1. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definirane pravilom $f(x) = x^3 - 3 \cdot x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

2. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definirane pravilom $g(y) = y \cdot (y-3)^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

3. Odredite domenu, intervale monotonosti i sve lokalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

b) $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$;

c) $h(u) = \dfrac{2 \cdot u}{e^{2 \cdot u}}$;

d) $p : [0,\ 2 \cdot \pi] \to \mathbb{R},\ \ p(v) = \sin v + \cos v$.

4. Koji od lokalnih ekstrema dobivenih u 3. zadatku su ujedno i globalni ekstremi? Obrazložite svoj odgovor.

5. Pravokutno gradilište površine 1 ha treba ograditi tako da se za ograđivanje potroši najmanje materijala. Odredite optimalne dimenzije gradilišta i izrazite ih u metrima. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite. (*Napomena*: 1 ha = 10 000 m^2.)

6. Izračunajte sljedeće granične vrijednosti primjenom L'Hôpital-Bernoullijeva pravila:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \cdot (x - \operatorname{arctg} x)}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{2 \cdot (e^{\cos y} - e)}{\sin^2 y}$;

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 + t + 1}{e^t}$;

d) $\lim\limits_{w \to -\infty} \dfrac{e^{2 \cdot w}}{w^3 - w^2 + w - 1}$.

7. Odredite intervale konveksnosti, intervale konkavnosti, prijevojne točke i asimptote na graf sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$,

b) $g(t) = \dfrac{6 \cdot \ln t}{5 \cdot t^2}$;

c) $h(y) = e^{-2 \cdot y^2}$.

REZULTATI ZADATAKA

1. Globalni minimum funkcije f jednak je -2 i postiže se za $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$.
Globalni maksimum funkcije f jednak je 2 i postiže se za $x_3 = -1$ i $x_4 = 2$.

2. Globalni minimum funkcije g jednak je 0 i postiže se za $y_1 = 0$ i $y_2 = 3$.
Globalni maksimum funkcije g jednak je 4 i postiže se za $y_3 = 1$.

3.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, intervali rasta: $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, intervali pada $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1 = (1, 2)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2 = (-1, -2)$;

b) $D_g = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty\rangle$, interval rasta: $\langle 0, \sqrt{e}\rangle$, interval pada: $\langle \sqrt{e}, +\infty\rangle$,
točka lokalnoga maksimuma: $T = \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2\cdot e}\right)$;

c) $D_h = \mathbb{R}$, interval rasta: $\left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$, interval pada: $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$,
točka lokalnoga maksimuma: $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$;

d) $D_p = [0, 2\cdot\pi]$, intervali rasta: $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{5}{4}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right\rangle$, interval pada: $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\cdot\pi\right\rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1 = \left(\frac{5}{4}\cdot\pi, -\sqrt{2}\right)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

4. Globalni ekstremi su lokalni ekstremi dobiveni u podzadacima **b**), **c**) i **d**). Lokalni ekstremi dobiveni u **a**) podzadatku nisu globalni ekstremi.

5. $(x^*, y^*) = (100, 100)$, tj. gradilište treba biti kvadrat stranice 100 metara.

6.

a) $L = 1$;
b) $L = -e$;
c) $L = 0$;
d) $L = 0$.

7. **a)** Intervali konveksnosti: $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, interval konkavnosti: $\langle 0, 1\rangle$, prijevojna točka: $(1, 0)$, jedina asimptota: $x = 0$.

b) Interval konveksnosti: $\left\langle \sqrt[6]{e^5}, +\infty\right\rangle$, interval konkavnosti: $\left\langle 0, \sqrt[6]{e^5}\right\rangle$, prijevojna točka: $T = \left(\sqrt[6]{e^5}, e^{-\frac{5}{3}}\right)$, uspravna asimptota: os ordinata, desna vodoravna asimptota: os apscisa.

c) Intervali konveksnosti: $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$, interval konkavnosti: $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$, prijevojne točke: $T_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ i $T_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, jedina asimptota: os apscisa.