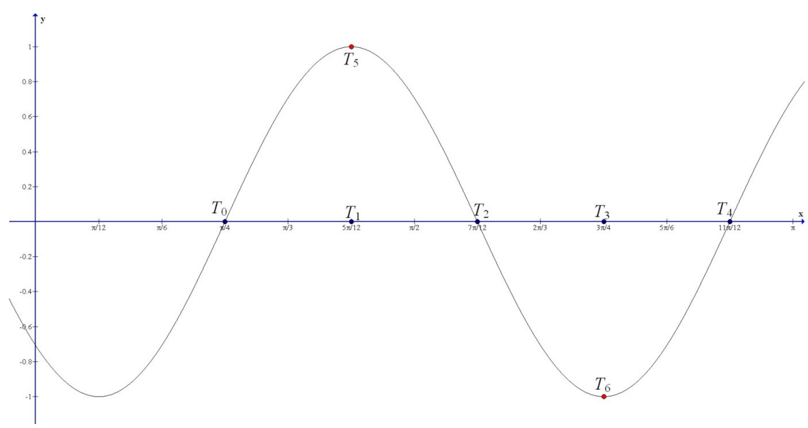
15. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period i najmanju pozitivnu nultočku harmonijske funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane formulom

$$f(x) = \sin\left(3 \cdot x - \frac{3 \cdot \pi}{4}\right).$$

<u>*Naputak i rješenje*</u>: Iz oblika zadane funkcije očitamo: $A = 1$, $\omega = 3$ i $\varphi = -\frac{3 \cdot \pi}{4}$. Temeljni period funkcije f jednak je $P = \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Sedam karakterističnih točaka su redom:

$$T_0 = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right),\ T_1 = \left(\frac{5 \cdot \pi}{12}, 0\right),\ T_2 = (1, 0),\ T_3 = \left(\frac{7 \cdot \pi}{12}, 0\right),\ T_4 = \left(\frac{3 \cdot \pi}{4}, 0\right),\ T_5 = \left(\frac{5 \cdot \pi}{12}, 1\right) \text{ i } T_6 = \left(\frac{7 \cdot \pi}{12}, -1\right)$$

Najmanja pozitivna nultočka znosi $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 13..



Slika 13.

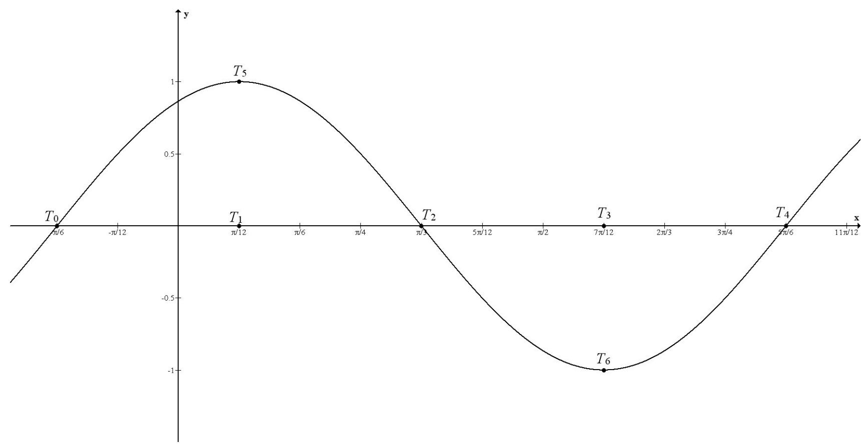
16. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period i najmanju pozitivnu nultočku harmonijske funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane formulom

$$f(x) = -\sin\left(2 \cdot x + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right).$$

<u>*Naputak i rješenje*</u>: Primjenom identiteta iz Zadatka 14. zadanu funkciju najprije prevedemo u oblik $f(x) = \sin\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right)$, pa odatle očitamo: $A = 1$, $\omega = 2$ i $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Temeljni period funkcije f jednak je $P = \pi$. Sedam karakterističnih točaka su redom:

$$T_0 = \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), T_1 = \left(\frac{\pi}{12}, 0\right),\ T_2 = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right),\ T_3 = \left(\frac{7 \cdot \pi}{12}, 0\right), T_4 = \left(\frac{5 \cdot \pi}{6}, 0\right), T_5 = \left(\frac{\pi}{12}, 1\right) \text{ i } T_6 = \left(\frac{7 \cdot \pi}{12}, -1\right)$$

Najmanja pozitivna nultočka znosi $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 14.



Slika 14.

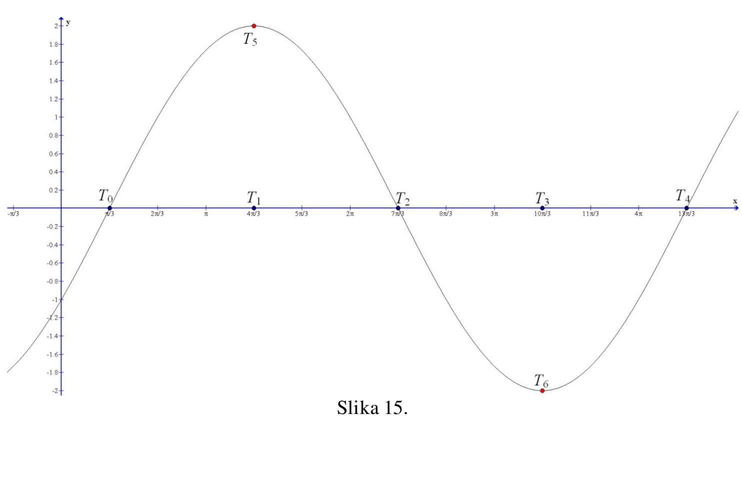
17. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period i najmanju pozitivnu nultočku harmonijske funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane formulom

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

<u>*Naputak i rješenje*</u>: Iz oblika zadane funkcije očitamo: $A = 1$, $\omega = \dfrac{1}{2}$ i $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$. Temeljni period funkcije f jednak je $P = 4 \cdot \pi$. Sedam karakterističnih točaka su redom:

$$T_0 = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right),\ T_1 = \left(\frac{4\cdot\pi}{3}, 0\right),\ T_2 = \left(\frac{7\cdot\pi}{3}, 0\right), T_3 = \left(\frac{10\cdot\pi}{3}, 0\right),\ T_4 = \left(\frac{13\cdot\pi}{3}, 0\right),\ T_5 = \left(\frac{4\cdot\pi}{3}, 2\right) \text{ i } T_6 = \left(\frac{10\cdot\pi}{3}, -2\right)$$

Najmanja pozitivna nultočka znosi $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 15.

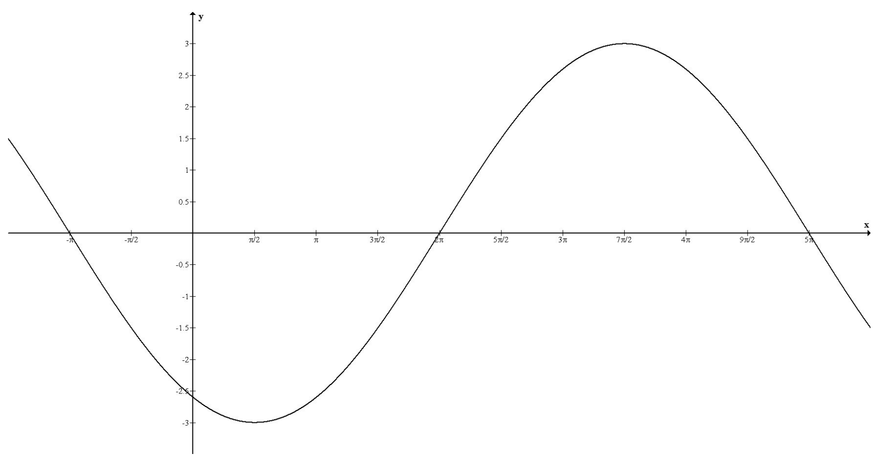


Slika 15.

18. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period i najmanju pozitivnu nultočku harmonijske funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane formulom

$$f(x) = (-3)\cdot\sin\left(\frac{x+\pi}{3}\right).$$

<u>*Naputak i rješenje*</u>: Zadanu funkciju najprije transformiramo analogno u Zadatcima 14. i 16, pa dobivamo $f(x) = 3\cdot\sin\left(\frac{x-2\cdot\pi}{3}\right) = 3\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot\pi\right)$, te očitamo: $A = 3$, $\omega = \frac{1}{3}$ i $\varphi = -\frac{2}{3}\cdot\pi$. Temeljni period funkcije f jednak je $P = 6\cdot\pi$. Najmanja pozitivna nultočka znosi $x_0 = 2\cdot\pi$. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 16.



Slika 16.

19. Odredite superpoziciju harmonijskih gibanja zadanih jednadžbama

$$f_1(t) = 2\cdot\sin\left(t - \frac{3\cdot\pi}{4}\right) \text{ i } f_2(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

i nacrtajte njezin graf.

<u>*Rješenje*</u>: Oba harmonijska gibanja imaju istu kružnu frekvenciju: $\omega = 1$. Stoga će i njihova superpozicija imati tu istu kružnu frekvenciju, dakle $\omega = 1$. Preostaje odrediti amplitudu i fazni pomak superpozicije.

<u>**Korak 1.**</u> Očitamo amplitude i fazne pomake zadanih harmonijskih gibanja. Amplituda je realan broj koji množi izraz sin(...), a fazni pomak (iskazan u radijanima) je slobodni član u izrazu pod funkcijom sinus. Stoga odmah imamo:

$$A_1 = 2, \varphi_1 = -\frac{3\cdot\pi}{4},\ A_2 = 1,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

<u>**Korak 2.**</u> Nepoznatu amplitudu A i nepoznati fazni pomak φ određujemo iz sljedećih dviju jednakosti:

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}\right)$$

Pritom predznak veličine A odgovara predznaku izraza $A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2$. Ako je taj predznak negativan, moramo provesti transformacije analogne onima u Zadatcima 14., 16. i 18. tako da amplituda bude strogo pozitivan realan broj.

Uvrštavanjem očitanih podataka dobivamo:

$$|A| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\left(-\frac{3}{4} \cdot \pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{4 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos(-\pi)} = \sqrt{4 + 1 - 4} = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \sin\left(-\frac{3}{4} \cdot \pi\right) + 1 \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{2 \cdot \cos\left(-\frac{3}{4} \cdot \pi\right) + 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Uočimo da je predznak izraza $A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2$ negativan (jer je vrijednost toga izraza $-\frac{\sqrt{2}}{2}$), pa privremeno uzimamo $A = -1$. Dakle, superpozicija zadanih harmonijskih gibanja je

$$f_3(t) := f_1(t) + f_2(t) = -\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = (\text{analogno kao u Zadatcima 14.,16. i 18}) = \sin\left(t - \frac{3}{4} \cdot \pi\right).$$

<u>Korak 3.</u> Nacrtajmo sada graf dobivenoga harmonijskoga gibanja. Amplituda dobivenoga gibanja je $A = 1$, pa će graf biti omeđen pravcima $y = -1$ i $y = 1$. Kružna frekvencija dobivenoga gibanja je $\omega = 1$, pa je pripadni temeljni period

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{1} = 2 \cdot \pi .$$

Najprije ćemo nacrtati jedan val tražene sinusoide. Za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ konstruiramo točke

$$T_k = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + k \cdot \frac{P}{4}, 0\right).$$

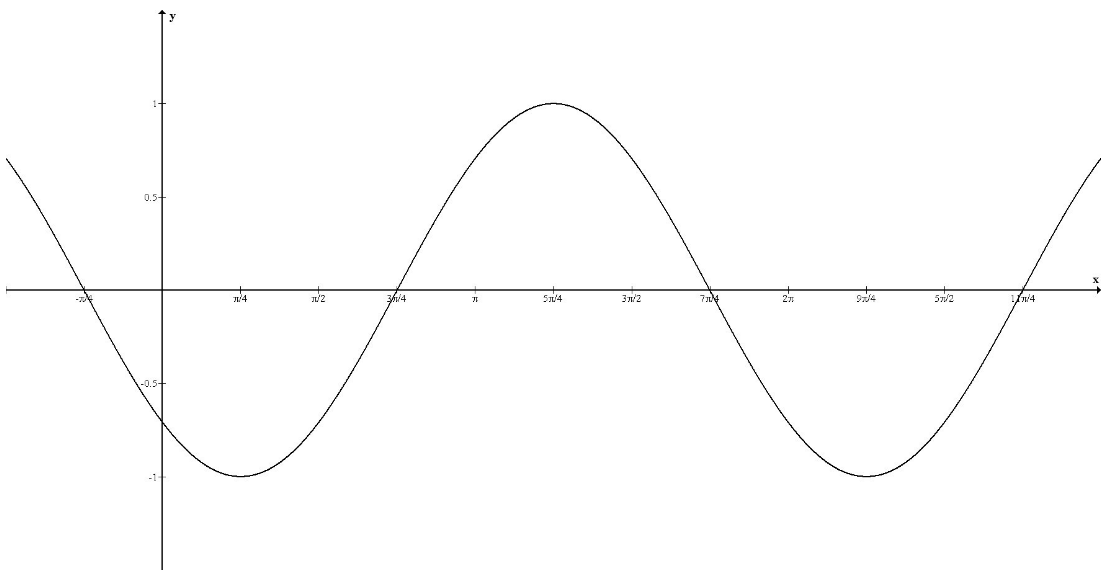
U našem slučaju je:

$$T_k = \left(-\frac{-\frac{3}{4} \cdot \pi}{1} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{4}, 0\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot \pi + k \cdot \frac{\pi}{2}, 0\right), \text{ za } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Stoga je:

$$T_0 = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 0\cdot\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi, 0\right);$$
$$T_1 = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 1\cdot\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{5}{4}\cdot\pi, 0\right);$$
$$T_2 = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 2\cdot\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{7}{4}\cdot\pi, 0\right);$$
$$T_3 = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 3\cdot\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{9}{4}\cdot\pi, 0\right);$$
$$T_4 = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 4\cdot\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{11}{4}\cdot\pi, 0\right).$$

Graf funkcije prolazi točkama T_0, $B = \left(\frac{5}{4}\cdot\pi, 1\right)$, T_2, $C = \left(\frac{9}{4}\cdot\pi, -1\right)$ i T_4. On je prikazan na Slici 17.



Slika 17.

20. Odredite superpoziciju harmonijskih gibanja zadanih jednadžbama

$$f_1(t) = 3\cdot\sin\left(t + \frac{2\cdot\pi}{3}\right) \text{ i } f_2(t) = 2\cdot\sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$

i nacrtajte njezin graf.

Naputak i rezultat: Iz zadanih podataka slijedi

$$A_1 = 3, \varphi_1 = \frac{2\cdot\pi}{3}, A_2 = 2 \text{ i } \varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$$

Iz jednakosti

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}\right)$$

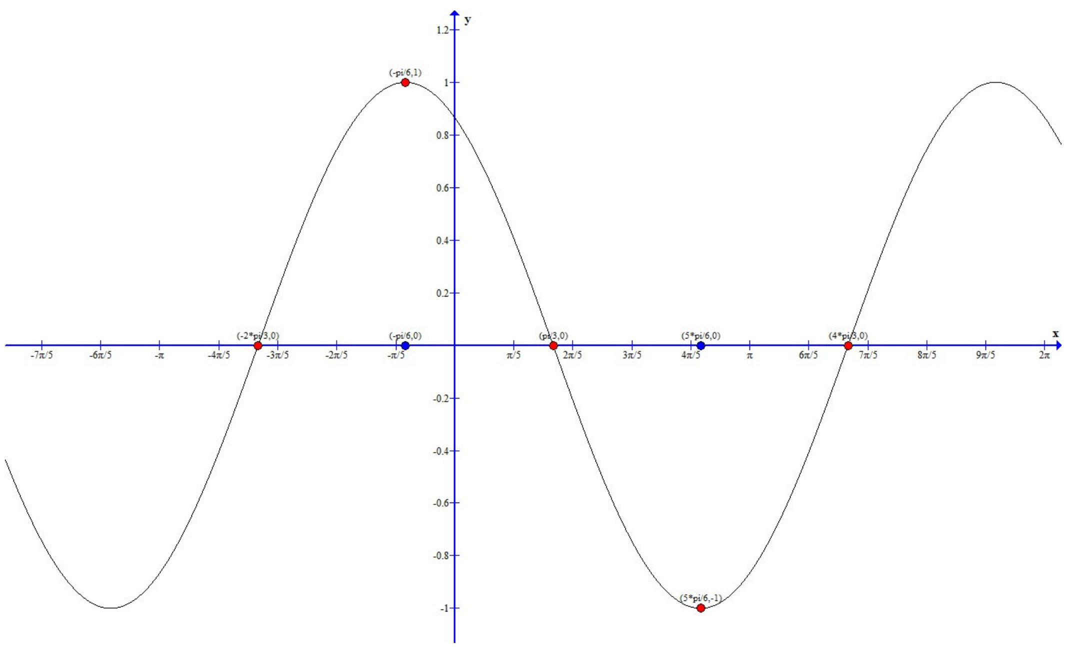
dobiva se $A = 1$, $\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{3}$, pa je tražena superpozicija

$$f_3(t) := f_1(t) + f_2(t) = \sin\left(t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Njezin je temeljni period $P = 2 \cdot \pi$. Karakteristične točke su

$$T_0 = \left(-\frac{2 \cdot \pi}{3}, 0\right),\ T_1 = \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right),\ T_2 = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right),\ T_3 = \left(\frac{5 \cdot \pi}{6}, 0\right) \text{ i } T_4 = \left(\frac{4 \cdot \pi}{3}, 0\right).$$

Graf funkcije f_3 prolazi točkama T_0, $B = \left(-\frac{\pi}{6}, 1\right)$, T_2, $D = \left(\frac{5 \cdot \pi}{6}, 1\right)$ i T_4. On je prikazan na Slici 18.



Slika 18.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

Granične vrijednosti (limesi)

1. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član $a_n = \dfrac{2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n}}{4\cdot\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{2\cdot n}}$.

Rješenje: Svaki član brojnika i nazivnika dijelimo s drugim korijenom iz najveće potencije varijable n koja se javlja u radikandima (izrazima pod korijenom). U prvom i trećem korijenu ta je potencija n^2, a u drugom i četvrtom korijenu ta je potencija n. Stoga svaki član u brojniku i nazivniku dijelimo s $\sqrt{n^2}$ i koristimo pravila za računanje s graničnim vrijednostima, te jednakosti $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b}{n^2}=0$ (za bilo koje realne brojeve a i b). Dobivamo redom:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n}}{4\cdot\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{2\cdot n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n^2}}}{\dfrac{4\cdot\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{2\cdot n}}{\sqrt{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}}-3\cdot\sqrt{\dfrac{n}{n^2}}}{4\cdot\sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot n}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}-3\cdot\sqrt{\dfrac{n}{n^2}}}{4\cdot\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot n}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-3\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{4\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}} = \frac{2\cdot\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}-3\cdot\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}}}{4\cdot\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}}} =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{1+0}-3\cdot\sqrt{0}}{4\cdot\sqrt{1+0+0}+\sqrt{0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član

$$a_n = \frac{4\cdot\sqrt[3]{8\cdot n^2-n+1}-\sqrt[3]{n^2+n+1}}{2\cdot\sqrt[3]{27\cdot n^2+34\cdot n+7}+\sqrt[3]{n^2+n}}.$$

Naputak i rezultat: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{2\cdot\sqrt[3]{27+\dfrac{34}{n}+\dfrac{7}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{4\cdot\sqrt[3]{8-0+0}-\sqrt[3]{1+0+0}}{2\cdot\sqrt[3]{27+0+0}+\sqrt[3]{1+0}} = \dfrac{4\cdot 2-1}{2\cdot 3+1} = 1$.

3. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član $a_n = \left(1+\dfrac{2}{3\cdot n}\right)^{\frac{3\cdot n}{2}}$.

Rješenje: Koristit ćemo činjenicu da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$, za bilo koji realan broj a. Imamo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{3\cdot n}\right)^{\frac{3\cdot n}{2}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{3}{2}} = \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = e^1 = e .$$

4. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član $a_n = \left(1-\frac{3}{4\cdot n}\right)^{\frac{2\cdot n}{3}}$.

Rješenje: Postupkom opisanim u prethodnom zadatku dobivamo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{3}{4\cdot n}\right)^{\frac{2\cdot n}{3}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-\frac{3}{4}}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-\frac{3}{4}}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(e^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e} .$$

5. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član $a_n = \left(1+\frac{2\cdot\ln 2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Rješenje: Koristit ćemo jednakosti

$$b\cdot\ln a = \ln(a^b),\ \text{za svaki } a>0 \text{ i } a\neq 1,$$

$$e^{\ln x} = x,\ \text{za svaki } x>0.$$

Dobivamo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2\cdot\ln 2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2\cdot\ln 2}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2\cdot\ln 2}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\ln 2} = 2 .$$

6. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član $a_n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{3\cdot\ln 3}{8\cdot n}\right)^{n}}$.

Rješenje: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{3\cdot\ln 3}{8}}{n}\right)^{4\cdot n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{3\cdot\ln 3}{8}}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{4}{3}} = \left(e^{\frac{3\cdot\ln 3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}} = (e^{\ln 3})^{\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} .$

7. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) niza čiji je opći član $a_n = \sqrt{n^2+n+1}-n$.

Naputak i rješenje: Zapišimo izraz za a_n u obliku razlomka čiji brojnik ne sadrži korijen (tj. „racionalizirajmo“ brojnik):

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{1\cdot\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)} = \frac{(n^2+n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}.$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s n (analogno kao u zadatcima 1. i 2) dobijemo:

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}.$$

Stoga je

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

8. Izračunajte graničnu vrijednost niza čiji je opći član $a_n = \sqrt{4\cdot n^2 - n+1} - 2\cdot\sqrt{n^2+1}$.

Naputak i rezultat: Imamo redom:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{4\cdot n^2-n+1}-2\cdot\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{4\cdot n^2-n+1}+2\cdot\sqrt{n^2+1}\right)}{1\cdot\left(\sqrt{4\cdot n^2-n+1}+2\cdot\sqrt{n^2+1}\right)} = \frac{(4\cdot n^2-n+1)-4\cdot(n^2+1)}{\sqrt{4\cdot n^2-n+1}+2\cdot\sqrt{n^2+1}} = \frac{-n-5}{\sqrt{4\cdot n^2-n+1}+2\cdot\sqrt{n^2+1}}$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s n dobijemo:

$$a_n = \frac{-1-\frac{5}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}},$$

pa odatle lagano slijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{-1-0}{\sqrt{4-0+0}+2\cdot\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{4}$.

9. Niz (a_n) zadan je svojim općim članom $a_n = \frac{2-3\cdot n}{2\cdot n+3}$. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) L toga niza, pa odredite najmanji prirodan broj n takav da je $|a_n - L| < 0.0001$.

Rješenje: Najprije imamo:

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2-3\cdot n}{2\cdot n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}-3}{2+\frac{3}{n}} = \frac{0-3}{2+0} = -\frac{3}{2}.$$

Nadalje je:

$$|a_n - L| = \left|\frac{2-3\cdot n}{2\cdot n+3}+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2\cdot(2-3\cdot n)+3\cdot(2\cdot n+3)}{2\cdot(2\cdot n+3)}\right| = \left|\frac{4-6\cdot n+6\cdot n+9}{4\cdot n+6}\right| = \left|\frac{13}{4\cdot n+6}\right| = \frac{|13|}{|4\cdot n+6|} = \frac{13}{4\cdot n+6},$$

jer je $4 \cdot n + 6 > 0$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, pa primjena funkcije apsolutne vrijednosti ne mijenja predznak toga izraza. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$\frac{13}{4\cdot n+6} < 0.0001.$$

Pomnožimo li je s $\frac{4\cdot n+6}{0.0001}$ (prema gornjoj primjedbi, taj izraz je strogo pozitivan jer su mu i brojnik i nazivnik strogo pozitivni realni brojevi, pa se množenjem cijele nejednadžbe navedenim izrazom znak nejednakosti neće promijeniti), dobit ćemo nejednadžbu:

$$\frac{13}{0.0001} < 4\cdot n+6.$$

Odavde slijedi $n > 32498.5$. Stoga je traženi broj jednak $n_{min} = 32499$.

10. Niz (a_n) zadan je svojim općim članom $a_n = \frac{3\cdot n+1}{1-4\cdot n}$. Izračunajte graničnu vrijednost (limes) L toga niza, pa odredite najmanji prirodan broj n takav da je $|a_n - L| < 0.0001$.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\cdot n+1}{1-4\cdot n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-4} = \frac{3+0}{0-4} = -\frac{3}{4}$. Nadalje je:

$$|a_n - L| = \left|\frac{3\cdot n+1}{1-4\cdot n}+\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{7}{4-16\cdot n}\right| = \frac{|7|}{|4-16\cdot n|} = \frac{7}{-(4-16\cdot n)} = \frac{7}{16\cdot n-4}$$

jer za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi nejednakost $4 - 16 \cdot n < 0$, pa primjena funkcije apsolutne vrijednosti mijenja predznak toga izraza. Stoga iz nejednadžbe

$$\frac{7}{16\cdot n-4} < 0.0001$$

slijedi $n > 4375.25$, pa je traženi broj jednak $n_{min} = 4376$.

11. Izračunajte graničnu vrijednost $\lim\limits_{x\to\frac{3\cdot\pi}{2}}\left(\frac{2\cdot\cos x}{3\cdot\pi-2\cdot x}\right)^2$.

<u>*Rješenje*</u>: Uvrštenjem $x = \frac{3\cdot\pi}{2}$ u izraz čiju graničnu vrijednost tražimo dobit ćemo razlomak $\frac{0}{0}$ koji nije

definiran. Niti jedan od izraza u brojniku i nazivniku nije moguće rastaviti na jednostavnije izraze radi eventualnoga kraćenja razlomka. Stoga uvodimo zamjenu:

$$t = x - \frac{3\cdot\pi}{2}.$$

Očito kad $x \to \frac{3\cdot\pi}{2}$, onda $t \to 0$. Iz navedene zamjene izrazimo varijablu x:

$$x = t + \frac{3\cdot\pi}{2}.$$

Primjenom formula

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\cdot x)}{b\cdot x} = \frac{a}{b}\ \ (\text{za } b \neq 0),$$
$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^c = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^c,\ \text{za bilo koji realan broj } c \in \mathbf{R},$$

dobivamo da je tražena granična vrijednost jednaka:

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{2\cdot\cos\left(t+\frac{3\cdot\pi}{2}\right)}{3\cdot\pi-2\cdot\left(t+\frac{3\cdot\pi}{2}\right)}\right]^2 = \left\{\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\left[\cos t\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)-\sin t\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right]}{3\cdot\pi-2\cdot t-3\cdot\pi}\right\}^2 = \left[\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\sin t}{-2\cdot t}\right]^2 = \left[\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)\right]^2 =$$
$$=(-1)^2 = 1.$$

12. Izračunajte graničnu vrijednost $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{3\cdot\pi}{2}-3\cdot x\right)\cdot \operatorname{tg}(3\cdot x)\right]^2$.

Rješenje: Korištenjem adicijskih formula za funkcije sinus i kosinus, te formula:

$$\sin\left(x+\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = \sin x\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)+\cos x\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = \sin x\cdot 0+\cos x\cdot(-1) = -\cos x;$$
$$\cos\left(x+\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = \cos x\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)-\sin x\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = \cos x\cdot 0-\sin x\cdot(-1) = \sin x;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{b\cdot x}{\sin(a\cdot x)} = \frac{b}{a}\ \ (\text{za } a \neq 0).$$

dobivamo redom:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{3\cdot\pi}{2}-3\cdot x\right)\cdot \operatorname{tg}(3\cdot x)\right]^2=\left\{\begin{array}{l} t=x-\frac{\pi}{2} \\ x=t+\frac{\pi}{2} \\ t\to 0 \text{ kad } x\to\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\left[\frac{3\cdot\pi}{2}-3\cdot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot \operatorname{tg}\left[3\cdot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}^2=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\left(\frac{3\cdot\pi}{2}-3\cdot t-\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left[3\cdot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\cos\left[3\cdot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]}\right\}^2=\lim_{t\to 0}\left[(-3\cdot t)\cdot\frac{\sin\left(3\cdot t+\frac{3\cdot\pi}{2}\right)}{\cos\left(3\cdot t+\frac{3\cdot\pi}{2}\right)}\right]^2=\lim_{t\to 0}\left[(-3\cdot t)\cdot\frac{-\cos(3\cdot t)}{\sin(3\cdot t)}\right]^2=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{3\cdot t}{\sin(3\cdot t)}\cdot\cos(3\cdot t)\right]^2=\left\{\lim_{t\to 0}\left[\frac{3\cdot t}{\sin(3\cdot t)}\cdot\cos(3\cdot t)\right]\right\}^2=\left[\lim_{t\to 0}\frac{3\cdot t}{\sin(3\cdot t)}\cdot\lim_{t\to 0}\cos(3\cdot t)\right]^2=\left(\frac{3}{3}\cdot 1\right)^2=1\,.$$

13. Izračunajte graničnu vrijednost $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot\sqrt{x}-2}{x-1}\right)^3$.

Rješenje: Racionalizacijom brojnika razlomka pod graničnom vrijednosti dobivamo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot\sqrt{x}-2}{x-1}\right)^3=\left(\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot\sqrt{x}-2}{x-1}\right)^3=\left[\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot\sqrt{x}-2}{x-1}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{x}+2}{2\cdot\sqrt{x}+2}\right)\right]^3=\left[\lim_{x\to 1}\frac{4\cdot x-4}{(x-1)\cdot\left(2\cdot\sqrt{x}+2\right)}\right]^3=$$

$$=\left[\lim_{x\to 1}\frac{4\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot 2\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]^3\left[\lim_{x\to 1}\frac{2}{\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]^3=\left(\frac{2}{\sqrt{1}+1}\right)^3=1$$

14. Izračunajte graničnu vrijednost $\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2\cdot x+2}\right)^{-1}$.

Rješenje: Koristimo formulu za zbroj kubova $a^3 + b^3 = (a + b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)$. Dobivamo:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2\cdot x+2}\right)^{-1}=\lim_{x\to -1}\left(\frac{2\cdot x+2}{\sqrt[3]{x}+1}\right)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2\cdot(x+1)}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2\cdot(x+1)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+1^3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot(x+1)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left[2\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)\right]=2\cdot\left(\sqrt[3]{(-1)^2}-\sqrt[3]{-1}+1\right)=2\cdot(1+1+1)=6$$

15. Izračunajte graničnu vrijednost $\lim_{x\to 4}\sqrt{\left[\frac{4\cdot\sqrt{x}-8}{\sin(x-4)}\right]}$.

Rješenje: Najprije zamijenimo $t = x - 4$. Očito kad $x \to 4$, onda $t \to 0$. Iz navedene zamjene je $x = t + 4$, pa uvrštavanjem u izraz pod graničnom vrijednosti i racionalizacijom brojnika dobivenoga razlomka dobivamo redom:

$$\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{4\cdot\sqrt{t+4}-8}{\sin[(t+4)-4]}\right]}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{4\cdot\sqrt{t+4}-8}{\sin t}}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\left(\frac{4\cdot\sqrt{t+4}-8}{\sin t}\right)\cdot\frac{\left(4\cdot\sqrt{t+4}+8\right)}{\left(4\cdot\sqrt{t+4}+8\right)}\right]}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{\left(4\cdot\sqrt{t+4}\right)^2-4^2}{(\sin t)\cdot\left(4\cdot\sqrt{t+4}+8\right)}\right]}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{16\cdot t+64-64}{(\sin t)\cdot\left(4\cdot\sqrt{t+4}+8\right)}\right]}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{16\cdot t}{(\sin t)\cdot\left(4\cdot\sqrt{t+4}+8\right)}\right]}=$$

$$=\sqrt{\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{(\sin t)}\cdot\frac{16}{\left(4\cdot\sqrt{t+4}+8\right)}\right]}=\sqrt{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{16}{4\cdot\sqrt{t+4}+8}}=\sqrt{1\cdot\frac{16}{4\cdot\sqrt{0+4}+8}}=\sqrt{\frac{16}{4\cdot 2+8}}=\sqrt{\frac{16}{16}}=1.$$

16. Izračunajte graničnu vrijednost $\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt[3]{\dfrac{(2\cdot\pi-2\cdot x)^2}{1+\cos x}}$.

Rješenje: Zamijenimo $t = x - \pi$. Očito kad $x \to \pi$, onda $t \to 0$. Iz te zamjene izrazimo x: $x = t + \pi$. Tako dobivamo:

$$\lim_{x\to\pi}\sqrt[3]{\frac{(2\cdot\pi-2\cdot x)^2}{1+\cos x}}=\lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{[2\cdot\pi-2\cdot(t+\pi)]^2}{1+\cos(t+\pi)}}=\lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{[2\cdot\pi-2\cdot t-2\cdot\pi)]^2}{1+(\cos t\cdot\cos\pi-\sin t\cdot\sin\pi)}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{(-2\cdot t)^2}{1+\cos t\cdot(-1)-\sin t\cdot 0}}=\lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{4\cdot t^2}{1-\cos t}}=\sqrt[3]{\lim_{t\to 0}\left(\frac{4\cdot t^2}{1-\cos t}\right)}$$

Izračunajmo zasebno graničnu vrijednost pod trećim korijenom. Brojnik i nazivnik razlomka pod graničnom vrijednosti pomnožimo s $(1 + \cos t)$. Dobivamo:

$$\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{4\cdot t^2}{1-\cos t}\right)\cdot\left(\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{4\cdot t^2\cdot(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{4\cdot t^2\cdot(1+\cos t)}{\sin^2 t}\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{4\cdot t\cdot t\cdot(1+\cos t)}{\sin t\cdot\sin t}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[4\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot(1+\cos t)\right]=(\lim_{t\to 0}4)\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\right)\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\right)\cdot\left[\lim_{t\to 0}(1+\cos t)\right]=4\cdot 1\cdot 1\cdot(1+1)=8$$

pri čemu smo ponovno koristili jednakost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b\cdot x}{\sin(a\cdot x)}=1$ (za $a \neq 0$). Stoga je zadana granična vrijednost jednaka $\sqrt[3]{\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{4\cdot t^2}{1-\cos t}\right)}=\sqrt[3]{8}=2$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: NEPREKIDNOST REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE

1. Odredite realne brojeve $a, b \in \mathbf{R}$ tako da realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(-x)}{x+1}, \text{ za } x < -1; \\ a \cdot x + b, \text{ za } -1 \le x \le 1; \\ \dfrac{e^{1-x} - 1}{x-1}, \text{ za } x > 1; \end{cases}$$

bude neprekidna na cijelom skupu **R**. (Ne trebate provjeravati je li skup **R** domena funkcije $f(x)$.)

Rješenje: Ovaj zadatak najlakše je riješiti uz pomoć grafičkoga prikaza funkcije $f(x)$. Kad bismo crtali graf funkcije $f(x)$, najprije bismo ga nacrtali na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$. Na tom je intervalu funkcija $f(x)$ definirana propisom $f(x) = \dfrac{\ln(-x)}{x+1}$, pa bismo odabirali npr. $x = -5$, $x = -4$, $x = -3$ itd., izračunavali pripadne vrijednosti $f(x)$, ucrtavali dobivene parove $(x, f(x))$ u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih pospajali jednom krivuljom. Takvim crtanjem približili bismo se s lijeve strane točki čija je prva koordinata -1, a druga koordinata

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \frac{\ln(-x)}{x+1} = \text{(ovaj limes je oblika } \frac{0}{0}\text{, pa smijemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo)} =$$

$$= \lim_{x \to -1-} \frac{[\ln(-x)]'}{(x+1)'} = \lim_{x \to -1-} \frac{\frac{1}{(-x)} \cdot (-x)'}{1+0} = \lim_{x \to -1-} \frac{\frac{1}{(-x)} \cdot (-1)}{1} = \lim_{x \to -1-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

Dakle, s lijeve strane bismo se približili točki $T_1 = (-1, -1)$. Budući da funkcija mora biti neprekidna, ovaj zaključak povlači da mora vrijediti jednakost

$$-1 = f(-1).$$

Međutim, iz propisa kojim je definirana funkcija f slijedi

$$f(-1) = a \cdot (-1) + b,$$

odnosno

$$f(-1) = -a + b.$$

Tako smo dobili dvije jednakosti:

$$-1 = f(-1)$$
$$f(-1) = -a + b$$

Odatle slijedi:

$$-a + b = -1.$$

Potpuno analogno zaključivanje provodimo i za drugu „kritičnu“ točku, tj. za $c = 1$. Kad bismo se točki 1 približavali zdesna (tj. krećući se od broja 2 nalijevo), graf funkcije $f(x)$ približavao bi se točki čija je prva koordinata 1, a druga koordinata

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = (\text{propis funkcije } f(x) \text{ desno od 1 je: } f(x) = \frac{e^{1-x}-1}{x-1}) = \lim_{x\to 1+} \frac{e^{1-x}-1}{x-1} = \text{ (limes oblika}$$
$$\frac{0}{0}\text{, pa smijemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo)} = \lim_{x\to 1+} \frac{(e^{1-x}-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{e^{1-x}\cdot(1-x)'-0}{1-0} =$$
$$= \lim_{x\to 1+} \frac{e^{1-x}\cdot(0-1)}{1} = \lim_{x\to 1+} \frac{-e^{1-x}}{1} = -e^{1-1} = -e^{0} = -1$$

Dakle, s desne strane bismo se približili točki $T_2 = (1, -1)$. Budući da funkcija mora biti neprekidna, ovaj zaključak povlači da mora vrijediti jednakost:

$$1 = f(-1).$$

Međutim, iz propisa kojim je definirana funkcija f slijedi

$$f(1) = a \cdot 1 + b,$$

odnosno

$$f(1) = a + b.$$

Tako smo dobili dvije jednakosti:

$$-1 = f(1)$$
$$f(1) = a + b$$

Odatle slijedi:

$$a + b = -1.$$

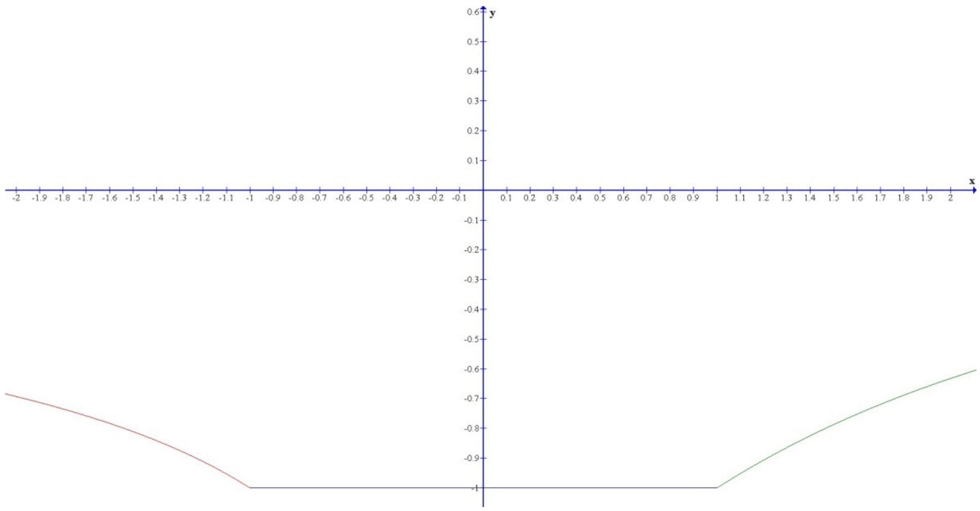
Prema tome, dobili smo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$-a + b = -1.$$
$$a + b = -1.$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$2 \cdot b = -2,$$

a odatle je $b = -1$. Uvrštavanjem u bilo koju jednadžbu sustava dobivamo $a = 0$. Prema tome, $a = 0$, $b = -1$. Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na Slici 19.



Slika 19.

2. Odredite realne brojeve a, $b \in$ **R** tako da realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2 \cdot x)}{x}, \text{ za } x < 0; \\ a \cdot x + b, \text{ za } 0 \leq x \leq 2; \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}, \text{ za } x > 2; \end{cases}$$

bude neprekidna na cijelom skupu **R**. (Ne trebate provjeravati je li skup **R** domena funkcije $f(x)$.)

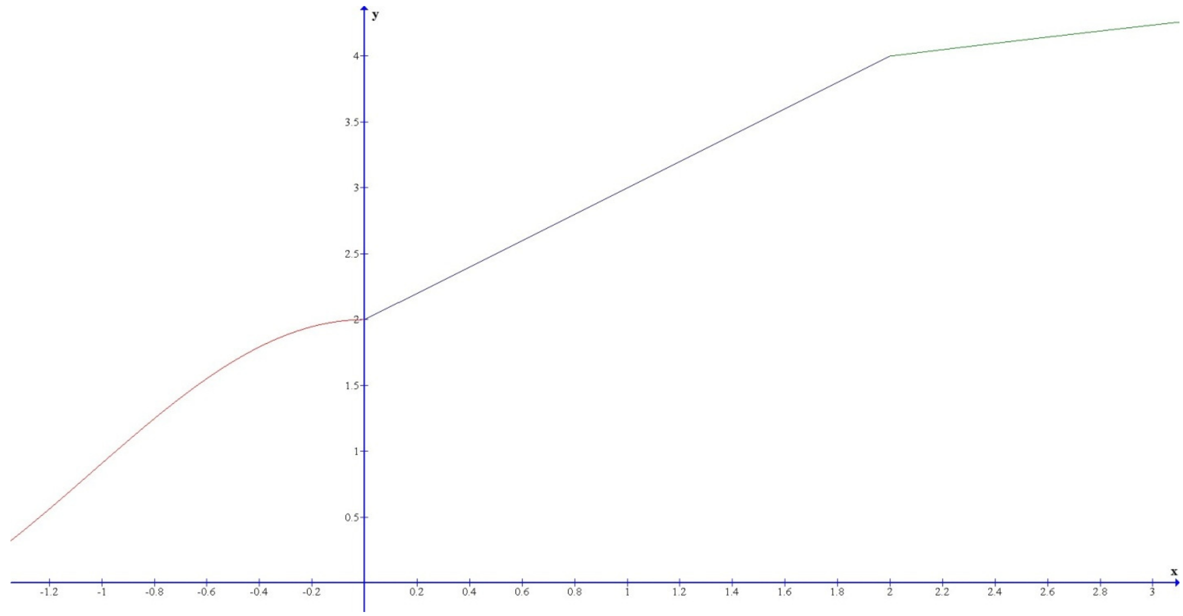
<u>*Naputak i rezultat*</u>: $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\sin(2 \cdot x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{2 \cdot \cos(2 \cdot x)}{1} = 2$, pa graf funkcije $f(x)$ mora prolaziti točkom $T_1 = (0, 2)$, što znači da mora vrijediti jednakost $2 = f(0)$. Međutim, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, pa zaključujemo da je $b = 2$. Nadalje,

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{1}{\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x+2}} \cdot 1 - 0} = \lim_{x \to 2+} (2 \cdot \sqrt{x+2}) = 2 \cdot \sqrt{2+2} = 2 \cdot 2 = 4,$$

pa graf funkcije $f(x)$ mora prolaziti točkom $T_2 = (2, 4)$, tj. mora vrijediti jednakost $4 = f(2)$. Međutim, $f(2) = a \cdot 2 + b = 2 \cdot a + b$, pa dobivamo $2 \cdot a + b = 4$. Tako iz sustava

$$b = 2,$$
$$2 \cdot a + b = 4$$

dobivamo $a = 1$, $b = 2$. Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na Slici 20.



Slika 20.

3. Odredite realne brojeve a, $b \in$ **R** tako da realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + a, \text{ za } x \leq 0; \\ \dfrac{(x^2-4)\cdot \sin x}{x^2 - 2\cdot x}, \text{ za } 0 < x < 2; \\ b - \ln(x-1) + x \cdot \sin x, \text{ za } x \geq 2; \end{cases}$$

bude neprekidna na cijelom skupu **R**. (Ne trebate provjeravati je li skup **R** domena funkcije $f(x)$.)

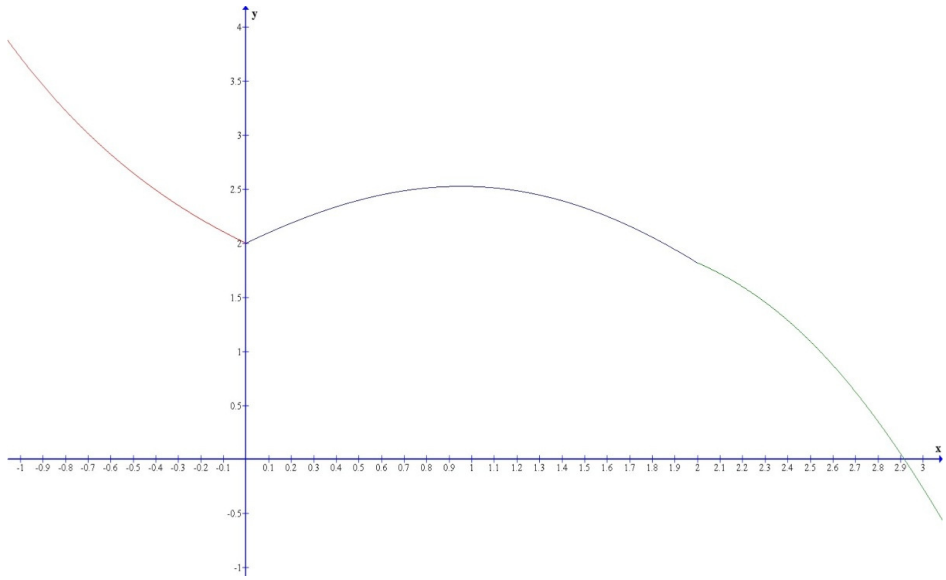
Naputak i rezultat:

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(x^2-4)\cdot \sin x}{x^2-2\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0+}\left[\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot \sin x}{x\cdot(x-2)}\right] = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}\cdot \lim\limits_{x\to 0+}(x+2) = 1\cdot(0+2) = 2$, pa graf funkcije $f(x)$ mora prolaziti točkom $T_1 = (0, 2)$, tj. mora vrijediti $2 = f(0)$. Međutim, $f(0) = e^{-0} + a = = 1 + a$, pa iz $1 + a = 2$ slijedi $a = 1$.

Nadalje,

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{(x^2-4)\cdot \sin x}{x^2-2\cdot x} = \lim_{x\to 2-}\left[\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot \sin x}{x\cdot(x-2)}\right] = \lim_{x\to 2+}\frac{(x+2)\cdot \sin x}{x} = \frac{(2+2)\cdot \sin 2}{2} = 2\cdot \sin 2$$

pa graf funkcije $f(x)$ mora prolaziti točkom $T_2 = (2,\ 2\cdot \sin 2)$, tj. mora vrijediti $2\cdot \sin 2 = f(2)$. Međutim, $f(2) = b - \ln(2-1) + 2\cdot \sin 2 = b - \ln 1 + 2\cdot \sin 2 = b + 2\cdot \sin 2$, pa iz $2\cdot \sin 2 = b + 2\cdot \sin 2$ slijedi $b = 0$. Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na Slici 21.



Slika 21.

4. Odredite realne brojeve a, $b \in \mathbf{R}$ tako da realna funkcija

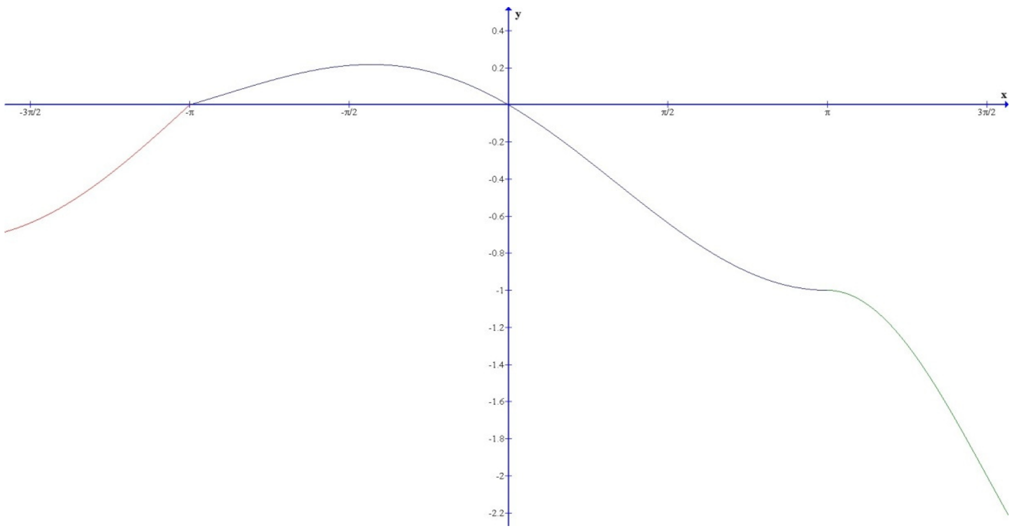
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{x+\pi}, \text{ za } x<-\pi; \\ b+\dfrac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}, \text{ za } -\pi \le x<\pi; \\ a-\cos x, \text{ za } x\ge \pi; \end{cases}$$

bude neprekidna na cijelom skupu **R**. (Ne trebate provjeravati je li skup **R** domena funkcije $f(x)$.)

<u>*Naputak i rezultat*</u>: $\lim\limits_{x\to-\pi-} f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi-}\dfrac{1+\cos x}{x+\pi}=\lim\limits_{x\to-\pi-}\dfrac{0+\sin x}{1+0}=\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin x}{1}=\sin(-\pi)=0$, pa graf funkcije $f(x)$ mora prolaziti točkom $T_1=(-\pi, 0)$, tj. mora vrijediti $0=f(-\pi)$. Međutim, $f(-\pi)=b+\dfrac{\sin\left[\pi-(-\pi)\right]}{\pi-(-\pi)}=$ $=b+\dfrac{\sin(2\cdot\pi)}{2\cdot\pi}=b+0=b$, pa slijedi $b=0$. Nadalje,

$$\lim_{x\to\pi-} f(x)=\lim_{x\to\pi-}\left[b+\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}\right]=\lim_{x\to\pi-} b+\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}=b+\lim_{x\to\pi-}\frac{\cos(\pi-x)\cdot(-1)}{1-0}=b+\lim_{x\to\pi-}\frac{-\cos(\pi-x)}{1}=$$
$$=b-\frac{\cos(\pi-\pi)}{1}=b-\cos 0=b-1$$

pa graf funkcije $f(x)$ mora prolaziti točkom $T_2 = (\pi, b - 1)$, tj. mora vrijediti $b - 1 = f(\pi)$. Međutim, $f(\pi) = a - \cos \pi = a - (-1) = a + 1$, pa slijedi $a + 1 = b - 1$, odnosno $a - b = -2$. Tako iz sustava $b = 0$, $a - b = -2$ konačno dobivamo $a = -2$, $b = 0$. Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na Slici 22.



Slika 22.

5. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ definirane propisom $f(x) = x^3 - 3 \cdot x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Funkcija $f(x)$ je polinom 3. stupnja, a budući da je svaki polinom neprekidna funkcija, zaključujemo da je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu [-2, 2]. S predavanja znamo da svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu ima i svoju najmanju i svoju najveću vrijednost, tj. svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu ima i svoj globalni minimum i svoj globalni maksimum. Odredimo te točke.

Prva i druga derivacija funkcije $f(x)$ su:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 1 = f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3,$$
$$f''(x) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 1 = f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x = 6 \cdot x.$$

Stoga su kandidati za *lokalne* ekstreme sva rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ koja pripadaju skupu $[-2, 2]$. Iz

$$f'(x) = 0$$

slijedi

$$3 \cdot x^2 - 3 = 0,$$

odnosno

$$x^2 - 1 = 0.$$

Odatle je $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ i te točke pripadaju skupu $[-2, 2]$. Budući da je $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, funkcija $f(x)$ u točki $x = -1$ ima lokalni maksimum $y_{max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = (-1) + 3 = 2$. Budući da je $f''(1) =$

$= 6 \cdot 1 = 6 > 0$, funkcija $f(x)$ u točki $x = 1$ ima lokalni minimum $y_{max} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$.

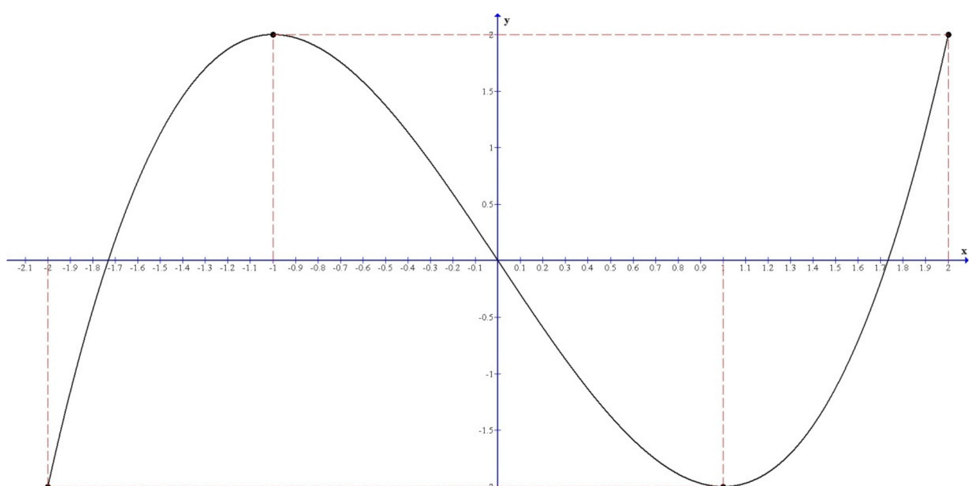
Preostaje nam utvrditi jesu li dobivene vrijednosti ujedno i globalni minimum, odnosno globalni maksimum. Jedine točke koje ne mogu biti obuhvaćene f'' – testom su rubne točke segmenta jer u njima zadana funkcija nema derivaciju. Stoga izračunajmo vrijednosti funkcije f u tim točkama:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8 + 6 = -2,$$
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2,$$

Prema tome:

– globalni minimum funkcije f jednak je -2 i postiže se u točkama $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$;
– globalni maksimum funkcije f jednak je 2 i postiže se u točkama $x_3 = -1$ i $x_4 = 2$.

Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 23.



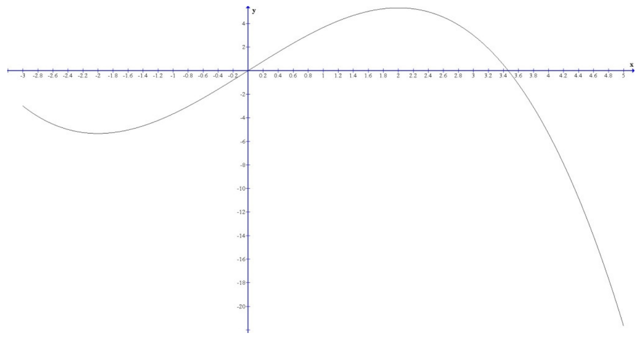
Slika 23.

6. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [-3, 5] \to \mathbf{R}$ definirane propisom $f(x) = 4 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Kandidati za lokalne ekstreme su rješenja jednadžbe $4 - x^2 = 0$. Odatle je $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Budući da je $f''(x) = (-2) \cdot x$, zaključujemo da u točki $x_1 = -2$ funkcija f ima lokalni minimum jednak $f(-2) = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$, a u točki $x_2 = 2$ funkcija f ima lokalni maksimum jednak $f(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ Nadalje je $f(-3) = 4 \cdot (-3) - \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 = -12 + 9 = -3$, te $f(5) = 20 - \frac{1}{3} \cdot 125 = -\frac{65}{3}$. Prema tome,

– globalni minimum funkcije f jednak je $-\frac{65}{3}$ i postiže se u točki $x_1 = 5$;
– globalni maksimum funkcije f jednak je $\frac{16}{3}$ i postiže se u točki $x_2 = 2$.

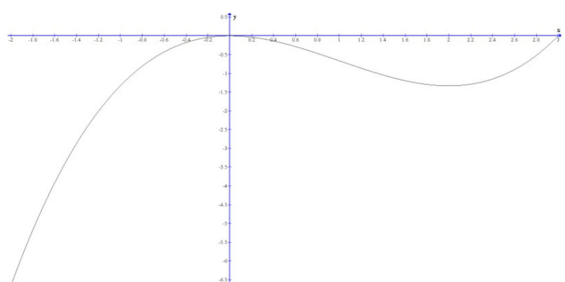
Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 24.



Slika 24.

7. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [-2, 3] \to \mathbf{R}$ definirane propisom $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

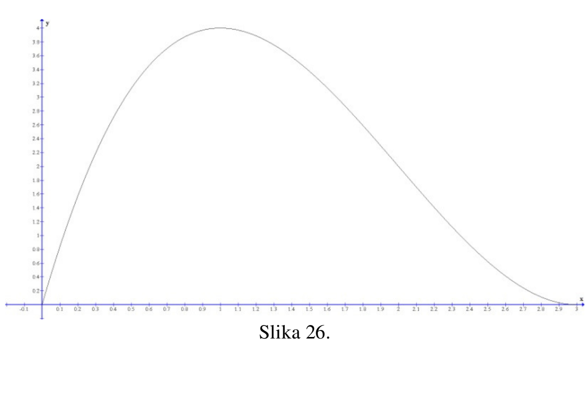
Rezultat: Globalni minimum funkcije f jednak je $-\frac{20}{3}$ i postiže se u točki $x_1 = -2$. Globalni maksimum funkcije f jednak je 0 i postiže se u točkama $x_2 = 0$ i $x_3 = 3$. Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 25.



Slika 25.

8. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$ definirane propisom $f(x) = x \cdot (x - 3)^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: Globalni minimum funkcije f jednak je 0 i postiže se za $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$. Globalni maksimum funkcije f jednak je 4 i postiže se za $x_3 = 1$. Graf funkcije f prikazan je na Slici 26.



Slika 26.

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

poglavlje: **DIFERENCIJALNI RAČUN I PRIMJENE**

1. Izračunajte duljinu tangente povučene na krivulju zadanu jednadžbom $x \cdot y = 48$ u točki $T = (6, y_T)$ te krivulje.

Rješenje: Korak 1. Najprije odredimo nepoznatu koordinatu točke T. Budući da ta točka pripada zadanoj krivulji, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Stoga uvrštavanjem $x_T = 6$ i $y = y_T$ u jednadžbu krivulje dobijemo

$$6 \cdot y_T = 48,$$

a odavde je $y_T = 8$. Prema tome, koordinate točke T su $T = (6, 8)$.

Korak 2. Odredimo koeficijent smjera tangente povučene na zadanu krivulju u točki T. Jednadžba krivulje zadana je u implicitnom obliku, pa lijevu stranu te jednadžbe deriviramo kao implicitno zadanu funkciju. Na toj strani imamo umnožak dviju funkcija (x i y), pa primjenom pravila za deriviranje umnoška dviju funkcija dobijemo:

$$(x)' \cdot y + x \cdot y' = (48)'$$
$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0,$$
$$y + x \cdot y' = 0,$$

a odavde je

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

U ovu jednakost uvrstimo $x = x_T = 6$ i $y = y_T = 8$. Prema geometrijskoj interpretaciji derivacije funkcije, vrijednost koju ćemo dobiti (y') jednaka je koeficijentu smjera (k_t) tangente povučene na zadanu krivulju u točki T. Stoga je

$$k_t = y' = -\frac{y_T}{x_T} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Korak 3. Napišimo jednadžbu pravca čiji je koeficijent smjera $k_t = -\frac{4}{3}$, a prolazi točkom T. Taj pravac bit će upravo tangenta povučena na zadanu krivulju u točki T. Koristimo formulu za dobivanje jednadžbe pravca kojemu su zadani koeficijent smjera i jedna točka. Dobivamo:

$$t \ldots\ y - 8 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 6),$$
$$t \ldots y = -\frac{4}{3} \cdot x + 16.$$

Korak 4. Odredimo sjecište dobivene tangente i osi Ox. To je uvijek točka čija je druga koordinata (y) jednaka 0. Prema tome, u gornju jednadžbu umjesto y uvrstimo 0. Dobijemo:

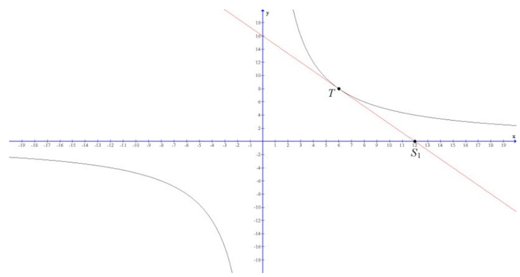
$$0 = -\frac{4}{3} \cdot x + 16.$$

Riješimo tu jednadžbu, pa dobijemo $x = 12$. Stoga dobivena tangenta siječe os Ox u točki $S_1 = (12, 0)$.

<u>Korak 5.</u> Tražena duljina tangente (d) jednaka je duljini dužine $\overline{TS_1}$, a ta duljina jednaka je međusobnoj udaljenosti točaka T i S_1. Nju ćemo izračunati koristeći formulu za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Tako konačno dobijemo:

$$d = d(T, S_1) = \sqrt{(x_T - x_{S_1})^2 + (y_T - y_{S_1})^2} = \sqrt{(6-12)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10\,.$$

(Vidjeti Sliku 1.)

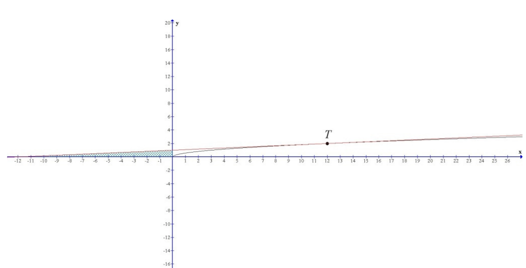


Slika 1.

2. Zadana je krivulja $y = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$. Odredite površinu trokuta kojega tangenta povučena na zadanu krivulju u točki $T = (x_T, 2)$ zatvara s objema koordinatnim osima.

<u>Naputak i rezultat</u>: Uvrštavanjem $y_T = 2$ u jednadžbu krivulje lako dobijemo $x_T = 12$. Prva derivacija funkcije $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$ jednaka je $f\,'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{x}{3}}}\cdot\left(\dfrac{x}{3}\right)' = \dfrac{1}{6\cdot\sqrt{\dfrac{x}{3}}}$, pa je koeficijent smjera tangente jednak $k_t = f\,'(12) = \dfrac{1}{6\cdot\sqrt{\dfrac{12}{3}}} = \dfrac{1}{12}$. Stoga je jednadžba tangente $t\ldots\ y - 2 = \dfrac{1}{12}\cdot(x-12)$, odnosno $t\ldots\ y = \dfrac{1}{12}\cdot x + 1$.

Tu jednadžbu zapišemo u segmentnom obliku: $\dfrac{x}{-12} + \dfrac{y}{1} = 1$, pa „očitamo“ duljine odsječaka na osima Ox, odnosno Oy: $|m| = |-12| = 12$, $|n| = |1| = 1$. Trokut kojega dobivena tangenta zatvara s koordinatnim osima je pravokutan trokut (s pravim kutom u ishodištu) kojemu su duljine kateta $|m|$ i $|n|$. Tako je tražena površina jednaka $P = \dfrac{1}{2}\cdot|m|\cdot|n| = \dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 1 = 6$ kv. jed. (vidjeti Sliku 2.)



Slika 2.

3. Zadana je jednakostranična hiperbola $y^2 - x^2 = 16$. Na tu je krivulju u njezinoj točki $T = (3, y > 0)$ povučena normala. Nađite polovište odsječka kojega ta normala odsijeca između obiju koordinatnih osi.

Rješenje: Korak 1. Najprije odredimo nepoznatu koordinatu točke T. Ta točka pripada zadanoj krivulji, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Uvrštavanjem $x_T = 5$ u jednadžbu krivulje dobijemo kvadratnu jednadžbu

$$y^2 - 9 = 16.$$

Jedino strogo pozitivno rješenje ove jednadžbe je $y = 5$. Prema tome, $T = (3, 5)$.

Korak 2. Odredimo koeficijent smjera normale povučene na zadanu krivulju u točki T. Taj je koeficijent suprotan i recipročan koeficijentu smjera tangente povučene na zadanu krivulju u točki T. Koeficijent smjera tangente, pak, jednak je vrijednosti prve derivacije implicitno zadane funkcije (čiji je graf zadana krivulja) u točki $x = 3$. Stoga primjenom pravila za deriviranje implicitno zadane funkcije i pravila za deriviranje složene funkcije najprije odredimo derivaciju implicitno zadane funkcije čiji je graf zadana krivulja:

$$(y^2)' - (x^2)' = (16)'$$
$$2 \cdot y \cdot y' - 2 \cdot x = 0,$$

a odavde je

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Tako je koeficijent smjera normale u *bilo kojoj* točki krivulje jednak

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\frac{x}{y}} = -\frac{y}{x},$$

pa posebno za točku $T = (3, 5)$ dobivamo

$$k_n = -\frac{5}{3}.$$

Korak 3. Napišimo jednadžbu pravca čiji je koeficijent smjera $k_n = -\frac{5}{3}$ i koji prolazi točkom $T = (3, 5)$. Taj pravac bit će upravo normala povučena na zadanu krivulju u točki T. Koristimo formulu za jednadžbu pravca kojemu su zadani koeficijent smjera i jedna točka. Dobivamo:

$$n \ldots y - 5 = -\frac{5}{3} \cdot (x - 3)$$
$$n \ldots y = -\frac{5}{3} \cdot x + 10$$

Korak 4. Sjecište (S_1) normale s osi Ox dobivamo tako da u gornju jednadžbu uvrstimo $y = 0$ i riješimo dobivenu linearnu jednadžbu po nepoznanici x:

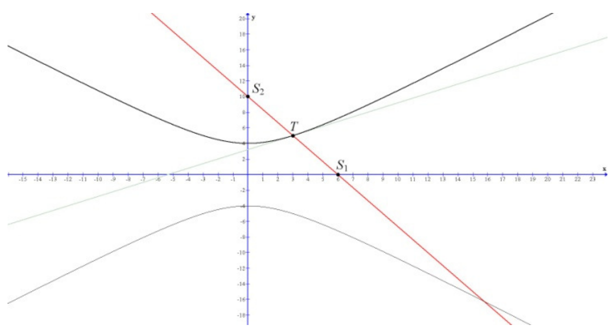
$$0 = -\frac{5}{3} \cdot x + 10$$
$$\frac{5}{3} \cdot x = 10$$
$$5 \cdot x = 30$$
$$x = 6$$

Dakle, $S_1 = (6, 0)$. Sjecište (S_2) normale s osi Oy dobivamo tako da u jednadžbu normale uvrstimo $x = 0$ i izračunamo pripadnu vrijednost y. Lako nalazimo $S_2 = (0, 10)$.

Korak 5. Traženo polovište (P) jednako je polovištu dužine $\overline{S_1S_2}$. Tako konačno dobivamo:

$$P = \left(\frac{x_{S_1} + x_{S_2}}{2}, \frac{y_{S_1} + y_{S_2}}{2} \right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+10}{2} \right) = (3,5) .$$

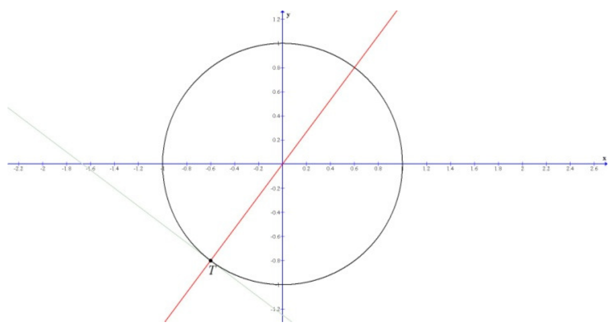
Zaključno primijetimo da je $P \equiv T$ (vidjeti Sliku 3.)



Slika 3.

4. U točki $T = \left(-\frac{3}{5}, y < 0 \right)$ središnje jedinične kružnice povučena je normala na kružnicu. Izračunajte duljinu te normale.

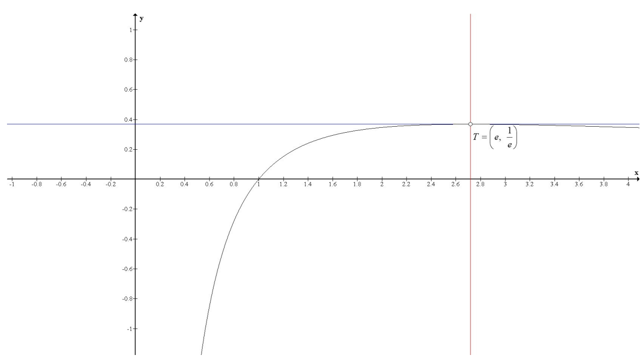
Naputak i rezultat: Jednadžba središnje jedinične kružnice je $x^2 + y^2 = 1$. Uvrštavanjem $x_T = -\frac{3}{5}$ u jednadžbu kružnice dobivamo kvadratnu jednadžbu $\frac{9}{25} + y^2 = 1$ čije je strogo negativno rješenje $y_T = -\frac{4}{5}$. Dakle, $T = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$. Prvu derivaciju implicitno zadane funkcije $x^2 + y^2 = 1$ dobijemo iz $2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot y' =$ $= 0$, otkuda je $y' = -\frac{x}{y}$. Stoga je koeficijent smjera normale povučene na kružnicu u bilo kojoj točki kružnice jednak $k_n = -\frac{1}{y'} = \frac{y}{x}$. Posebno, koeficijent smjera normale povučene na kružnicu u točki T jednak je $k_n = \frac{y_T}{x_T} = \frac{4}{3}$. Stoga je jednadžba normale $n \ldots y + \frac{4}{5} = \frac{4}{3} \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right)$, tj. $n \ldots y = \frac{4}{3} \cdot x$. Ta normala ima odsječak na osi Oy jednak 0, pa ona prolazi ishodištem, tj. siječe os Ox u ishodištu. Stoga je njezina duljina jednaka udaljenosti točke T od ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Budući da točka T pripada središnjoj jediničnoj kružnici kojoj je središte upravo ishodište $O = (0, 0)$, a polumjer $r = 1$, prema definiciji kružnice slijedi da je tražena udaljenost jednaka $d = d(T, O) = r = 1$. (vidjeti Sliku 4.)



Slika 4.

5. Odredite duljinu normale povučene na krivulju $y = \frac{\ln x}{x}$ u točki čija je apscisa $x = e$.

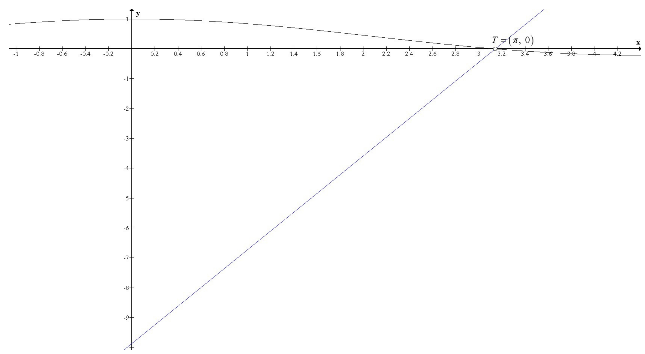
<u>Naputak i rezultat</u>: Točka u kojoj je povučena normala je $T = \left(e, \frac{1}{e}\right)$. Jednadžba tangente povučene na zadanu krivulju u točki T je $t \ldots\ y = \frac{1}{e}$, pa jednadžba normale povučene na zadanu krivulju u točki T glasi $n \ldots\ x = e$. Stoga je tražena duljina jednaka $d = e$. (Vidjeti Sliku 5.)



Slika 5.

6. Izračunajte površinu trokuta kojega normala povučena na krivulju $y = \frac{\sin x}{x}$ u točki s apscisom $x = \pi$ zatvara s objema koordinatnim osima.

<u>*Naputak i rezultat*</u>: Jednadžba normale je $y = \pi \cdot x - \pi^2$. Stoga je tražena površina jednaka $P = \frac{1}{2} \cdot \pi^3$ kv. jed. (Vidjeti Sliku 6.)



Slika 6.

7. Od stakla treba napraviti čašu obujma 2 dl u obliku uspravnoga kružnoga valjka otvorenoga s jedne strane. Odredite dimenzije čaše (iskazane u cm s točnošću od 10^{-1}) tako da se za njezinu izradbu utroši što manje stakla. (*Napomena*: 1 litra = 1 dm^3.) Debljinu stijenke čaše zanemarujemo.

<u>*Rješenje*</u>: Označimo s r polumjer osnovke čaše, a s h njezinu visinu. Obujam čaše jednak je obujmu valjka kojemu je polumjer osnovke r, a visina h. (To što čaša nema jednu osnovku <u>ne</u> utječe na vrijednost njezina obujma, ali utječe na vrijednost njezina oplošja.) Obujam valjka kojemu je polumjer osnovke r, a visina h jednak je V = površina osnovke · visina = $(r^2 \cdot \pi) \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$. Prema uvjetu zadatka, obujam čaše treba biti jednak 2 dl = 2 · 0.1 litara = 2 · 0.1 dm^3 = 2 · 0.1 · 1000 cm^3 = 200 cm^3, pa slijedi

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 200,$$

a odavde je

$$h = \frac{200}{r^2 \cdot \pi}.$$

Od stakla koje će biti potrošeno prave se osnovka čaše i plašt čaše. Površina osnovke čaše je $B = r^2 \cdot \pi$, dok je površina plašta čaše $P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ (kad se plašt čaše razvije u ravninu, kao i kod svakoga uspravnog valjka, dobije se pravokutnik kojemu je duljina jedne stranice jednaka opsegu osnovke, a duljina druge stranice jednaka visini valjka). Stoga je ukupna površina (oplošje) čaše

$$O = B + P = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h.$$

U ovu jednakost uvrstimo $h = \frac{200}{r^2 \cdot \pi}$, pa dobijemo:

$$O = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{200}{r^2 \cdot \pi} = r^2 \cdot \pi + \frac{400}{r}.$$

Stoga se zadatak svodi na nalaženje vrijednosti varijable r za koju je vrijednost oplošja najmanja. To znači da treba odrediti vrijednost varijable r tako da vrijednost funkcije

$$f(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{400}{r}$$

bude najmanja. Pritom prirodno pretpostavljamo da je domena funkcije f skup $\langle 0, +\infty\rangle$, tj. da duljina polumjera osnovke može biti bilo koji strogo pozitivan realan broj. (Nisu nam potrebni dodatni „jači“ uvjeti na vrijednost polumjera r.) Taj minimum određujemo uobičajenim postupkom:

<u>Korak 1.</u> Odredimo prvu derivaciju funkcije f po varijabli r:

$$f'(r) = 2 \cdot r \cdot \pi - \frac{400}{r^2}.$$

<u>Korak 2.</u> Riješimo jednadžbu $f'(r) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(r) &= 0 \\ 2 \cdot r \cdot \pi - \frac{400}{r^2} &= 0 \quad / \cdot \frac{r^2}{2} \\ r^3 \cdot \pi - 200 &= 0 \\ r^3 &= \frac{200}{\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

<u>Korak 3.</u> Odredimo drugu derivaciju funkcije f po varijabli r:

$$f''(r) = [f'(r)]' = \left(2 \cdot r \cdot \pi - \frac{400}{r^2}\right)' = 2 \cdot \pi + \frac{800}{r^3}$$

<u>Korak 4.</u> Zbog prirodne pretpostavke $r \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi $f''(r) > 0$ jer su i prvi i drugi pribrojnik u gornjem izrazu očito strogo pozitivni brojevi. Stoga je vrijednost druge derivacije funkcije f za $r = 4$ strogo pozitivan realan broj, pa ta funkcija u $r = 4$ ima lokalni minimum.

<u>Korak 5.</u> Preostaje izračunati visinu čaše za $r = 4$:

$$h = \frac{200}{r^2 \cdot \pi} = \frac{200}{4^2 \cdot \pi} \approx 4 \text{ cm}.$$

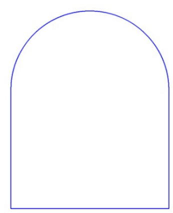
(*Napomena*: Uvrštavanjem $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ u izraz za h dobije se $h = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$, pa možemo zaključiti da duljina polumjera osnovke i duljina visine čaše moraju biti jednaki.) Stoga je rješenje zadatka

$$r = h = 4 \text{ cm}.$$

8. Od lima treba napraviti lonac obujma 10 litara u obliku uspravnoga kružnoga valjka otvorenoga s jedne strane. Odredite dimenzije lonca (iskazane u cm s točnošću od 10^{-1}) tako da se za njegovu izradbu utroši što manje lima. Debljinu stijenke lonca zanemarujemo.

Rezultat: $r = h = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.7$ cm

9. Od drvene grede dugačke 10 metara treba napraviti okvir prozora u obliku pravokutnika s polukrugom iznad jedne stranice (vidjeti Sliku 7.). Odredite dimenzije prozora (iskazane u metrima s točnošću od 10^{-3}) tako da prozor propušta što više svjetla.



Slika 7.

Rješenje: Neka su a i b stranice pravokutnika. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \geq b >$ > 0. Da bi prozor propuštao što više svjetla, polukrug treba konstruirati iznad veće stranice pravokutnika, tj. iznad stranice a, pa će promjer polukruga biti jednak upravo a. Opseg prozora jednak je zbroju opsega pravokutnoga dijela prozora i duljine polukružnice koja određuje polukrug:

$$O = (a + 2 \cdot b) + \frac{1}{2} \cdot (a \cdot \pi) = \left(\pi + \frac{1}{2}\right) \cdot a + 2 \cdot b.$$

Prema uvjetu zadatka, opseg prozora mora biti jednak duljini grede:

$$\left(\pi + \frac{1}{2}\right) \cdot a + 2 \cdot b = 10.$$

Odavde je

$$b = 5 - \left(\frac{2 \cdot \pi + 1}{4}\right) \cdot a .$$

Prozor će propuštati najveću količinu svjetla kad površina prozora bude najveća (s obzirom na sve navedene uvjete). Površina prozora jednaka je zbroju površine pravokutnika čije su stranice a i b i površine polukruga čiji je promjer a:

$$P = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi .$$

U ovu jednakost uvrstimo $b = 5 - \left(\frac{2 \cdot \pi + 1}{4}\right) \cdot a$, pa dobijemo:

$$P = a \cdot \left[5 - \left(\frac{2 \cdot \pi + 1}{4}\right) \cdot a\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi$$
$$P = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot a^2 + 5 \cdot a$$

Dakle, tražimo vrijednost varijable a za koju je vrijednost funkcije f definirane s

$$f(a) = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot a^2 + 5 \cdot a$$

najveća. Tu vrijednost odredimo uobičajenim postupkom:

<u>Korak 1.</u> Odredimo prvu derivaciju funkcije f po varijabli a:

$$f'(a) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot a + 5$$
$$f'(a) = -\left(\frac{1}{4} + \pi\right) \cdot a + 5$$

<u>Korak 2.</u> Riješimo jednadžbu $f'(a) = 0$ po nepoznanici a:

$$f'(a) = 0$$
$$-\left(\frac{1}{4} + \pi\right) \cdot a + 5 = 0$$
$$a = \frac{20}{4 \cdot \pi + 1} \approx 1.474 \text{ m}$$

<u>Korak 3.</u> Odredimo drugu derivaciju funkcije f po varijabli a:

$$f''(a) = [f'(a)]' = \left[-\left(\frac{1}{4} + \pi\right) \cdot a + 5\right]' = -\frac{1}{4} - \pi .$$

<u>Korak 4.</u> Očito je $f''(a) < 0$ za svaki $a > 0$ (štoviše, za svaki $a \in \mathbf{R}$, ali ta činjenica nam ovdje nije potrebna), pa zaključujemo da je vrijednost druge derivacije funkcije f za $a = 1.474$ strogo manja od nule. To znači da funkcija f postiže lokalni maksimum za $a = 1.474$.

<u>Korak 5.</u> Preostaje odrediti visinu prozora b:

$$b = 5 - \left(\frac{2 \cdot \pi + 1}{4}\right) \cdot a = 5 - \left(\frac{2 \cdot \pi + 1}{4}\right) \cdot \frac{20}{4 \cdot \pi + 1} = 5 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \pi + 1}{4 \cdot \pi + 1}\right) = \frac{10 \cdot \pi}{4 \cdot \pi + 1} \approx 2.316 \text{ m}$$

Prema tome, tražene dimenzije prozora su $a = 1.474$ m i $b = 2.316$ m.

10. Od žice duljine 10 m treba ili napraviti krug što veće površine ili napraviti kvadrat što veće površine ili presjeći žicu na dva dijela, pa od jednoga dijela napraviti krug, a od drugoga kvadrat tako da zbroj površina dobivenih likova bude što veći. Koja od navedenih triju mogućnosti daje optimalnu površinu? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje: Neka je r polumjer kruga, a a stranica kvadrata. Zbroj opsega kruga i opsega kvadrata treba biti jednak duljini žice:

$$2 \cdot r \cdot \pi + 4 \cdot a = 10.$$

Odatle je

$$a = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot r .$$

Budući da vrijednost varijable a mora biti nenegativna, iz nejednakosti

$$\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot r \geq 0$$

slijedi

$$r \leq \frac{5}{\pi},$$

pa za vrijednost varijable r vrijedi

$$r \in \left[0, \ \frac{5}{\pi}\right].$$

Zbroj površina dobivenih likova jednak je

$$P = r^2 \cdot \pi + a^2 ,$$

pa uvrštavanjem $a = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot r$ dobivamo:

$$P = r^2 \cdot \pi + \left(\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot r\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot r + \frac{25}{4}$$

Tako smo dobili kvadratnu funkciju f u varijabli r

$$f(r) = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot r + \frac{25}{4} .$$

Koeficijent uz r^2 jednak je $\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\cdot\pi > 0$, pa funkcija f ima lokalni minimum. (Svaka kvadratna funkcija čiji je koeficijent uz varijablu x^2 strogo pozitivan realan broj ima lokalni minimum.) To znači da se globalni maksimum (koji tražimo u zadatku) postiže ili za $r = 0$ ili za $r = \frac{5}{\pi}$. Stoga računamo vrijednosti funkcije f za $r = 0$ i za $r = \frac{5}{\pi}$:

$$f(0)=\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\cdot\pi\cdot 0^2-\frac{5}{2}\cdot\pi\cdot 0+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{\pi}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\pi\cdot\frac{5}{\pi}+\frac{25}{4}=\frac{25}{\pi}$$

Budući da je $\pi < 4$, to je $\frac{25}{\pi}>\frac{25}{4}$, pa funkcija f postiže globalni maksimum $\frac{25}{\pi}$ za $r = \frac{5}{\pi}$. Dakle, od žice treba napraviti samo krug polumjera $r = \frac{5}{\pi}$.

11. Ispitajte postoje li ekstremi polinoma $p(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 30$. Ako postoje, odredite ih i klasificirajte (tj. utvrdite je li riječ o lokalnim ili globalnim ekstremima).

Naputak i rezultat: Prva i druga derivacija polinoma p su $p'(x) = 6 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 3)$ i $p''(x) = 12 \cdot (x - 1)$. Stoga p ima lokalni minimum -24 za $x = 3$, a lokalni maksimum 40 za $x = -1$. Navedeni ekstremi nisu i globalni ekstremi jer je očito $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$, pa f nije omeđena niti odozdo niti odozgo (što je nužan uvjet za postojanje globalnih ekstrema).

12. Ispitajte postoje li ekstremi polinoma $p(x) = -4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$. Ako postoje, odredite ih i klasificirajte (tj. utvrdite je li riječ o lokalnim ili globalnim ekstremima).

Rezultat: p ima lokalni minimum -3 za $x = -1$ i lokalni maksimum $\frac{15}{4}$ za $x = \frac{1}{2}$. Ti ekstremi nisu globalni ekstremi iz razloga kao u Zadatku 1.

13. Ispitajte postoje li ekstremi realne funkcije $f(x)=\frac{9\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2-9}$. Ako postoje, odredite ih i klasificirajte (tj. utvrdite je li riječ o lokalnim ili globalnim ekstremima).

Rezultat: f ima lokalni maksimum -1 za $x = 0$. Budući da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=9$, navedeni ekstrem nije globalni ekstrem.

14. Ispitajte postoje li ekstremi realne funkcije $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$. Ako postoje, odredite ih i klasificirajte (tj. utvrdite je li riječ o lokalnim ili globalnim ekstremima).

Rezultat: f ima globalni minimum $-\frac{1}{e^2}$ za $x = e^2$. Da se radi o globalnom minimumu, slijedi iz činjenica da je $D_f = \langle 0, +\infty\rangle$, te da f strogo pada na intervalu $\langle 0, e^2\rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle e^2, +\infty\rangle$.

15. Odredite globalne ekstreme funkcije $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ definirane propisom

$$f(x) = x \cdot \sin x + \cos x.$$

Naputak i rezultat: Najprije je $f\,'(x) = x \cdot \cos x$. i $f\,''(x) = \cos x - x \cdot \sin x$. U segmentu $[0, \pi]$ jednadžba $f\,'(x) = 0$ ima dva rješenja: $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Lako se provjeri da za $x = 0$ $f(x)$ ima lokalni minimum 1, dok za $x = \frac{\pi}{2}$ $f(x)$ ima lokalni maksimum $\frac{\pi}{2}$. Budući da je $f(\pi) = -1$, zaključujemo da funkcija f ima globalni minimum -1 za $x = \pi$ i globalni maksimum $\frac{\pi}{2}$ za $x = \frac{\pi}{2}$.

16. Odredite globalne ekstreme funkcije $f : [-1, 1]. \to \mathbf{R}$ definirane propisom

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 1\right).$$

Naputak i rezultat: Najprije je $f\,'(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f\,''(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Jednadžba $f\,'(x) = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = 0$. Stoga f ima lokalni minimum 0 za $x = 0$. Budući da je $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 > 0$, slijedi da f ima globalni minimum 0 za $x = 0$, te globalni maksimum $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2$ za $x = -1$ i $x = 1$.

17. Odredite globalne ekstreme funkcije $f : [-2, 1] \to \mathbf{R}$ definirane propisom

$$f(x) = -\frac{x^2 + x + 1}{e^x}.$$

Naputak i rezultat: Uobičajenim načinom se dobiva da f ima lokalni minimum $-\frac{3}{e}$ za $x = 1$, te lokalni maksimum -1 za $x = 0$. Budući da je $f(-2) = -3 \cdot e^2 < -\frac{3}{e}$, zaključujemo da f ima globalni minimum $-3 \cdot e^2$ za $x = -2$, te globalni maksimum -1 za $x = 0$.

18. Odredite globalne ekstreme funkcije $f : [1, e] \to \mathbf{R}$ definirane propisom

$$f(x) = -\ln^2 x + x \cdot \ln x - x.$$

Rezultat: f ima globalni minimum -1 za $x = 1$ i $x = e$, te globalni maksimum $2 \cdot \ln 2 - \ln^2 2 - 2$ za $x = 2$.

19. Izračunajte sljedeće granične vrijednosti primjenom L'Hôpital – Bernoullijeva pravila:

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

$$\textbf{a)} \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$$
$$\textbf{b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\sin^2 x};$$
$$\textbf{c)} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x};$$
$$\textbf{d)} \lim_{x\to 0} \left(\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$$
$$\textbf{e)} \lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{\sin x}{x^3}}.$$

<u>*Rješenje*</u>:

$$\textbf{a)} \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{3\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{3\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cdot (x^2+1)} = \frac{1}{3\cdot(0^2+1)} = \frac{1}{3};$$

$$\textbf{b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\cos x} - 1)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2\cdot \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{e^{\cos x}}{\cos x}\right) = \left(-\frac{e^{\cos 0}}{\cos 0}\right) = -e;$$

$$\textbf{c)} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^{2\cdot x}} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2+x+1)'}{(e^{2\cdot x})'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\cdot x + 1}{2\cdot e^{2\cdot x}} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(2\cdot x+1)'}{(2\cdot e^{2\cdot x})'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{4\cdot e^{2\cdot x}} = \left\{\frac{2}{4\cdot(+\infty)}\right\} = 0$$

d) Označimo $L = \lim_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. Taj limes je oblika $1^{+\infty}$, pa ga logaritmiranjem svodimo na oblik takav da možemo primijeniti L'Hôpital – Bernoullijevo pravilo:

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right]$$
$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left\{\ln\left[(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right]\right\}$$
$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}\cdot \ln(\cos^2 x)\right]$$
$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

Izračunajmo zasebno graničnu vrijednost na desnoj strani posljednje jednakosti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{\sin^2 x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[\ln(\cos^2 x)\right]'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 2\cdot \cos x \cdot (-\sin x)}{2\cdot \sin x\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos^2 0} = -1$$

Tako smo dobili jednakost $\ln L = -1$ iz koje je $L = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

(*Napomena*: Traženu graničnu vrijednost moguće je izračunati brže i jednostavnije (bez primjene L'Hôpital – Bernoullijeva pravila) na sljedeći način:

$$\lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } t = \sin^2 x \\ \text{kad } x \to 0, \text{ onda } t \to 0\end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\left[1+(-1)\cdot t\right]^{\frac{1}{t}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.)$$

e) Analogno kao u **d**) podzadatku, označimo zadanu graničnu vrijednost s L, pa logaritmiranjem dobijemo

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x \cdot \ln(1+x^2)}{x^3}$$
$$\ln L = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]$$

Vrijednost prvoga faktora na desnoj strani jednaka je 1. Drugi faktor jednak je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(1+x^2)\right]'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2\cdot x}{2\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

Stoga je $\ln L = 1 \cdot 1$, a otuda je $L = e^1 = e$.

20. Odredite sve asimptote sljedećih ravninskih krivulja:

a) $y = x\cdot e^{-x}$;

b) $y = x + \frac{1}{x}$;

c) $y = \frac{x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$;

d) $y = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$;

e) $y = \frac{x}{\ln x}$.

Rješenje: **a)** Funkcija $f(x) = x \cdot e^{-x}$ definirana je za svaki $x \in \mathbf{R}$, što znači da njezin graf (a to je upravo zadana krivulja) **nema** vertikalnih asimptota. (Vertikalne asimptote su *uvijek* pravci koji prolaze polovima funkcije usporedno s osi y.) Za određivanje ostalih asimptota računamo:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = \left\{\frac{1}{e^{-\infty}} = e^{+\infty} = \right\} = +\infty;$$
$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \left\{\frac{1}{e^{+\infty}} = \right\} = 0;$$
$$l_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - k_2\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{-x} - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

Zaključujemo da zadana krivulja ima desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$, tj. os x, dok lijevih horizontalnih asimptota nema.

b) Funkcija $f(x) = x + \frac{1}{x}$ nije definirana za $x = 0$, pa je njezina vertikalna asimptota pravac $x = 0$. Za određivanje ostalih asimptota računamo:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left\{1+\frac{1}{-\infty} = 1+0\right\} = 1;$$

$$l_1 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - k_1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \left\{\frac{1}{-\infty}\right\} = 0.$$

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \left\{1+\frac{1}{+\infty} = 1+0\right\} = 1;$$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - k_2\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \left\{\frac{1}{+\infty}\right\} = 0.$$

Prema tome, zadana krivulja ima kosu asimptotu $y = 1 \cdot x + 0$, tj. $y = x$. Ovdje nije potrebno isticati je li riječ o lijevoj ili desnoj kosoj asimptoti jer je dobiveni pravac i lijeva i desna kosa asimptota.

c) Funkcija $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$ nije definirana za one $x \in \mathbf{R}$ za koje je $x^2 - 1 = 0$. Riješimo tu kvadratnu jednadžbu, pa dobijemo $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Stoga su vertikalne asimptote zadane krivulje pravci $x = -1$ i $x = 1$. Za određivanje ostalih asimptota računamo:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x-1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0-0-0}{1-0} = 1;$$

$$l_1 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x-1}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2\cdot x^2-2\cdot x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{-2-0-0}{1-0} = -2.$$

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x-1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0-0-0}{1-0} = 1;$$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2-3\cdot x-1}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cdot x^2-2\cdot x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{-2-0-0}{1-0} = -2.$$

Dakle, zadana krivulja ima kosu asimptotu $y = x - 2$ (opet nije potrebno isticati je li riječ o lijevoj ili desnoj kosoj asimptoti jer je dobiveni pravac i lijeva i desna kosa asimptota).

d) Prirodno područje definicije (domena) funkcije f je skup $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. ($x^2 + 1 > 0$, za svaki $x \in \mathbf{R}$, pa je jedini uvjet na vrijednost varijable x $x \neq 0$.) Funkcija ima pol $x = 0$, pa je vertikalna asimptota pravac $x = 0$. Za određivanje ostalih asimptota računamo:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln(x^2+1)\right]'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2\cdot x}{2\cdot x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0;$$

$$l_1 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\ln(x^2+1)\right]'}{(x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2\cdot x}{1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Analogno se dobije $k_2 = l_2 = 0$. Stoga je horizontalna asimptota $y = 0$ (os x).

e) Prirodno područje definicije (domena) funkcije f je skup $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$. (Ta činjenica slijedi iz uvjeta $x > 0$ i $\ln x \neq 0$). Stoga zadana krivulja nema lijevu kosu asimptotu. Funkcija ima pol $x = 1$, pa je vertikalna asimptota pravac $x = 1$. Za određivanje desne kose asimptote računamo:

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x} = \left\{\frac{1}{+\infty}\right\} = 0;$$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_2\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\ln x} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Stoga krivulja nema desnu kosu asimptotu, pa je njezina jedina asimptota $x = 1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

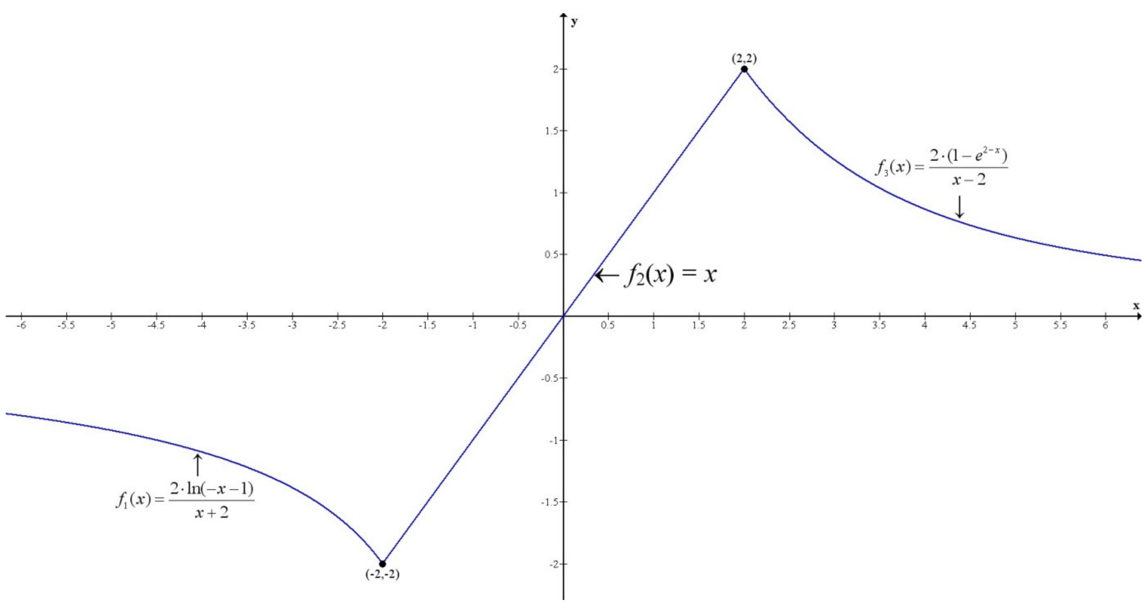
1. OGLEDNI PRIMJER 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 1

1. Odredite vrijednosti parametara a, $b \in \mathbf{R}$ tako da realna funkcija f definirana s

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot\ln(-x-1)}{x+2}, & \text{za } x<-2;\\ a\cdot x+b, & \text{za } -2\le x\le 2;\\ \dfrac{2\cdot(1-e^{2-x})}{x-2}, & \text{za } x>2;\end{cases}$$

bude neprekidna na skupu $\mathbf{R}$. (Ne trebate provjeravati je li skup $\mathbf{R}$ domena funkcije f.)

Rezultat: $a = 1$, $b = 0$. Vidjeti Sliku 1.



Slika 1.

2. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ definirane propisom $f(x) = x^3 - 3 \cdot x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Funkcija $f(x)$ je polinom 3. stupnja, a budući da je svaki polinom neprekidna funkcija, zaključujemo da je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu [-2, 2]. S predavanja znamo da svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu ima i svoju najmanju i svoju najveću vrijednost, tj. svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu ima i svoj globalni minimum i svoj globalni maksimum. Odredimo te točke.

Prva i druga derivacija funkcije $f(x)$ su:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^2 - 3,$$
$$f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 0 = 6 \cdot x.$$

Stoga su kandidati za *lokalne* ekstreme sva rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ koja pripadaju skupu $[-2, 2]$. Iz

$$f'(x) = 0$$

slijedi

$$3 \cdot x^2 - 3 = 0,$$

odnosno

$$x^2 - 1 = 0.$$

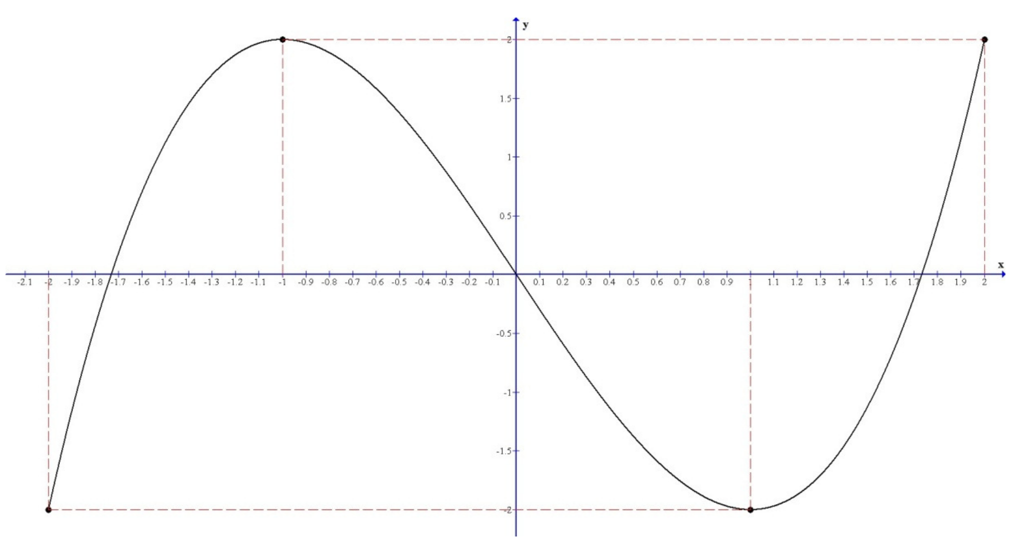
Odatle je $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ i te točke pripadaju skupu $[-2, 2]$. Budući da je $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, funkcija $f(x)$ u točki $x = -1$ ima lokalni maksimum $y_{max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = (-1) + 3 = 2$. Budući da je $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, funkcija $f(x)$ u točki $x = 1$ ima lokalni minimum $y_{max} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$.

Preostaje nam utvrditi jesu li dobivene vrijednosti ujedno i globalni minimum, odnosno globalni maksimum. Jedine točke koje ne mogu biti obuhvaćene f'' – testom su rubne točke segmenta jer u njima zadana funkcija nema derivaciju. Stoga izračunajmo vrijednosti funkcije f u tim točkama:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8 + 6 = -2,$$
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2,$$

Prema tome:
- globalni minimum funkcije f jednak je -2 i postiže se u točkama $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$;
- globalni maksimum funkcije f jednak je 2 i postiže se u točkama $x_3 = -1$ i $x_4 = 2$.

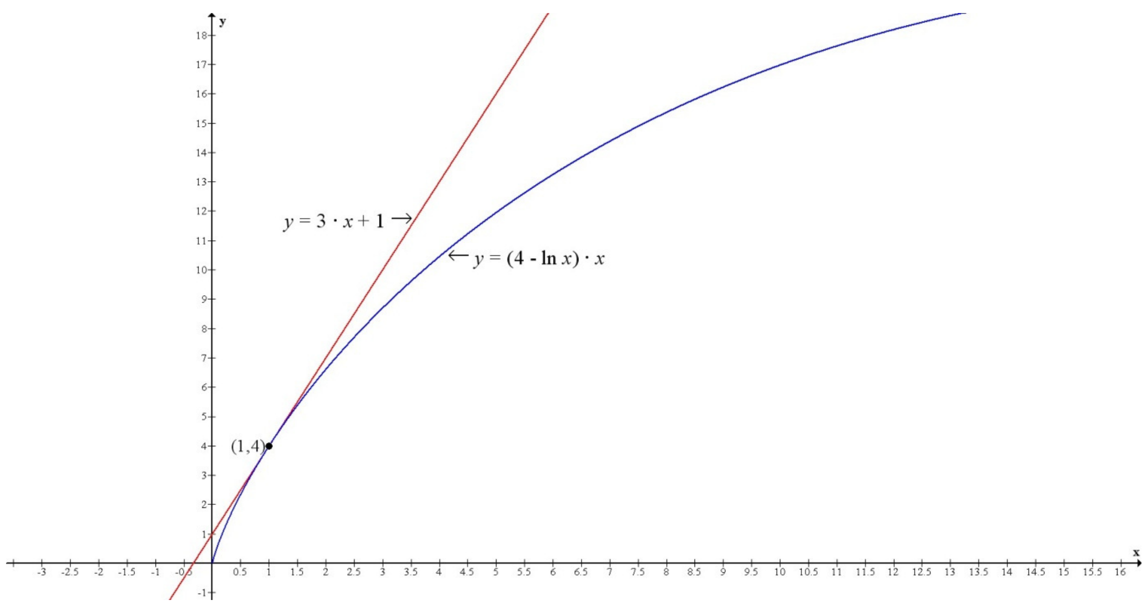
Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 2.



Slika 2.

3. Izračunajte duljinu odsječka koji na osi ordinata odsijeca tangenta povučena na ravninsku krivulju $y = (4 - \ln x) \cdot x$ u točki $T = (1, y_T)$ te krivulje.

Naputak i rezultat: Druga koordinata točke T je $y_T = (4 - \ln 1) \cdot 1 = 4$, pa je $T = (1, 4)$. Prva derivacija funkcije $f(x) = (4 - \ln x) \cdot x$ je $f'(x) = 3 - \ln x$. Stoga je koeficijent smjera tangente povučene na zadanu krivulju u točki T jednak $k = f'(1) = 3 - \ln 1 = 3$. Jednadžba pravca koji prolazi točkom $T = (1, 4)$ i ima koeficijent smjera $k = 3$ glasi $y = 3 \cdot x + 1$. Taj pravac siječe os ordinata u točki $T_1 = (0, 1)$. Stoga je tražena duljina $n = 1$. (Vidjeti Sliku 3.)



Slika 3.

4. Od stakla treba napraviti čašu obujma 2 dl u obliku uspravnoga kružnoga valjka otvorenoga s jedne strane. Odredite dimenzije čaše (iskazane u cm s točnošću od 10^{-1}) tako da se za njezinu izradbu utroši što manje stakla. (*Napomena*: 1 litra = 1 dm^3.) Debljinu stijenke čaše zanemarujemo.

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke čaše, a s h njezinu visinu. Obujam čaše jednak je obujmu valjka kojemu je polumjer osnovke r, a visina h. (To što čaša nema jednu osnovku ne utječe na vrijednost njezina obujma, ali utječe na vrijednost njezina oplošja.) Obujam valjka kojemu je polumjer osnovke r, a visina h jednak je V = površina osnovke · visina = $(r^2 \cdot \pi) \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$. Prema uvjetu zadatka, obujam čaše treba biti jednak 2 dl = 2 · 0.1 litara = 2 · 0.1 dm^3 = 2 · 0.1 · 1000 cm^3 = 200 cm^3, pa slijedi

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 200,$$

a odavde je

$$h = \frac{200}{r^2 \cdot \pi}.$$

Od stakla koje će biti potrošeno prave se osnovka čaše i plašt čaše. Površina osnovke čaše je $B = r^2 \cdot \pi$, dok je površina plašta čaše $P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ (kad se plašt čaše razvije u ravninu, kao i kod svakoga uspravnog valjka, dobije se pravokutnik kojemu je duljina jedne stranice jednaka opsegu osnovke, a duljina druge stranice jednaka visini valjka). Stoga je ukupna površina (oplošje) čaše

$$O = B + P = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h.$$

U ovu jednakost uvrstimo $h = \frac{200}{r^2 \cdot \pi}$, pa dobijemo:

$$O = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{200}{r^2 \cdot \pi} = r^2 \cdot \pi + \frac{400}{r}.$$

Stoga se zadatak svodi na nalaženje vrijednosti varijable r za koju je vrijednost oplošja najmanja. To znači da treba odrediti vrijednost varijable r tako da vrijednost funkcije

$$f(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{400}{r}$$

bude najmanja. Pritom prirodno pretpostavljamo da je domena funkcije f skup $\langle 0, +\infty \rangle$, tj. da duljina polumjera osnovke može biti bilo koji strogo pozitivan realan broj. (Nisu nam potrebni dodatni „jači“ uvjeti na vrijednost polumjera r.) Taj minimum određujemo uobičajenim postupkom:

<u>Korak 1.</u> Odredimo prvu derivaciju funkcije f po varijabli r:

$$f'(r) = 2 \cdot r \cdot \pi - \frac{400}{r^2}.$$

<u>Korak 2.</u> Riješimo jednadžbu $f'(r) = 0$:

$$\begin{aligned}
&f'(r) = 0 \\
&2 \cdot r \cdot \pi - \frac{400}{r^2} = 0 \quad / \cdot \frac{r^2}{2} \\
&r^3 \cdot \pi - 200 = 0 \\
&r^3 = \frac{200}{\pi} \\
&r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 4 \text{ cm}
\end{aligned}$$

<u>Korak 3.</u> Odredimo drugu derivaciju funkcije f po varijabli r:

$$f''(r) = [f'(r)]' = \left(2 \cdot r \cdot \pi - \frac{400}{r^2}\right)' = 2 \cdot \pi + \frac{800}{r^3}$$

Korak 4. Zbog prirodne pretpostavke $r \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi $f''(r) > 0$ jer su i prvi i drugi pribrojnik u gornjem izrazu očito strogo pozitivni brojevi. Stoga je vrijednost druge derivacije funkcije f za $r = 4$ strogo pozitivan realan broj, pa ta funkcija u $r = 4$ ima lokalni minimum.

Korak 5. Preostaje izračunati visinu čaše za $r = 4$:

$$h = \frac{200}{r^2 \cdot \pi} = \frac{200}{4^2 \cdot \pi} \approx 4 \text{ cm}.$$

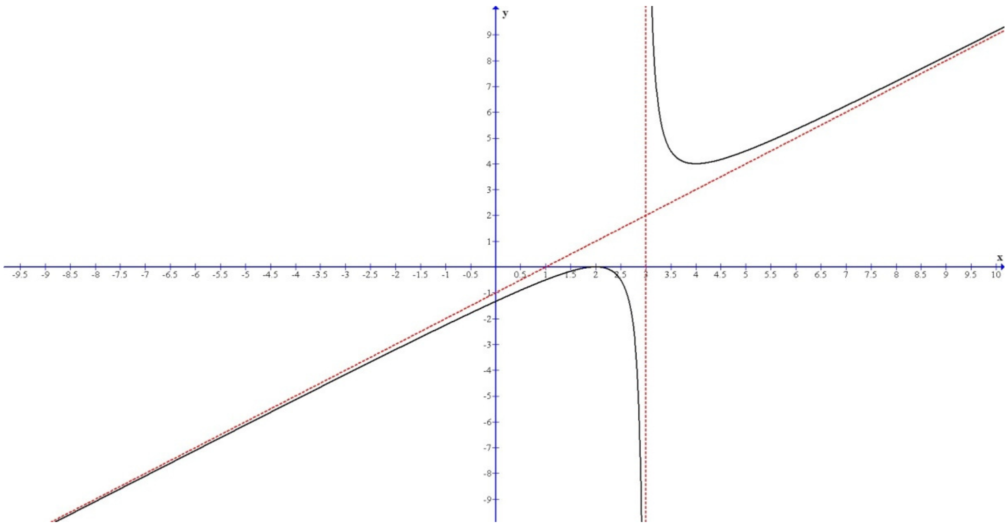
(*Napomena*: Uvrštavanjem $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ u izraz za h dobije se $h = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$, pa možemo zaključiti da duljina polumjera osnovke i duljina visine čaše moraju biti jednaki.) Stoga je rješenje zadatka

$$r = h = 4 \text{ cm}.$$

5. Ispitajte tijek i konstruirajte graf realne funkcije f definirane propisom

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3}.$$

Rezultat: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $N_f = \{2\}$, nije niti parna niti neparna niti periodična, lokalni minimum 4 za $x = 4$, lokalni maksimum 0 za $x = 2$, intervali rasta: $\langle -\infty, 2\rangle$ i $\langle 4, +\infty\rangle$, intervali pada: $\langle 2, 3\rangle$ i $\langle 3, 4\rangle$, nema prijevojnih točaka, interval konveksnosti: $\langle 3, +\infty\rangle$, interval konkavnosti: $\langle -\infty, 3\rangle$, asimptote: $x = 3$ i $y = x + 1$. Graf funkcije f prikazan je na Slici 4. (Crveno iscrtkani pravci su asimptote.)



Slika 4.

2. OGLEDNI PRIMJER 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 1

1. Odredite vrijednosti parametara a, $b \in \mathbf{R}$ tako da realna funkcija f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} a + \dfrac{\sin^2(2 \cdot x)}{4 \cdot x^2}, \text{ za } x < 0; \\ x + 1, \text{ za } 0 \leq x \leq 1; \\ \dfrac{3 \cdot \ln x}{x^3 - 1} + b, \text{ za } x > 1; \end{cases}$$

bude neprekidna na skupu **R**. (Ne trebate provjeravati je li skup **R** domena funkcije f.)

<u>Rješenje</u>: „Kritične“ točke su $x = 0$ i $x = 1$. Za $x = 0$ limes slijeva, limes zdesna i vrijednost $f(0)$ jednaki su:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left[a+\frac{\sin^2(2\cdot x)}{4\cdot x^2}\right] = \lim_{x\to 0-} a + \lim_{x\to 0-}\frac{\sin^2(2\cdot x)}{2^2\cdot x^2} = a + \lim_{x\to 0-}\left[\frac{\sin(2\cdot x)}{2\cdot x}\right]^2 = a + \left[\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(2\cdot x)}{2\cdot x}\right]^2 =$$

$$\left\{\frac{0}{0}\right\} = a + \left[\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{\cos(2\cdot x)}\cdot 2}{2}\right]^2 = a + \left[\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\cos(2\cdot x)}\right]^2 = a + \left[\frac{1}{\cos(2\cdot 0)}\right]^2 = a + \frac{1}{1} = a+1$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x+1) = 0+1 = 1$$

$$f(0) = 0+1 = 1$$

Zbog zahtjeva za neprekidnost funkcije f na skupu $\mathbf{R}$, dobivene tri vrijednosti trebaju biti jednake. Stoga mora vrijediti jednakost:

$$a + 1 = 1 = 1,$$

odnosno

$$a + 1 = 1.$$

Odatle je $a = 0$. Analogno, za $x = 1$ limes slijeva, limes zdesna i vrijednost $f(1)$ jednaki su:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(x+1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{3\cdot\ln x}{x^3-1}+b\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{3\cdot\ln x}{x^3-1}\right) + \lim_{x\to 1+} b = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{3\cdot\frac{1}{x}}{3\cdot x^2}\right) + \lim_{x\to 1+} b = \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x^3} + \lim_{x\to 1+} b = \frac{1}{1^3} + b = 1+b$$

$$f(1) = 1+1 = 2$$

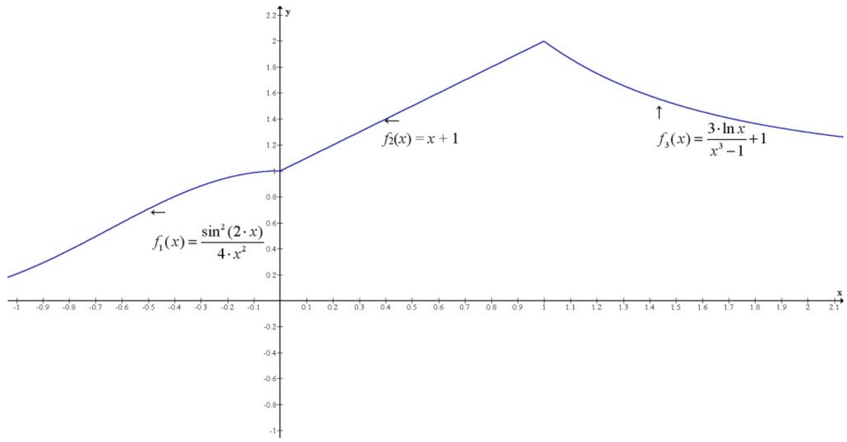
Stoga mora vrijediti jednakost:

$$2 = 1 + b = 2,$$

odnosno

$$1 + b = 2.$$

Odavde je $b = 1$. Dakle, traženi brojevi su $a = 0$ i $b = 1$. (Vidjeti Sliku 5.)

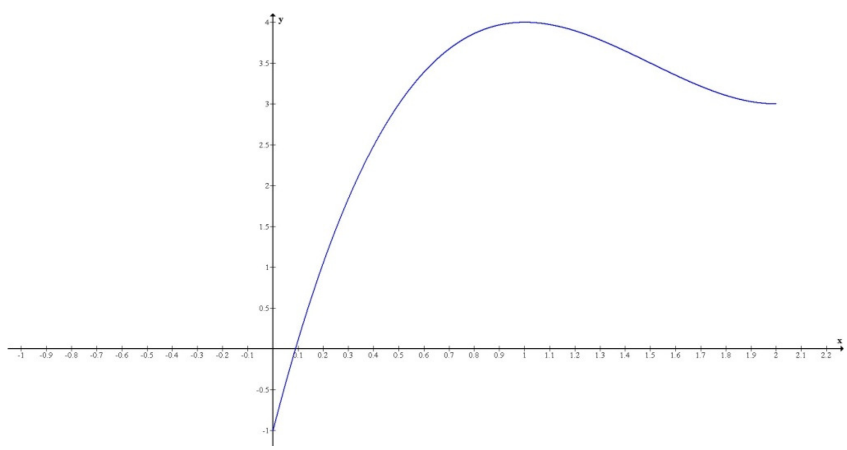


Slika 5.

2. Odredite globalne ekstreme funkcije $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ definirane propisom

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 1.$$

<u>Naputak i rezultat</u>: $f'(x) = 6 \cdot (x^2 - 3 \cdot x + 2)$, pa iz $f'(x) = 0$ slijedi $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Budući da je $f(0) = -1$, $f(1) = 4$ i $f(2) = 3$, zaključujemo da je globalni minimum funkcije f jednak -1 i postiže se za $x = 0$, dok je globalni maksimum funkcije f jednak 4 i postiže se za $x = 1$. (Vidjeti Sliku 6.)



Slika 6.

3. U točki $T = (4,\ y < 0)$ krivulje $y^2 - x^2 = 9$ povučena je normala na hiperbolu. Odredite površinu trokuta kojega ta normala zatvara s objema koordinatnim osima.

<u>Rješenje</u>: Odredimo nepoznatu koordinatu točke T. U jednadžbu krivulje uvrstimo $x = 4$. Dobivamo:

$$y^2 - 4^2 = 9,$$

odnosno

$$y^2 = 25.$$

Zbog zahtjeva $y < 0$, jedino strogo negativno rješenje gornje kvadratne jednadžbe je $y = -5$. Dakle, $T = (4, -5)$. Nadalje, deriviramo li jednadžbu krivulje kao implicitno zadanu funkciju, dobijemo:

$$2 \cdot y \cdot y' - 2 \cdot x = 0,$$

a odavde je

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Stoga je koeficijent smjera normale povučene na zadanu krivulju u *bilo kojoj* točki krivulje jednak

$$k_n = -\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}.$$

Konkretno, koeficijent smjera normale povučene na zadanu krivulju u točki T jednak je

$$k_n = -\frac{y_T}{x_T} = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4}.$$

Odredimo jednadžbu normale kao jednadžbu pravca kroz točku T s koeficijentom smjera k_n :

$$\begin{aligned}
y - y_T &= k_n \cdot (x - x_T) \\
y - (-5) &= \frac{5}{4} \cdot (x - 4) \\
y &= \frac{5}{4} \cdot x - 10
\end{aligned}$$

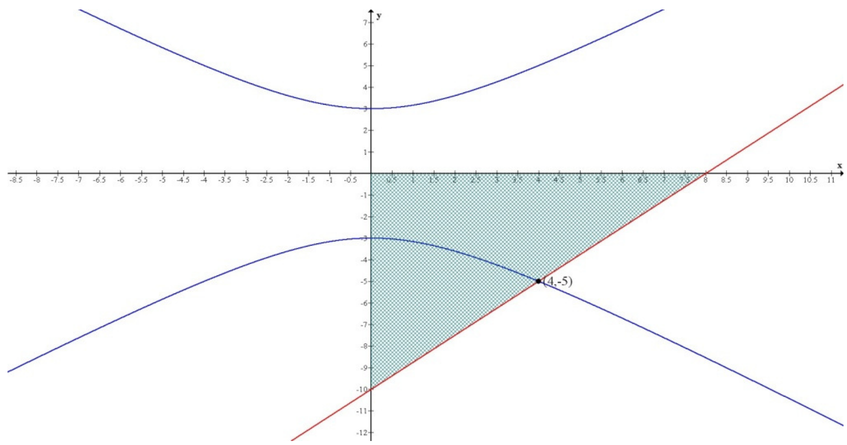
Dobivenu jednadžbu zapišimo u segmentnom obliku:

$$\begin{aligned}
&y = \frac{5}{4} \cdot x - 10 \\
&4 \cdot y = 5 \cdot x - 40 \\
&-5 \cdot x + 4 \cdot y = -40 \\
&\frac{-5 \cdot x}{-40} + \frac{4 \cdot y}{-40} = 1 \\
&\frac{x}{8} + \frac{y}{-10} = 1
\end{aligned}$$

Iz posljednje jednadžbe očitamo duljinu odsječka na osi Ox: $|m| = |8| = 8$, te duljinu odsječka na osi Oy: $|n| = |-10| = 10$. Prema tome, tražena površina jednaka je

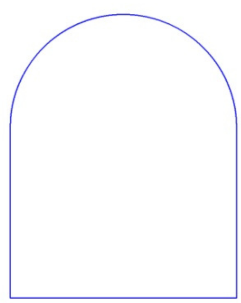
$$P = \frac{1}{2} \cdot |m| \cdot |n| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40 \text{ kv.jed.}$$

(vidjeti Sliku 7.)



Slika 7.

4. Od drvene grede dugačke 10 metara treba napraviti okvir prozora u obliku pravokutnika s polukrugom iznad jedne stranice (vidjeti Sliku 8.) tako da prozor propušta što više svjetla. Odredite optimalne dimenzije prozora (iskazane u metrima s točnošću od 10^{-3}) i izračunajte pripadnu optimalnu površinu prozora (iskazanu u m^2 s točnošću od 10^{-2}).



Slika 8.

Rješenje: Neka su a i b stranice pravokutnika. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \geq b >$ > 0. Da bi prozor propuštao što više svjetla, polukrug treba konstruirati iznad veće stranice pravokutnika, tj. iznad stranice a, pa će promjer polukruga biti jednak upravo a. Opseg prozora jednak je zbroju opsega pravokutnoga dijela prozora i duljine polukružnice koja određuje polukrug:

$$O = (a + 2 \cdot b) + \frac{1}{2} \cdot (a \cdot \pi) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \cdot a + 2 \cdot b.$$

Prema uvjetu zadatka, opseg prozora mora biti jednak duljini grede:

$$\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \cdot a + 2 \cdot b = 10.$$

Odavde je

$$b = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right) \cdot a .$$

Prozor će propuštati najveću količinu svjetla kad površina prozora bude najveća (s obzirom na sve navedene uvjete). Površina prozora jednaka je zbroju površine pravokutnika čije su stranice a i b i površine polukruga čiji je promjer a:

$$P = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi .$$

U ovu jednakost uvrstimo $b = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right) \cdot a$, pa dobijemo:

$$P = a \cdot \left[5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right) \cdot a\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi$$
$$P = \left(-\frac{\pi+4}{8}\right) \cdot a^2 + 5 \cdot a$$

Dakle, tražimo vrijednost varijable a za koju je vrijednost funkcije f definirane s

$$f(a) = \left(-\frac{\pi+4}{8}\right) \cdot a^2 + 5 \cdot a$$

najveća. Tu vrijednost odredimo uobičajenim postupkom:

<u>Korak 1.</u> Odredimo prvu derivaciju funkcije f po varijabli a:

$$f'(a) = \left(-\frac{\pi+4}{8}\right) \cdot 2 \cdot a + 5 \cdot 1$$
$$f'(a) = -\left(-\frac{\pi+4}{4}\right) \cdot a + 5$$

<u>Korak 2.</u> Riješimo jednadžbu $f'(a) = 0$ po nepoznanici a:

$$f'(a) = 0$$
$$\left(-\frac{\pi+4}{4}\right) \cdot a + 5 = 0$$
$$a = \frac{20}{\pi+4} \approx 2.8$$

Korak 3. Odredimo drugu derivaciju funkcije f po varijabli a:

$$f''(a) = \left[f'(a)\right]' = \left[\left(-\frac{\pi+4}{4}\right) \cdot a + 5\right]' = -\frac{\pi+4}{4}.$$

Korak 4. Očito je $f''(a) < 0$ za svaki $a > 0$ (štoviše, za svaki $a \in \mathbf{R}$, ali ta činjenica nam ovdje nije potrebna), pa zaključujemo da je vrijednost druge derivacije funkcije f za $a = 2.8$ strogo manja od nule. To znači da funkcija f postiže lokalni maksimum za $a = 2.8$. Budući da za svaku kvadratnu funkciju vrijedi ekvivalencija lokalnoga i globalnoga maksimuma (svaki lokalni maksimum kvadratne funkcije je ujedno i globalni maksimum i obrnuto, svaki globalni maksimum kvadratne funkcije ujedno je i lokalni maksimum), zaključujemo da za $a = 2.8$ funkcija f postiže svoj globalni maksimum.

Korak 5. Preostaje odrediti visinu prozora b:

$$b = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right) \cdot a = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right) \cdot \frac{20}{\pi+4} = 5 \cdot \left(1 - \frac{\pi+2}{\pi+4}\right) = \frac{10}{\pi+4} \approx 1.4\,.$$

Prema tome, tražene dimenzije prozora su $a = 2.8$ m i $b = 1.4$ m. Ukupna najveća površina prozora jednaka je $P = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{20}{\pi+4} \cdot \frac{10}{\pi+4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{\pi+4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{200 + 50 \cdot \pi}{(\pi+4)^2} = \frac{50 \cdot (4+\pi)}{(\pi+4)^2} = \frac{50}{\pi+4} \approx 7 \text{ m}^2$.

5. Ispitajte tijek i nacrtajte graf realne funkcije f definirane propisom

$$f(x) = -\frac{\ln(-x)}{x}.$$

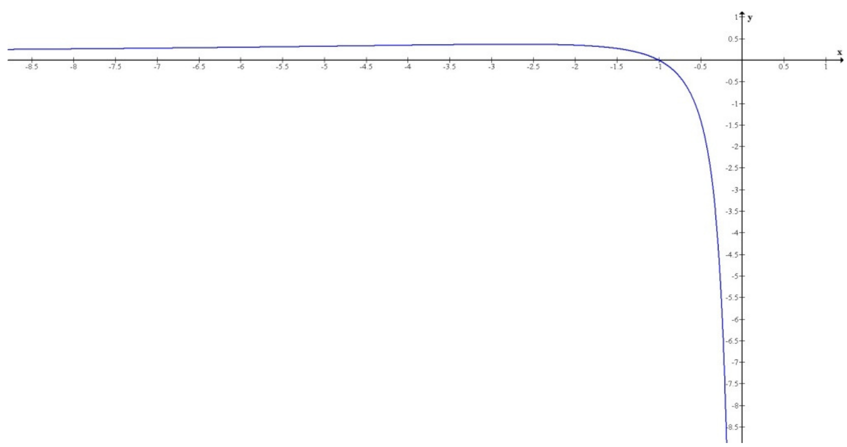
Rješenje: Uvjeti na vrijednost varijable x su: $-x > 0$ i $x \neq 0$. Odatle slijedi $x < 0$, pa je prirodno područje definicije (domena) zadane funkcije $D_f = \langle -\infty, 0\rangle$. Odatle slijedi da f nije niti parna niti neparna niti periodična jer za svaki $x < 0$ broj $-x$ ne pripada skupu D_f (a mora pripadati želimo li da f bude parna ili neparna). Sve nultočke zadane funkcije dobiju se iz jednadžbe $-\ln(-x) = 0$, otkuda je $x = -1$. Dakle, $N_f = \{-1\}$. Nadalje je

$$f'(x) = \frac{\ln(-x) - 1}{x^2},$$
$$f''(x) = \frac{3 - 2 \cdot \ln(-x)}{x^3},$$

Iz $f'(x) = 0$ slijedi $\ln(-x) - 1 = 0$, odnosno $\ln(-x) = 1$, a odavde je $x = e$. Analogno, iz $f''(x) = 0$ slijedi $3 - 2 \cdot \ln(-x) = 0$, odnosno $\ln(-x) = \frac{3}{2}$, a odavde je $x = -e^{\frac{3}{2}} = -e \cdot \sqrt{e}$. Sada zaključujemo:

- f ima globalni maksimum $\frac{1}{e}$ za $x = -e$ jer je $f''(-e) < 0$;
- f raste na intervalu $\langle -\infty, -e \rangle$;
- f pada na intervalu $\langle -e, 0 \rangle$;
- f je konveksna na intervalu $\left\langle -\infty, -e \cdot \sqrt{e} \right\rangle$ jer je npr. $f''(-e^2) > 0$;
- f je konkavna na intervalu $\left\langle -e \cdot \sqrt{e},\ 0 \right\rangle$ jer je npr. $f''(-e) < 0$;
- f ima prijevojnu točku $T = \left(-e \cdot \sqrt{e}, f\left(-e \cdot \sqrt{e}\right)\right) = \left(-e \cdot \sqrt{e},\ \frac{3 \cdot \sqrt{e}}{2 \cdot e^2}\right)$.

Nije teško provjeriti da je okomita asimptota grafa zadane funkcije $x = 0$ (os Oy) i da je vodoravna (horizontalna) asimptota grafa zadane funkcije $y = 0$ (os Ox). Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 9.



Slika 9.

6. Ispitajte tijek i nacrtajte graf realne funkcije f definirane propisom

$$f(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

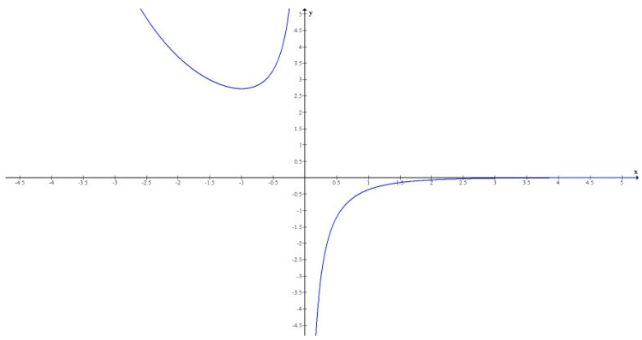
Rezultat: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $N_f = \emptyset$ (nema nultočaka), nije niti parna niti neparna niti periodična. Budući da vrijedi:

$$f'(x) = \frac{(x+1) \cdot e^{-x}}{x^2};$$
$$f''(x) = -\frac{(x^2 + 2 \cdot x + 2) \cdot e^{-x}}{x^3},$$

slijedi:

- lokalni minimum e za $x = -1$,
- intervali rasta: $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$,
- interval pada: $\langle -\infty, -1\rangle$,
- interval konveksnosti: $\langle -\infty, 0\rangle$,
- interval konkavnosti: $\langle 0, +\infty\rangle$,
- nema prijevojnih točaka,

Asimptote su: $x = 0$ (okomita) i $y = 0$ (horizontalna). Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 10.



Slika 10.

7. Ispitajte tijek i nacrtajte graf realne funkcije f definirane propisom

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\ln(-x)}.$$

Rezultat: $D_f = \langle -\infty, 0\rangle \backslash \{-1\}$, $N_f = \varnothing$, nije niti parna niti neparna niti periodična. Budući da je

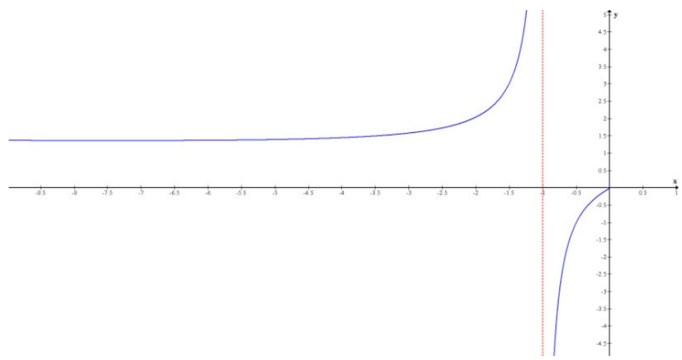
$$f'(x) = \frac{[2-\ln(-x)]\cdot\sqrt{-x}}{2\cdot x\cdot\ln^2(-x)};$$

$$f''(x) = \frac{\left[8-\ln^2(-x)\right]\cdot\sqrt{-x}}{4\cdot x^2\cdot\ln^3(-x)},$$

slijedi:

- lokalni minimum $\frac{e}{2}$ za $x = -e^2$,
- intervali rasta: $\langle -e^2, -1\rangle$ i $\langle -1, 0\rangle$,
- interval pada: $\langle -\infty, -e^2\rangle$,
- prijevojne točke: $T_1 = \left(-e^{2\cdot\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{2}}}{4}\right)$ i $T_2 = \left(-e^{-2\cdot\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{4\cdot e^{\sqrt{2}}}\right)$,
- intervali konveksnosti: $\left\langle -e^{2\cdot\sqrt{2}},\ -1\right\rangle$ i $\left\langle -1,\ -e^{-2\cdot\sqrt{2}}\right\rangle$,
- intervali konkavnosti: $\left\langle -\infty, -e^{2\cdot\sqrt{2}}\right\rangle$ i $\left\langle -e^{-2\cdot\sqrt{2}},\ 0\right\rangle$.

Jedina asimptota: $x = -1$ ($x = 0$, tj. os Oy nije asimptota jer je $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$). Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 11.



Slika 11.

3. OGLEDNI PRIMJER 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 1

1. Odredite vrijednosti parametara a, $b \in$ **R** tako da realna funkcija f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot \ln(-x)}{x+1}, \text{ za } x < 1; \\ a \cdot x + b, \text{ za } -1 \le x \le 1; \\ \dfrac{1 - e^{1-x}}{x-1}, \text{ za } x > 1; \end{cases}$$

bude neprekidna na skupu **R**. (Ne trebate provjeravati je li skup **R** domena funkcije f.)

Rezultat: $a = 2$, $b = 0$.

2. Nađite sve globalne ekstreme funkcije $f : [-1, 1] \to$ **R** definirane propisom $f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$.

Rezultat: Globalni minimum jednak je 0 i postiže se za $x = 0$. Globalni maksimum jednak je 5 i postiže se za $x = 1$.

3. Izračunajte duljinu odsječka koji na osi ordinata odsijeca tangenta povučena na ravninsku krivulju $y = (1 - \ln x) \cdot x$ u točki $T = (1, y_T)$ te krivulje.

Rezultat: $|n| = 1$.

MATEMATIKA 1

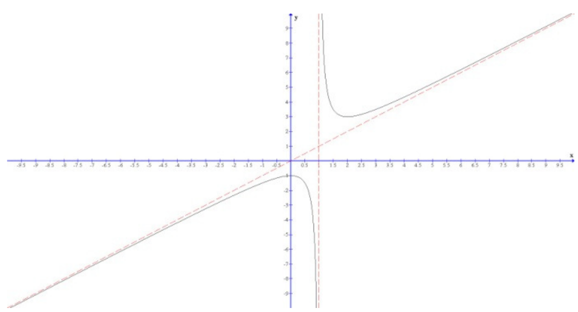
pripremni kolokvijski zadatci namijenjeni rješavanju na demonstraturama

4. Od lima treba napraviti 5-litarsku posudu u obliku uspravnoga kružnoga valjka otvorenoga s jedne strane. Odredite dimenzije (iskazane u cm) posude tako da se za njezinu izradbu utroši što manje lima.

Rezultat: $r = h = \sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}} \approx 11.68$ cm

5. Ispitajte tijek i konstruirajte graf realne funkcije $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Rezultat: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $N_f = \varnothing$, lokalni minimum -1 u točki $x = 0$, lokalni maksimum 3 u točki $x = 2$, intervali rasta: $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 2, +\infty\rangle$, intervali pada: $\langle 0, 1\rangle$ i $\langle 1, 2\rangle$, točaka infleksije nema, interval konveksnosti: $\langle 1, +\infty\rangle$, interval konkavnosti: $\langle -\infty, 1\rangle$, asimptote: $x = 1$ i $y = x$. Graf funkcije f prikazan je na Slici 12. (Crveno iscrtkani pravci su asimptote.)



Slika 12.