Taylorov red

Zadatak. Funkciju $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ razviti u Taylorov red oko točke π.

Rješenje. Kako je zadana funkcija kompozicija elementarnih funkcija, njezine se derivacije vrlo brzo počinju drastično komplicirati. Kako bismo to izbjegli, uočimo sljedeće:

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}.$$

Suma kvadrata sinusa i kosinusa s istim argumentom je jednaka 1, dok je srednji član u posljednjem izrazu sinus dvostrukog kuta. Prema tome dobivamo

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x,$$

pa upotrebom drugog korijena slijedi

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}.$$

Time smo zadanu funkciju zamijenili zbrojem sinusa i kosinusa kojeg je puno lakše derivirati. Odredimo prvih nekoliko derivacija:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right),$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2^2}\left(-\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right), \quad f^{(3)}(x) = \frac{1}{2^3}\left(-\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right),$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2^4}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right), \quad f^{(5)}(x) = \frac{1}{2^5}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right), \ldots$$

Primjećujemo da je potencija broja $1/2$ ispred zagrade jednaka stupnju derivacije, a da se izraz u zagradi počinje periodički ponavljati od četvrte derivacije. Uvrštavanjem zadanog broja π dobivamo

$$f^{(0)}(\pi) = 1 = \frac{1}{2^0}, f^{(1)}(\pi) = -\frac{1}{2^1}, f^{(2)}(x) = -\frac{1}{2^2}, f^{(3)}(x) = \frac{1}{2^3},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2^4}, f^{(5)}(x) = -\frac{1}{2^5}, \ldots$$

pa slijedi razvoj u Taylorov red početne funkcije:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} = 1 - \frac{1}{2}(x-\pi) - \frac{1}{2^2 2!}(x-\pi)^2 + \frac{1}{2^3 3!}(x-\pi)^3 + \frac{1}{2^4 4!}(x-\pi)^4 - \ldots$$

odnosno

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 - \frac{x-\pi}{2} - \frac{(x-\pi)^2}{16} + \frac{(x-\pi)^3}{48} + \frac{(x-\pi)^4}{384} - \ldots$$