TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

NEPRAVI INTEGRALI

ZADATCI:

Ispitajte konvergenciju sljedećih nepravih integrala i, ako konvergiraju, izračunajte ih:

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{6 \cdot dx}{9 \cdot x^2 + 1}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{10 \cdot dx}{25 \cdot x^2 + 1}$.

3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3 \cdot (x-1)}{(2 \cdot x)^2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx$.

4. $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{x-3}{3 \cdot \sqrt{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 \cdot dx$.

5. $\int\limits_{9}^{+\infty} \frac{x-9}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{3}{2 \cdot x}\right)^2 \cdot dx$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2 \cdot x} + 2 \cdot e^x + 2} \cdot dx$.

7. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\pi}{2 \cdot (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} \cdot dx$.

8. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4 \cdot \operatorname{arctg} x}{(2 \cdot \ln 2 + \pi) \cdot x^2} \cdot dx$.

9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4 \cdot \operatorname{arcctg} x}{(\pi - 2) \cdot x^3} \cdot dx$.

10. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\ln(2) \cdot (e^x + 1)}$.

11. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln 2}{x \cdot \ln^2 x} \cdot dx$.

12. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x - 2}$.

13. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^2} \cdot dx$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

14. $\int\limits_0^1 \frac{x-(x+1)\cdot\ln(x+1)}{[\ln(2)-1]\cdot(x^3+x^2)}\cdot dx$.

15. $\int\limits_0^1 \frac{e^x\cdot(x-1)+1}{(e-2)\cdot x^2}\cdot dx$.

REZULTATI ZADATAKA

1. Integral konvergira i jednak je π.
2. Integral konvergira i jednak je π.
3. Integral konvergira i jednak je 1.
4. Integral konvergira i jednak je 1.
5. Integral konvergira i jednak je 1.
6. Integral konvergira i jednak je $\operatorname{arctg}(2)-\frac{\pi}{4}$.
7. *Naputak*: Zamijenite $t = \operatorname{arctg} x$. Integral konvergira i jednak je 1.
8. *Naputak*: Djelomičnom integracijom dobije se:

$$\int\frac{4\cdot\operatorname{arctg} x}{x^2}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+\int\frac{4}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+4\cdot\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+$$

$$+4\cdot\int\frac{x^2+1}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx-4\cdot\int\frac{x^2}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+4\cdot\ln x-2\cdot\ln(x^2+1)=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+2\cdot\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)+C$$

Prijelazom na graničnu vrijednost (uz primjenu L'Hospitalova pravila) slijedi da polazni integral konvergira, te da je jednak 1.

9. *Naputak*: Djelomičnom integracijom dobije se:

$$\int\frac{\operatorname{arcctg} x}{x^3}\cdot dx=-\frac{\operatorname{arcctg} x}{2\cdot x^2}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2\cdot(x^2+1)}=-\frac{\operatorname{arcctg} x}{2\cdot x^2}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^2\cdot(x^2+1)}\cdot dx=-\frac{\operatorname{arcctg} x}{2\cdot x^2}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{\operatorname{arcctg} x}{2\cdot x^2}+\frac{1}{2\cdot x}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x$$

Prijelazom na graničnu vrijednost (uz primjenu L'Hospitalova pravila) slijedi da polazni integral konvergira, te da je jednak 1.

10. *Naputak*: $\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1}\cdot dx=\int 1\cdot dx-\int\frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx=x-\ln(e^x+1)+C$. Integral konvergira i jednak je 1.

11. *Naputak*: Zamijenite $t = \ln x$. Integral konvergira i jednak je 1.

12. *Naputak*: $\int\frac{dx}{e^x-2}=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot(2-e^x)+\frac{1}{2}\cdot e^x}{e^x-2}\cdot dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{e^x}{e^x-2}\cdot dx=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\ln(e^x-2)+C$. Polazni integral divergira.

13. *Naputak*: Zamijenite $t=\frac{\sin x}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

14. *Naputak*: Zamijenite $t=\frac{\ln(x+1)}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

15. *Naputak*: Zamijenite $t=\frac{e^x-1}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

<u>**Napomena:**</u> Neodređeni integrali u **14.** i **15.** zadatku mogu se odrediti i bez navedenih zamjena, ali postupak određivanja je bitno dulji negoli uz navedenu zamjenu.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REDOVI BROJEVA

ZADATCI:

Izračunajte zbrojeve sljedećih redova:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^{2\cdot n}\left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right)$.

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^{2\cdot n}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right)$.

5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tg}^{4\cdot n}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right)$.

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{ctg}^{4\cdot n}\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right)$.

7. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x$.

a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda bude jednak $\frac{2}{3}$.

c) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $4 - 2\sqrt{3}$.

8. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^n x$.

a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\frac{2}{3}$.

c) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $4 + 2\sqrt{3}$.

9. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tg}^{2\cdot n} x$.

a) Odredite sve $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite $x \in \left\langle \frac{\pi}{2},\ \pi \right\rangle$ za koji je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

c) Odredite $x \in \left\langle \pi,\ \frac{3}{2}\cdot\pi \right\rangle$ za koji je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\frac{3}{2}$.

10. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ctg}^{2\cdot n} x$.

a) Odredite sve $x \in \langle 0, \pi\rangle$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite sve $x \in \langle \pi, 2\cdot\pi\rangle$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $-\frac{1}{2}$.

c) Odredite sve $x \in \langle 2\cdot\pi, 3\cdot\pi\rangle$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\frac{3}{2}$.

Ispitajte konvergenciju sljedećih redova i precizno obrazložite sve svoje tvrdnje:

11. $\sum \frac{n+1}{3^n}$.

12. $\sum (-1)^{2\cdot n+1} \cdot \left(\frac{2\cdot n+1}{5^n}\right)$.

13. $\sum \frac{2\cdot n-1}{7^n}$.

14. $\sum (-1)^{2\cdot n-1} \cdot \left(\frac{n^2+2011}{2^n}\right)$

15. $\sum \frac{n^2+n}{2^n}$.

16. $\sum (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n^3+1}$.

17. $\sum \frac{n^3-1}{2^{2\cdot n}}$.

18. $\sum (-1)^{n-n^2} \cdot \left(\frac{n^3+n^2}{2^n}\right)$

19. $\sum \frac{1}{n!}$

20. $\sum (-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} \cdot \frac{2^n}{n!}$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n \cdot 2^{2 \cdot n}}$.

23. $\sum \frac{n \cdot 7^n}{2^{3 \cdot n}}$.

24. $\sum \frac{n \cdot 3^{2 \cdot n}}{2^{3 \cdot n}}$.

25. $\sum \frac{n^{n+1}}{(2 \cdot n + 1)^n}$.

26. $\sum \frac{2^{n^2}}{2011^n}$.

27. $\sum (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{2 \cdot n - 1} \right)^n$.

28. $\sum (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{2 \cdot n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^n$.

29. $\sum (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n+1}{2 \cdot n + 1} \right)^{3 \cdot n}$

30. $\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot n^2 + 2011 \cdot n + 2012}{n^2 - 2013 \cdot n + 2014} \right)^{2011 \cdot n}$.

31. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

32. $\sum \frac{n}{2 \cdot n - 1}$.

33. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2) \cdot (n+1)}$.

34. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n}$.

35. $\sum \frac{n}{n^2 + 2}$.

36. $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$.

37. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$.

38. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

39. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1+\ln n}{(n \cdot \ln n)^5}$.

40. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

REZULTATI ZADATAKA:

1. 2.

2. $\frac{3}{4}$.

3. 4.

4. $\frac{4}{5}$.

5. $\frac{9}{8}$.

6. $\frac{9}{10}$.

7. **a)** $S_1 = \{k \cdot \pi : k \in \mathbf{Z}\}$;

b) $S_2 = \left\{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot k \pm 1) : k \in \mathbf{Z}\right\}$;

c) $S_3 = \left\{\frac{\pi}{6} \cdot (12 \cdot k \pm 5) : k \in \mathbf{Z}\right\}$

8. **a)** $S_1 = \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\}$;

b) $S_2 = \left\{\frac{\pi}{6} \cdot (12 \cdot k + 1) : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} \cdot (12 \cdot k + 5) : k \in \mathbf{Z}\right\}$;

c) $S_3 = \left\{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot k + 2) : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6 \cdot k - 1) : k \in \mathbf{Z}\right\}$.

9. **a)** $S_1 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$;

b) $x = \frac{2}{3} \cdot \pi$;

c) $x = \frac{7}{6} \cdot \pi$.

10. **a)** $S = \left\langle 0, \ \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4} \cdot \pi, \ \pi\right\rangle$;

b) $x_1 = \frac{7}{6} \cdot \pi,\ x_2 = \frac{11}{6} \cdot \pi$;

c) $x_1 = \frac{7}{3} \cdot \pi,\ x_2 = \frac{8}{3} \cdot \pi$.

11. *Naputak*: Primijenite D'Alembertov kriterij. Zadani red konvergira.
12. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
13. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
14. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
15. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
16. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red divergira.
17. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
18. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
19. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
20. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
21. *Naputak*: Primijenite Cauchyjev kriterij. Zadani red konvergira.
22. *Naputak*: Primijenite Cauchyjev kriterij ili obrat po kontrapoziciji nužnoga uvjeta konvergencije reda. Zadani red divergira.
23. Vidjeti naputak za 21. zadatak. Zadani red konvergira.
24. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
25. *Naputak*: Zapišite $a_n = \left(\frac{n}{2 \cdot n + 1} \right)^n \cdot n$, pa primijenite Cauchyjev kriterij. Zadani red konvergira.
26. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
27. Vidjeti naputak za 21. zadatak. Zadani red konvergira.
28. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
29. Vidjeti naputak za 21. zadatak. Zadani red konvergira.
30. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
31. *Naputak*: Primijenite Raabeov kriterij. Zadani red konvergira.
32. *Naputak*: Primijenite Raabeov kriterij ili obrat po kontrapoziciji nužnoga uvjeta za konvergenciju reda. Zadani red divergira.
33. Vidjeti naputak za 31. zadatak. Zadani red konvergira.
34. Vidjeti naputak za 31. zadatak. Zadani red konvergira.
35. *Naputak*: Primijenite Cauchyjev integralni kriterij. Zadani red divergira.
36. *Naputak*: Primijenite Leibnizov kriterij. Zadani red konvergira.
37. Vidjeti naputak za 35. zadatak. Zadani red konvergira.
38. Vidjeti naputak za 36. zadatak. Zadani red konvergira.
39. Vidjeti naputak za 35. zadatak. Zadani red konvergira.
40. Vidjeti naputak za 36. zadatak. Zadani red konvergira.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

TAYLOROV I MACLAURINOV RED

ZADATCI:

Aproksimirajte sljedeće realne funkcije Maclaurinovim polinomom stupnja 4 (razlomke potpuno skratite i nemojte ih zapisivati kao decimalne brojeve):

1. $f(x) = x \cdot e^x$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

3. $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

5. $f(x) = x \cdot \sin x$.

6. $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

7. $f(x) = e^x \cdot \sin(2 \cdot x)$.

8. $f(x) = e^x \cdot \cos(2 \cdot x)$.

9. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

10. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

11. $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$.

12. $f(x) = x^2 \cdot \cos(2 \cdot x)$.

13. $f(x) = \ln(2 \cdot x + 1)$.

14. $f(x) = \ln(1 - x)$.

15. $f(x) = \ln(1 - 3 \cdot x)$.

16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$.

17. $f(x) = x \cdot \ln(1 + x)$.

18. $f(x) = e^x \cdot \ln(1 - x)$.

19. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x+1}$.

20. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Aproksimirajte sljedeće realne funkcije u okolini točke c Taylorovim polinomom stupnja 4 (razlomke potpuno skratite i nemojte ih zapisivati kao decimalne brojeve):

21. $f(x) = e^{1-x}$, $c = 1$.
22. $f(x) = e^{x+2}$, $c = -2$.
23. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$, $c = 1$.
24. $f(x) = x \cdot \ln x$, $c = 1$.
25. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $c = 1$.
26. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $c = 1$.
27. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $c = 1$.
28. $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{x^2}$, $c = 1$.
29. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, $c = \dfrac{\pi}{2}$.
30. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $c = \pi$.

Razvijte polinom $p(x)$ po potencijama od $x - c$:

31. $p(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3$, $c = 1$.
32. $p(x) = 4 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 10$, $c = -1$.
33. $p(x) = 7 \cdot x^3 - 47 \cdot x^2 + 107 \cdot x - 83$, $c = 2$.
34. $p(x) = 1 - 5 \cdot x - 3 \cdot x^2 - x^3$, $c = -2$.
35. $p(x) = x^3 - x$, $c = 3$.
36. $p(x) = x^3 + x$, $c = -1$.
37. $p(x) = x^3 - x^2$, $c = 1$.
38. $p(x) = 1 - x - x^3$, $c = 2$.
39. $p(x) = 1 + x - x^3$, $c = -2$.
40. $p(x) = x^3$, $c = \pi$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

1. $f(x) \approx M_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{6} \cdot x^4$.

2. $f(x) \approx M_4(x) = x - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

3. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 + x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^4$.

4. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^4$.

5. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

6. $f(x) \approx M_4(x) = 1 + x - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

7. $f(x) \approx M_4(x) = 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^4$.

8. $f(x) \approx M_4(x) = 1 + x - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{11}{3} \cdot x^3 - \frac{7}{24} \cdot x^4$.

9. $f(x) \approx M_4(x) = 1 - \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{120} \cdot x^4$.

10. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^4$.

11. $f(x) \approx M_4(x) = 1 - x + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

12. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - 2 \cdot x^4$.

13. $f(x) \approx M_4(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot x^2 + \frac{8}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x^4$.

14. $f(x) \approx M_4(x) = -x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4$.

15. $f(x) \approx M_4(x) = -3 \cdot x - \frac{9}{2} \cdot x^2 - 9 \cdot x^3 - \frac{81}{4} \cdot x^4$.

16. $f(x) \approx M_4(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^3 - \frac{1}{64} \cdot x^3$

17. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^3$.

18. $f(x) \approx M_4(x) = -x - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x^3 - x^4$.

19. $f(x) \approx M_4(x) = x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{11}{6} \cdot x^3 - \frac{25}{12} \cdot x^4$.

20. $f(x) \approx M_4(x) = x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x^3 - x^4$.

21. $f(x) \approx T_4(x) = 1 - (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{6} \cdot (x-1)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x-1)^4$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

22. $f(x) \approx T_4(x) = 1 + (x+2) + \frac{1}{2} \cdot (x+2)^2 + \frac{1}{6} \cdot (x+2)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x+2)^4$.

23. $f(x) \approx T_4(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 + \frac{3}{8} \cdot (x-1)^4$.

24. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{6} \cdot (x-1)^3 + \frac{1}{12} \cdot (x-1)^4$.

25. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) + \frac{3}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \frac{1}{12} \cdot (x-1)^4$.

26. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) - \frac{3}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{11}{6} \cdot (x-1)^3 - \frac{25}{12} \cdot (x-1)^4$.

27. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) - \frac{5}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{13}{3} \cdot (x-1)^3 - \frac{77}{12} \cdot (x-1)^4$.

28. $f(x) \approx T_4(x) = 3 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4$

29. $f(x) \approx T_4(x) = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{5}{48} \cdot \pi \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$.

30. $f(x) \approx T_4(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot (x-\pi) + \frac{1}{\pi} \cdot (x-\pi)^2 + \frac{\pi^2 - 6}{6 \cdot \pi^3} \cdot (x-\pi)^3 + \frac{6 - \pi^2}{6 \cdot \pi^4} \cdot (x-\pi)^4$.

31. *Naputak*: Zadatak se svodi na određivanje svih koeficijenata Taylorova razvoja polinoma p oko točke c, pri čemu vrijedi $a_n = 0$, za svaki $n \geq \deg(p) + 1$. Dobiva se: $p(x) = (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 + (x-1) + 1$.

32. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = 4 \cdot (x+1)^3 + 3 \cdot (x+1)^2 + 2 \cdot (x+1) + 1$.

33. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = 7 \cdot (x-2)^3 - 5 \cdot (x-2)^2 + 3 \cdot (x-2) - 1$.

34. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (-1) \cdot (x+2)^3 + 3 \cdot (x+2)^2 - 5 \cdot (x+2) + 7$.

35. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x-3)^3 + 9 \cdot (x-3)^2 + 26 \cdot (x-3) + 24$.

36. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x+1)^3 - 3 \cdot (x+1)^2 + 4 \cdot (x+1) - 2$.

37. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x-1)^3 + 2 \cdot (x-1)^2 + (x-1)$.

38. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (-1) \cdot (x-2)^3 - 6 \cdot (x-2)^2 - 13 \cdot (x-2) - 9$.

39. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (-1) \cdot (x+2)^3 + 6 \cdot (x+2)^2 - 11 \cdot (x+2) + 7$.

40. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x-\pi)^3 + 3 \cdot \pi \cdot (x-\pi)^2 + 3 \cdot \pi^2 \cdot (x-\pi) + \pi^3$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

FOURIEROVI REDOVI

1. Parna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = -x, \text{ za } x \in [-\pi, 0].$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.
b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)
c) Koristeći razvoj zadane funkcije u Fourierov red na segmentu $[-\pi, \pi]$ izračunajte zbroj svih članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2 \cdot n - 1)^2}$.

2. Parna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x, \text{ za } x \in [0, \pi].$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

3. Neparna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = 1, \text{ za } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.
b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)
c) Koristeći razvoj zadane funkcije u Fourierov red na segmentu $[-\pi, \pi]$ izračunajte zbroj svih članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n - 1}$.

4. Neparna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

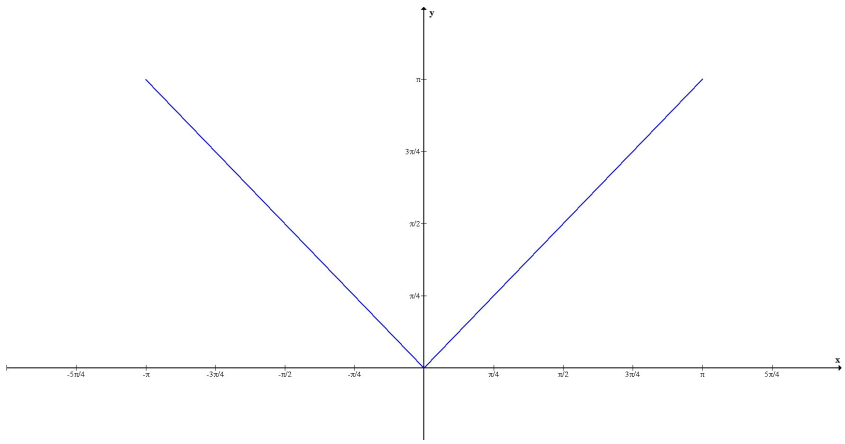
$$h(x) = 2, \text{ za } x \in \langle -\pi, 0 \rangle.$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

REZULTATI ZADATAKA

1. **a)** Vidjeti Sliku 1.



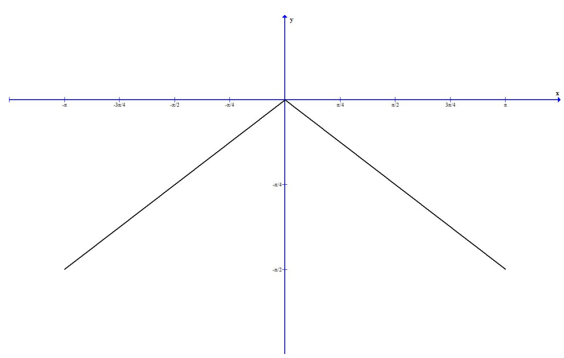
Slika 1.

Na segmentu [–π, π] h nema točaka prekida, te ima jedan strogi ekstrem (strogi minimum 0 u $x = 0$). Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\cos x - \frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot x) - \frac{4}{25\cdot\pi}\cdot\cos(5\cdot x) - \frac{4}{49\cdot\pi}\cdot\cos(7\cdot x)$.

c) Za $x = 0$ dobiva se $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\right)$. Odatle slijedi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\cdot n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. **a)** Vidjeti Sliku 2.

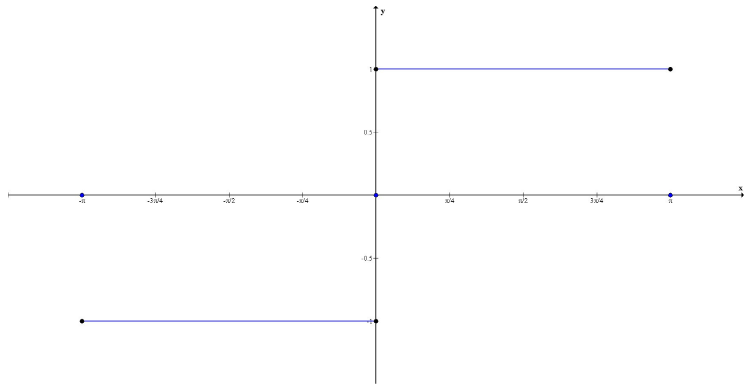


Slika 2.

Na segmentu [–π, π] h nema točaka prekida, te ima jedan strogi ekstrem (strogi maksimum 0 u $x = 0$). Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cdot\cos x + \frac{2}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot x) + \frac{2}{25\cdot\pi}\cdot\cos(5\cdot x) + \frac{2}{49\cdot\pi}\cdot\cos(7\cdot x)$.

3. **a)** Vidjeti Sliku 3.



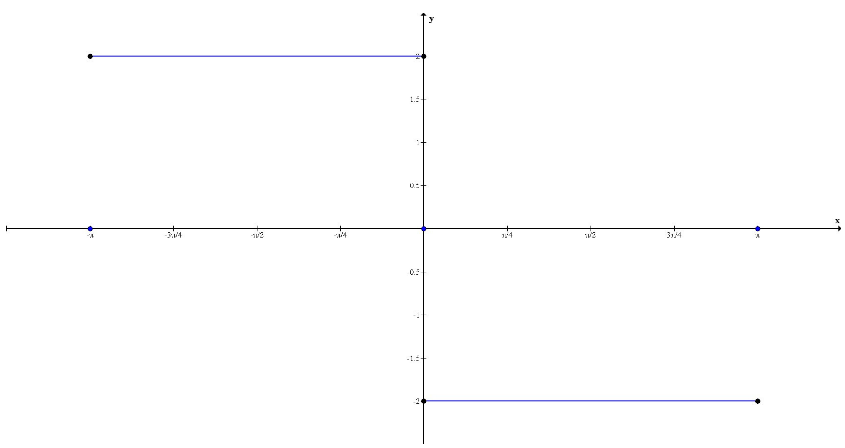
Slika 3.

Na segmentu $[-\pi, \pi]$ h ima tri točke prekida ($-\pi$, 0 i π), te nema niti jedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin x + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) + \frac{4}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) + \frac{4}{7 \cdot \pi} \cdot \sin(7 \cdot x)$.

c) Za $x = \frac{\pi}{2}$ dobiva se $1 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$. Odatle slijedi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n - 1} = \frac{\pi}{4}$.

4. a) Vidjeti Sliku 4.



Slika 4.

Na segmentu $[-\pi, \pi]$ h ima tri točke prekida ($-\pi$, 0 i π), te nema niti jedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = -\frac{8}{\pi} \cdot \sin x - \frac{8}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{8}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) - \frac{8}{7 \cdot \pi} \cdot \sin(7 \cdot x)$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

STARI OGLEDNI PRIMJER 2. KOLOKVIJA

1. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int\limits_{\frac{3}{\pi}}^{+\infty} \frac{3 \cdot \sin\left(\frac{3}{x}\right)}{2 \cdot x^2} \cdot dx$. Ako integral konvergira, izračunajte ga.

2. Zadan je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^n x$. Odredite $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ za koji je zbroj svih članova reda jednak $\frac{2}{3}$.

3. <u>Koristeći Cauchyjev kriterij</u> ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2 \cdot n}}{n \cdot 5^n}$.

4. Aproksimirajte realnu funkciju $f(x) = \frac{1-x}{e^x}$ Maclaurinovim polinomom 4. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

5. Aproksimirajte realnu funkciju $g(x) = x^3 \cdot \ln(x - 2)$ oko točke $x = 3$ Taylorovim polinomom 4. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

6. Neparna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = \frac{1}{2}, \text{ za } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA

1. *Naputak*: Zamijenite $t = \frac{3}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

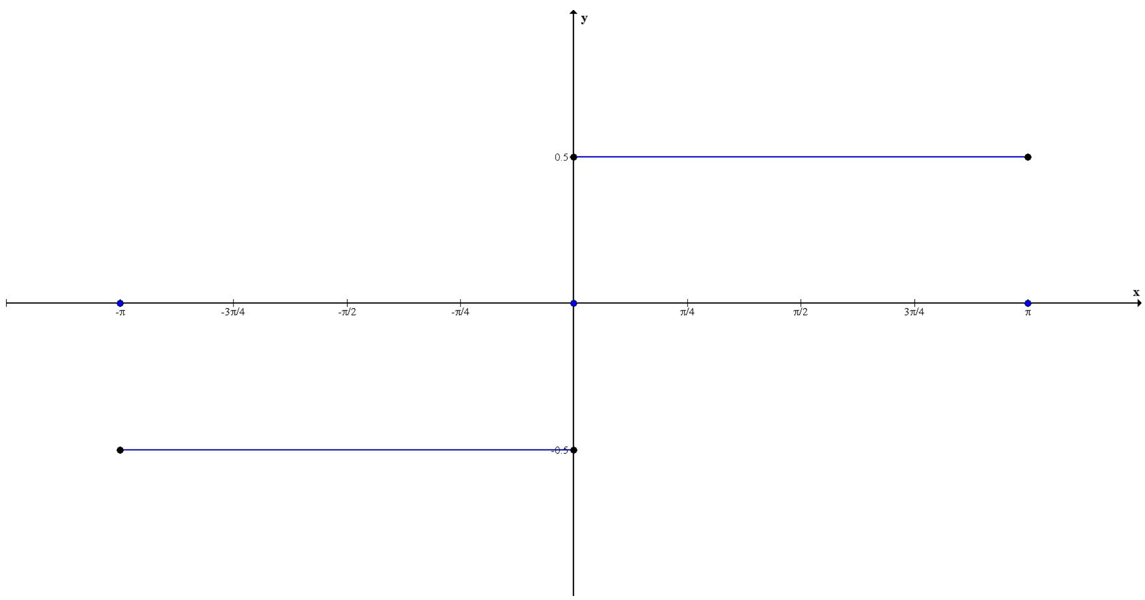
2. *Naputak*: Zbroj zadanoga reda jednak je $S = \frac{1}{1+\cos x}$. Dobiva se $x = \frac{\pi}{3}$.

3. Red konvergira $\left(r = \frac{4}{5} \right)$.

4. *Naputak*: Primijenite definiciju MacLaurinova reda, te jednakost $[\varphi(x) \cdot e^{-x}]' = [\varphi'(x) - \varphi(x)] \cdot e^{-x}$ koja bitno ubrzava izračun druge, treće i četvrte derivacije funkcije oblika $\varphi(x) \cdot e^{-x}$ (pogotovo ako je φ polinom). Dobiva se $f(x) \approx M_4(x) = 1 - 2 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{24} \cdot x^4$.

5. $g(x) \approx T_4(x) = 27 \cdot (x-3) + \frac{27}{2} \cdot (x-3)^2 + \frac{9}{2} \cdot (x-3)^3 - \frac{5}{4} \cdot (x-3)^4$.

6. **a)** *Naputak*: Prigodom crtanja grafa uočiti da je $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$. Vidjeti Sliku 1.



Slika 1.

Na segmentu $[-\pi, \pi]$ h ima tri točke prekida ($-\pi$, 0 i π), te nema niti jedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot \sin x - \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{2}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) - \frac{2}{7 \cdot \pi} \cdot \sin(7 \cdot x)$.