TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE **KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE**	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za grupne konzultacije 5.7.2016.**

1. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 1 \right\}$.

2. Zadana je realna funkcija $g(y) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{y-1} - 1\right)$. Izračunajte $\lim\limits_{y \to 0} g^{-1}(y)$.

3. Zapišite funkciju $h(t) = \left(\sqrt{3}+1\right) \cdot \cos t - \left(\sqrt{3}-1\right) \cdot \sin t$ u obliku $h_1(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. (Standardno pretpostavite da su A, $\omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle -\pi, \pi \right]$.)

4. Krivulja K zadana je parametarski s $\begin{cases} x = 2 \cdot \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t} \end{cases}$. U točki određenoj parametrom $t = \frac{7}{4} \cdot \pi$ povučene su tangenta i normala na krivulju K. Izračunajte površinu lika kojega ti pravci zatvaraju s objema koordinatnim osima.

5. Odredite sve točke lokalnih ekstrema i sve asimptote na graf funkcije $f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}-1}$.

REZULTATI ZADATAKA

1. Pravac $y = x$.
2. $L = 1$.
3. $h_1(t) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(t + \frac{7}{12} \cdot \pi\right)$.
4. $P = 4$ kv. jed.
5. Točka lokalnoga minimuma: $T = (1, 4)$, asimptote: $x = 0$ i $y = \frac{4}{e} \cdot x + \frac{4}{e}$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Pretpostavimo da je $z = x + y \cdot i$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $\overline{z} = x - y \cdot i$. Stoga je:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{x + y\cdot i}{x - y \cdot i}\right) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{x + y\cdot i}{x - y \cdot i} \cdot \frac{x + y\cdot i}{x + y \cdot i}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{(x + y \cdot i)^2}{x^2 - y^2 \cdot i^2}\right] = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left[\frac{x^2 + 2\cdot x \cdot y \cdot i + y^2 \cdot i^2}{x^2 - y^2 \cdot i^2}\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{x^2 + 2\cdot x\cdot y\cdot i + y^2 \cdot (-1)}{x^2 - y^2 \cdot (-1)}\right] = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{x^2 + 2\cdot x \cdot y \cdot i - y^2}{x^2 + y^2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2\cdot x \cdot y}{x^2 + y^2}\cdot i\right) = 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x \cdot y + y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Posljednjom je jednakošću zadana simetrala I. i III. kvadranta Gaussove ravnine.

2. Odredimo $g^{-1}(y) = \dfrac{\operatorname{ctg}(2\cdot y) + 2}{\operatorname{ctg}(2 \cdot y) + 1}$.

Stoga je tražena granična vrijednost $L = \lim\limits_{y \to '} g^{-1}(y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cos(2\cdot y) + 2 \cdot \sin(2\cdot y)}{\cos(2 \cdot y) + \sin(2\cdot y)} = \dfrac{1 + 2\cdot 0}{1 + 0} = 1.$

3. Amplituda funkcije h_1 jednaka je:

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left[-\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2} = \sqrt{1^2 + 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3+1+3} =$$

$$= \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}$$

Kružna frekvencija te funkcije jednaka je $\omega = 1$.

Fazni pomak funkcije h_1 odredimo iz sustava $\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\cdot\sqrt{2}} \end{cases}$. Odatle je $\varphi = \dfrac{7}{12}\cdot\pi$.

Stoga je $h_1(t) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(t + \dfrac{7}{12}\cdot\pi\right)$.

4. Parametar $t = \dfrac{7}{4}\cdot\pi$ određuje točku $T = (-2, 2)$.

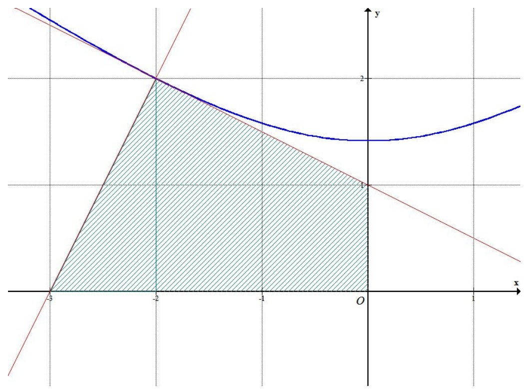
Koeficijent smjera povučene tangente jednak je $k_t = \left(\dfrac{y'}{x'}\right)_{t=\frac{7}{4}\cdot\pi} = \dfrac{\sin\left(\frac{7}{4}\cdot\pi\right)}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$.

Jednadžba te tangente je $t \ldots\ y = -\dfrac{1}{2}\cdot x + 1$, odnosno u segmentnom obliku $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} = 1$.

Koeficijent smjera pripadne normale je $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Jednadžba te normale je

$n ... \, y = 2 \cdot x + 6$, odnosno u segmentnom obliku $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$.

Nacrtamo te pravce u istom pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobijemo Sliku 1.



Slika 1.

Stoga je $P = \frac{1}{2} \cdot |-3-(-2)| \cdot |2| + \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2 = 4$ kv. jed.

5. Primijetimo da je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Deriviranjem dobivamo: $f^{'}(x) = \frac{4 \cdot (x-1)}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}-1}$.

Iz jednadžbe $f^{'}(x) = 0$ slijedi $x = 1$. Lako se provjeri da je npr. $f^{'}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ i $f^{'}(2) > 0$. Stoga za $x = 1$ f ima lokalni minimum $f(1) = 4$, tj. točka lokalnoga minimuma je $T = (1,\ 4)$.

„Kandidat" za uspravnu asimptotu je pravac $x = 0$. Budući da je $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, taj pravac je uspravna asimptota.

Preostaje odrediti ima li graf funkcije f kosu asimptotu. Imamo:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(4 \cdot e^{\frac{1}{x}-1} \right) = 4 \cdot e^{0-1} = \frac{4}{e},$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(4 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}-1} - \frac{4}{e} \cdot x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x \cdot \left(4 \cdot e^{\frac{1}{x}-1} - \frac{4}{e} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 \cdot e^{\frac{1}{x}-1} - \frac{4}{e}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot 4 \cdot e^{\frac{1}{x}-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(4 \cdot e^{\frac{1}{x}-1} \right) = 4 \cdot e^{0-1} = \frac{4}{e}.$$

Dakle, obostrana kosa asimptota je pravac $y = \frac{4}{e} \cdot x + \frac{4}{e}$.