TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Primitivna funkcija i neodređeni integral. Izravno integriranje. Metoda zamjene. Metoda djelomične integracije.

ZADATCI:

1. Pokažite da je funkcija F primitivna funkcija realne funkcije f ako je:

a) $F(x)=2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\cdot\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+2013^{2012}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

b) $F(x)=\dfrac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}-x+2\cdot\sqrt{x}-2\cdot\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-2012^{2013}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$;

c) $F(x)=\dfrac{\ln(2012-e^{x})-x}{2012}+2013^{2012}$, $f(x)=\dfrac{e^{x}}{2012\cdot(e^{x}-2012)}$;

d) $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln(x^{2}+1)-\operatorname{arctg}x+2012^{2011}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^{2}+1}$;

e) $F(x)=x\cdot\left(\ln^{2}x-2\cdot\ln x+2\right)-2011^{2012}$ $f(x)=\ln^{2}x$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^{2}\cdot dx$;

b) $\int\left(\sqrt[6]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)^{3}\cdot dx$;

c) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot dx$;

d) $\int x\cdot\left(\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[24]{x^{17}}+\sqrt[4]{x^{3}}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{x^{5}}-\sqrt[8]{x^{7}}\right)\cdot dx$;

e) $\int\dfrac{1}{x^{9}}\cdot\left(x^{2}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}-x\cdot\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(x\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\cdot dx$.

3. Pogodnom zamjenom odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int x\cdot(4\cdot x-1)^{10}\cdot dx$;

b) $\int\dfrac{\ln^{3}(x+1)}{2\cdot x+2}\cdot dx$;

c) $\int\dfrac{6\cdot e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}+2012}\cdot dx$;

d) $\int\sqrt{\dfrac{2\cdot\arcsin(4\cdot x)}{1-16\cdot x^{2}}}\cdot dx$;

e) $\int\dfrac{dx}{(x^{2}-2\cdot x+2)\cdot e^{\operatorname{arctg}(x-1)}}$.

**IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA**

4. Metodom djelomične (parcijalne) integracije odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int (1-x)\cdot\cos x\cdot dx$;

b) $\int x^2\cdot\sin x\cdot dx$ **;**

c) $\int \frac{x^2}{e^{2\cdot x}}\cdot dx$;

d) $\int \sqrt[3]{x^2}\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot dx$;

e) $\int 4\cdot x\cdot\operatorname{arcctg} x\cdot dx$ **.**

5. Primjenom različitih metoda odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int 4022\cdot x^{4023}\cdot e^{x^{2012}}\cdot dx$;

b) $\int \sin(2\cdot x)\cdot\ln(\sin x)\cdot dx$;

c) $\int \cos\sqrt{x}\cdot dx$;

d) $\int \operatorname{arcctg}\sqrt{x}\cdot dx$;

e) $\int \operatorname{arsh} x\cdot dx$.

6. Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

a) $\begin{cases} F'(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\ln x, \\ F(1)=\dfrac{7}{16}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} F'(x)=\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\cos(2\cdot x)}, \\ F(0)=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} F'(x)=\arccos\dfrac{x}{2}, \\ F(-2)=-2\cdot\pi. \end{cases}$

d) $\begin{cases} F'(x)=\operatorname{arch}(2\cdot x), \\ F\left(\dfrac{1}{2}\right)=0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} F'(x)=x\cdot\operatorname{tg}\left(x^2+1\right), \\ F\left(\sqrt{2\cdot\pi-1}\right)=1. \end{cases}$

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbf{R}$ konstanta.

1. *Naputak*: Deriviranjem pokažite da vrijedi jednakost $F' = f$.

2. *Naputak*: U svakom zadatku najprije izvedite algebarske operacije u integrandu i što više pojednostavnite dobivene rezultate. Potom primijenite pravila za integriranje.

a) $-\frac{12}{11} \cdot x \cdot \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{5} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$;

b) $\frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} + \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{18 \cdot \sqrt[6]{x^5}}{x} - \frac{1}{x} + C$;

c) $\frac{3}{5} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot \sqrt{x} + C$;

d) $\frac{2}{7} \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{8}{29} \cdot x^3 \cdot \sqrt[8]{x^5} + C$;

e) $-\frac{2}{15} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x^8} - \frac{1}{4 \cdot x^4} + C$.

3. **a)** *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := 4 \cdot x - 1, \\ x = \frac{1}{4} \cdot (t+1), \\ dx = \frac{1}{4} \cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{1}{196} \cdot (4 \cdot x - 1)^{12} + \frac{1}{176} \cdot (4 \cdot x - 1)^{11} + C$.

b) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := \ln(x+1), \\ dt = \frac{dx}{x+1}. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{1}{8} \cdot \ln^4(x+1) + C$.

c) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := e^{2 \cdot x} + 2012, \\ dt = 2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $3 \cdot \ln(e^{2 \cdot x} + 2012) + C$.

d) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t = \arcsin(4 \cdot x), \\ dt = \frac{4 \cdot dx}{\sqrt{1 - 16 \cdot x^2}}. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \arcsin(4 \cdot x) \cdot \sqrt{\arcsin(4 \cdot x)} + C$.

e) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := \frac{1}{e^{\operatorname{arctg}(x-1)}} = e^{-\operatorname{arctg}(x-1)}, \\ dt = -\frac{dx}{1 + (x-1)^2} = -\frac{dx}{x^2 - 2 \cdot x + 2} \end{cases}$. Dobiva se: $\frac{1}{e^{\operatorname{arctg}(x-1)}} + C$.

4. **a)** $(1 - x) \cdot \sin x - \cos x + C$.
b) $2 \cdot x \cdot \sin x + (2 - x^2) \cdot \cos x + C$;

c) $-\dfrac{2\cdot x^2+2\cdot x+1}{4\cdot e^{2\cdot x}}+C$;

d) $\dfrac{3}{50}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot(5\cdot\ln x-3)+C$;

e) $2\cdot(x^2\cdot\operatorname{arcctg}x+x-\operatorname{arctg}x)+C$.

5. **a)** <u>Naputak</u>: Uočite da je $x^{4023}=x^{2012}\cdot x^{2011}$. Zamijenite $\begin{cases} t:=x^{2012}, \\ dt=2012\cdot x^{2011}\cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $2\cdot e^{x^{2012}}\cdot$ $\cdot(x^{2012}-1)+C$;

b) <u>Naputak</u>: Zamijenite $\sin(2\cdot x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ i $\begin{cases} t:=\sin x, \\ dt=\cos x\cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $\dfrac{1}{2}\cdot\sin^2 x\cdot(2\cdot$ $\cdot\ln(\sin x)-1)+C$.

c) <u>Naputak</u>: Zamijenite $\begin{cases} t:=\sqrt{x}, \\ dt=\dfrac{dx}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow dx=2\cdot t\cdot dt. \end{cases}$. Dobiva se: $2\cdot\left(\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+C$.

d) <u>Naputak</u>: Zamijenite $\begin{cases} t:=\sqrt{x}, \\ dt=\dfrac{dx}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow dx=2\cdot t\cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+C$.

e) <u>Naputak</u>: Primijenite djelomičnu integraciju prema shemi $\begin{Bmatrix} u=\operatorname{Arsh}x & v=x \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} & dv=dx \end{Bmatrix}$, a u preostalom integralu zamijenite $\begin{cases} t=x^2+1, \\ dt=2\cdot x\cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $x\cdot\operatorname{Arsh}x-\sqrt{x^2+1}+C$.

6. <u>Naputak</u>: Integriranjem prve jednadžbe (uz primjenu metoda zamjene, odnosno djelomične integracije) dobije se opći oblik funkcije F koji sadrži nepoznatu konstantu C. Potom se u dobivenu jednakost uvrste x i $F(x)$ iz početnoga uvjeta, pa se dobije linearna jednadžba s jednom nepoznanicom C. (*Napomena*: Zadatak **ne** treba rješavati kao običnu diferencijalnu jednadžbu.)

a) $F(x)=\dfrac{3}{16}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot(4\cdot\ln x-3)+1$;

b) $F(x)=-\dfrac{1}{4}\cdot e^{\cos(2\cdot x)}-1$;

c) $F(x)=x\cdot\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$;

d) $F(x)=x\cdot\operatorname{arch}(2\cdot x)-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot x^2-1}$;

e) $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left[\cos\left(x^2+1\right)\right]+1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Integriranje (i)racionalnih funkcija.

ZADATCI:

1. Metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke) odredite sljedeće neodređene integrale i pojednostavnite dobivene izraze što je više moguće:

a) $\int \frac{5}{6-x-x^2}\cdot dx$;

b) $\int \frac{16}{15-2\cdot x-x^2}\cdot dx$;

c) $\int \frac{7}{6\cdot x^2+x-2}\cdot dx$;

d) $\int \frac{50}{12+7\cdot x-12\cdot x^2}\cdot dx$

e) $\int \frac{2\cdot dx}{x-x^3}$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{3\cdot x+4}{x^2+5\cdot x+6}\cdot dx$;

b) $\int \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot x}{x^2+x+1}\cdot dx$;

c) $\int \frac{3\cdot x-2}{x^2+3\cdot x+4}\cdot dx$;

d) $\int \frac{x^3-1}{x^3+x}\cdot dx$;

e) $\int \frac{x^4}{x^3+1}\cdot dx$.

3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int 8\cdot\sqrt{x^2+x}\cdot dx$

b) $\int 8\cdot\sqrt{12-x-x^2}\cdot dx$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6\cdot x}}$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4\cdot x-x^2}}$;

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2\cdot x-x^2}}\cdot dx$;

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{3 \cdot x}{\sqrt{x}+1} \cdot dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-1}$;

e) $\int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt{x}}$.

5. Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

a) $\begin{cases} F'(x) = \frac{x^2}{x+1}, \\ F(0) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} F'(x) = \frac{x+1}{x^2-x}, \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} F'(x) = \frac{3 \cdot x - 1}{2 + x - x^2}, \\ F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln\frac{1}{2}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} F'(x) = \frac{1}{x^{2013}+x}, \\ F(1) = \frac{1}{2012} \cdot \ln\frac{1}{2}; \end{cases}$

e) $\begin{cases} F'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x-x^2}}, \\ F(0) = \pi; \end{cases}$

f) $\begin{cases} F'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}, \\ F(0) = -1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} F'(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{4 \cdot \sqrt{x}+4}, \\ F(0) = 1. \end{cases}$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbf{R}$ konstanta.

1. **a)** $\ln(x + 3) - \ln(2 - x) + C$ (ili $\ln\frac{x+3}{2-x} + C$);

b) $2 \cdot \ln(x + 5) - 2 \cdot \ln(3 - x) + C$ (ili $2 \cdot \ln\frac{x+5}{3-x} + C$);

c) $\ln(1 - 2 \cdot x) - \ln(3 \cdot x + 2) + C$ (ili $\ln\frac{1-2\cdot x}{3\cdot x+2} + C$);

d) $\ln(4 \cdot x + 3) - \ln(4 - 3 \cdot x) + C$ (ili $\ln\frac{4\cdot x+3}{4-3\cdot x} + C$);

e) $2 \cdot \ln x - \ln(x + 1) - \ln(1 - x) + C$ (ili $\ln\frac{x^2}{1-x^2} + C$).

2. **a)** $5 \cdot \ln(x + 3) - 2 \cdot \ln(x + 2) + C$;

b) $\sqrt{3}\cdot\ln(x^2+x+1)-2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

c) $\frac{3}{2}\cdot\ln(x^2+3\cdot x+4)-\frac{13}{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$;

d) *Naputak*: Podijelite brojnik s nazivnikom prema pravilu za dijeljenje polinoma. Dobiva se: $x - \ln x - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + C$;

e) $3 \cdot x^2 + 2 \cdot \ln(x + 1) - \ln(x^2 - x + 1) - 2 \cdot\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

3. **a)** $2\cdot(2\cdot x+1)\cdot\sqrt{x^2+x}-\ln\left(2\cdot x+1+2\cdot\sqrt{x^2+x}\right)+C$;

b) $2\cdot(2\cdot x+1)\cdot\sqrt{12-x-x^2}+49\cdot\arcsin\left(\frac{2\cdot x+1}{7}\right)+C$;

c) $\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6\cdot x}\right)+C$

d) $\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$ **;**

e) $\sqrt{2\cdot x-x^2}+2\cdot\arcsin(x-1) + C$;

4. **a)** *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} x=(t-1)^2, \\ dx = 2\cdot(t-1)\cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $2\cdot x\cdot\sqrt{x}-3\cdot x+6\cdot\sqrt{x} - 6 \cdot \ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$.

b) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow x=t^6, \\ dx = 6\cdot t^5\cdot dt. \end{cases}$ Slijedi: $6\cdot\int\frac{t^5}{t^3+t^2}\cdot dt = 6\cdot\int\frac{t^3}{t+1}\cdot dt.$ Rezultat: $2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x} - 6 \cdot \ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C$;

c) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t = \sqrt[3]{x} + 1 \Leftrightarrow x = (t-1)^3, \\ dx = 3 \cdot (t-1)^2 \cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3 \cdot \ln\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)$ $+ C$.

d) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t = \sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow x = t^2 + 2 \cdot t, \\ dx = 2 \cdot (t+1) \cdot dt. \end{cases}$. Dobiva se: $2 \cdot \sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$ $+ C$.

e) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2, \\ dx = 2 \cdot t \cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\ln \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + C$.

5. a) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + 1 + \ln(x+1)$ **;**

b) $F(x) = \ln\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)$ **;**

c) $F(x) = -\frac{5}{3} \cdot \ln(2-x) - \frac{4}{3} \cdot \ln(x+1)$ **;**

d) _Naputak_: $\frac{1}{x^{2013} + x} = \frac{1}{x \cdot (x^{2012} + 1)} = \frac{(x^{2012} + 1) - x^{2012}}{x \cdot (x^{2012} + 1)} = \frac{x^{2012} + 1}{x \cdot (x^{2012} + 1)} - \frac{x^{2012}}{x \cdot (x^{2012} + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^{2011}}{x^{2012} + 1}$. Tako se dobije razlika dvaju integrala od kojih je prvi tablični, dok se drugi riješi zamjenom $\begin{cases} t = x^{2012} + 1, \\ dt = 2012 \cdot x^{2011} \cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $F(x) = \ln x - \frac{1}{2012} \cdot \ln\left(x^{2012} + 1\right)$.

e) $F(x) = \arcsin(2 \cdot x + 1) + \frac{\pi}{2}$ **;**

f) $F(x) = \frac{3}{10} \cdot (2 \cdot x - 3) \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} - \frac{1}{10}$ **;**

g) $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right) + 1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija.

ZADATCI:

1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sin^3 x \cdot \cos^{12} x \cdot dx$;

b) $\int \sin^5 x \cdot \cos^8 x \cdot dx$;

c) $\int \sin^8 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$;

d) $\int \sin^6 x \cdot \cos^5 x \cdot dx$;

e) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$;

f) $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) \cdot dx$;

g) $\int \mathrm{tg}^5 x \cdot dx$;

h) $\int \mathrm{ctg}^3 x \cdot dx$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sin(2 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) \cdot dx$;

b) $\int \sin(3 \cdot x) \cdot \cos(7 \cdot x) \cdot dx$;

c) $\int \cos(8 \cdot x) \cdot \cos(5 \cdot x) \cdot dx$;

d) $\int \sin(5 \cdot x) \cdot \sin(9 \cdot x) \cdot dx$.

3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$;

b) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

c) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

d) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$;

e) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$;

f) $\int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} \cdot dx$;

b) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x} \cdot dx$;

c) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 4 \cdot \cos^2 x}} \cdot dx$;

d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot dx$.

5. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \mathrm{sh}^3 x \cdot \mathrm{ch}^{10} x \cdot dx$;

b) $\int \mathrm{sh}^5 x \cdot \mathrm{ch}^{12} x \cdot dx$;

c) $\int \mathrm{sh}^{16} x \cdot \mathrm{ch}^3 x \cdot dx$;

d) $\int \mathrm{sh}^{10} x \cdot \mathrm{ch}^5 x \cdot dx$;

e) $\int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot dx$;

f) $\int (\mathrm{sh}^4 x + \mathrm{ch}^4 x) \cdot dx$;

g) $\int \mathrm{th}^5 x \cdot dx$;

h) $\int \mathrm{cth}^3 x \cdot dx$.

6. Pomoću odgovarajuće zamjene odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \cdot dx$;

b) $\int \sqrt{4 \cdot x^6 - x^8} \cdot dx$;

c) $\int \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \cdot dx$;

d) $\int 15 \cdot \sqrt{x^8 + 16 \cdot x^6} \cdot dx$;

e) $\int \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} \cdot dx$;

f) $\int 35 \cdot \sqrt{x^{12} - 36 \cdot x^{10}} \cdot dx$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2 ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbf{R}$ konstanta.

1. **a)** *Naputak*: Primijenite identitete $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x$ i $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $\frac{1}{15} \cdot \cos^{15} x - \frac{1}{13} \cdot \cos^{13} x + C$.

b) Vidjeti naputak za **a)** podzadatak. Dobiva se: $-\frac{1}{13} \cdot \cos^{13} x + \frac{2}{13} \cdot \cos^{13} x - \frac{1}{9} \cdot \cos^9 x + C$.

c) *Naputak*: Primijenite identitete $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x$ i $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \sin x, \\ dt = \cos x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $-\frac{1}{11} \cdot \sin^{11} x + \frac{1}{9} \cdot \sin^9 x + C$.

d) Vidjeti naputak za **c)** podzadatak. Dobiva se: $\frac{1}{11} \cdot \sin^{11} x - \frac{2}{9} \cdot \sin^9 x + \frac{1}{7} \cdot \sin^7 x + C$.

e) *Naputak:* Koristeći identitete $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ i $\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot x)]$ slijedi:

$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin x \cdot \cos x)^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x)\right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2(2 \cdot x) = \frac{1}{8} \cdot [1 - \cos(4 \cdot x)]$. Dobiva se: $\frac{1}{8} \cdot x - \frac{1}{32} \cdot \cos(4 \cdot x) + C$.

f) *Naputak*: Primijenite identitet $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2$ = (prema **e)** podzadatku) = $1 - \frac{1}{4} \cdot [1 - \cos(4 \cdot x)] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \cos(4 \cdot x)$. Dobiva se: $\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot \sin(4 \cdot x) + C$.

g) *Naputak*: Primijenite identitet $\mathrm{tg}^5 x = \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \cdot \sin x = \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^5 x} \cdot \sin x = \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^5 x} \cdot$ $\cdot \sin x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $-\ln(\cos x) - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4 \cdot \cos^4 x} + C$.

h) *Naputak*: Primijenite identitet $\mathrm{ctg}^3 x = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \sin x, \\ dt = \cos x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $-\ln(\sin x) - \frac{1}{2 \cdot \sin^2 x} + C$.

2. *Naputak*: Primijenite identitete
$$\begin{cases} \sin(m \cdot x) \cdot \cos(n \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \{\sin[(m+n) \cdot x] + \sin[(m-n) \cdot x]\}; \\ \sin(m \cdot x) \cdot \sin(n \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \{\cos[(m-n) \cdot x] - \cos[(m+n) \cdot x]\}; \\ \cos(m \cdot x) \cdot \cos(n \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \{\cos[(m+n) \cdot x] + \cos[(m-n) \cdot x]\}. \end{cases}$$

a) $\frac{1}{4}\cdot\cos(2\cdot x)-\frac{1}{12}\cdot\cos(6\cdot x)+C$;

b) $\frac{1}{8}\cdot\cos(4\cdot x)-\frac{1}{20}\cdot\cos(10\cdot x)+C$;

c) $\frac{1}{6}\cdot\sin(3\cdot x)+\frac{1}{26}\cdot\sin(13\cdot x)+C$;

d) $\frac{1}{8}\cdot\sin(4\cdot x)-\frac{1}{28}\cdot\sin(14\cdot x)+C$.

3. **a)** <u>*Naputak*</u>: Zamijenite $\begin{cases} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \\ \sin x=\frac{2\cdot t}{1+t^2}, \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\cdot dt. \end{cases}$ Dobije se integral $\int\frac{2}{(t-1)^2}\cdot dt$ koji se riješi zamjenom $\begin{cases} u=t-1, \\ du=dt. \end{cases}$. Rezultat zadatka je: $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$

b) <u>*Naputak*</u>: Zamijenite $\begin{cases} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\cdot dt. \end{cases}$, Dobiva se: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

c) Vidjeti naputke za **a)** i **b)** podzadatak. Navedenom zamjenom dobije se integral $\int\frac{dt}{1+2\cdot t-t^2}$ koji je jednak integralu $\int\frac{dt}{2-(t-1)^2}$. Taj se integral svodi na tablični zamjenom $\begin{cases} u=t-1, \\ du=dt. \end{cases}$

Rezultat zadatka je: $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right)+C.$

d) Vidjeti naputke za **a)** i **b)** podzadatak. Navedenom zamjenom dobije se integral $\int\frac{dt}{t^2+2\cdot t-1}$ koji je jednak integralu $\int\frac{dt}{(t+1)^2-2}$. Taj se integral svodi na tablični zamjenom $\begin{cases} u=t+1, \\ du=dt. \end{cases}$

Rezultat zadatka je: $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right)+C.$

e) <u>Naputak</u>: Očito je $\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{1+(-\sin x)^2}$, pa zamijenite $\begin{cases} t=\operatorname{tg} x, \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{cases}$. Dobiva se:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{tg} x\right)+C.$

f) <u>Naputak</u>: Očito je $\frac{1}{2+\cos^2 x}=\frac{1}{2+(-\cos x)^2}$, pa zamijenite $\begin{cases} t=\operatorname{tg} x, \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2} \\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{cases}$. Dobiva se:

$\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \operatorname{tg} x\right)+C.$

4. a) <u>Naputak</u>: Zamjenom $\begin{cases} t=\sin x, \\ dt=\cos x\cdot dx \end{cases}$ slijedi $\int\frac{dt}{t^2+t}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$, pa se uz novu zamjenu $\begin{cases} u=t+\frac{1}{2}, \\ du=dt \end{cases}$ dobije tablični integral $\int\frac{du}{u^2-\frac{1}{4}}$. Rezultat zadatka: $\ln\frac{\sin x}{1+\sin x}+C$. (*Napomena*: Integral $\int\frac{dt}{t^2+t}$ je moguće odrediti i metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke) uz isti rezultat.)

b) <u>Naputak</u>: Zamjenom $\begin{cases} t=\sin x, \\ dt=\cos x\cdot dx \end{cases}$ slijedi $\int\frac{dt}{t^3+t^2}=\int\frac{dt}{t^2\cdot(t+1)}$. Ovaj integral najbrže je riješiti metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke). Dobije se: $\frac{1}{t^2\cdot(t+1)}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t+1}$, pa je rješenje zadatka: $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

c) <u>Naputak</u>: Zamjenom $\begin{cases} t=\cos x, \\ dt=-\sin x\cdot dx \end{cases}$ slijedi $\int\frac{-dt}{\sqrt{t-4\cdot t^2}}=\int\frac{-dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(2\cdot t-\frac{1}{2}\right)^2}}$, pa se uz novu zamjenu $\begin{cases} u=2\cdot t-\frac{1}{2}, \\ du=dt \end{cases}$ dobije tablični integral. Rezultat zadatka: $-\frac{1}{2}\cdot\arcsin(8\cdot\cos x--1)+C$.

d) _Naputak_: Najprije je 1 + $\sin^2 x$ = 1 + (1 – $\cos^2 x$) = 2 – $\cos^2 x$. Zamjenom $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$ dobije se tablični integral. Rezultat: –arcsin$\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)$ + C.

5. **a)** _Naputak_: Primijenite identitete $\text{sh}^3 x = \text{sh}\, x \cdot \text{sh}^2 x$ i $\text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x - 1$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \text{ch}\, x, \\ dt = \text{sh}\, x \cdot dx \end{cases}$.

Dobiva se: $\frac{1}{13} \cdot \text{ch}^{13} x - \frac{1}{11} \cdot \text{ch}^{11} x + C$.

b) Vidjeti naputak za **a)** podzadatak. Dobiva se: $\frac{1}{17} \cdot \text{ch}^{17} x - \frac{2}{15} \cdot \text{ch}^{15} x + \frac{1}{13} \cdot \text{ch}^{13} x$ + C.

c) _Naputak_: Primijenite identitete $\text{ch}^3 x$ = ch x · $\text{ch}^2 x$ i $\text{ch}^2 x$ = 1 + $\sin^2 x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \text{sh}\, x, \\ dt = \text{ch}\, x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $\frac{1}{19} \cdot \text{sh}^{19} x + \frac{1}{17} \cdot \text{sh}^{17} x + C$.

d) Vidjeti naputak za **c)** podzadatak. Dobiva se: $\frac{1}{15} \cdot \text{sh}^{15} x + \frac{2}{13} \cdot \text{sh}^{13} x + \frac{1}{11} \cdot \text{sh}^{11} x$ + C.

e) _Naputak_: Koristeći definiciju funkcija sh x i ch x dobijemo: $\text{sh}^2 x \cdot \text{ch}^2 x = (\text{sh}\, x \cdot \text{ch}\, x)^2$ = = $\left[\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{16} \cdot (e^{2 \cdot x} - e^{-2 \cdot x})^2 = \frac{1}{16} \cdot e^{4 \cdot x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot e^{-4 \cdot x}$. Rezultat zadatka: $\frac{1}{64} \cdot (e^{4 \cdot x} - e^{-4 \cdot x}) - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{64} \cdot \text{sh}(4 \cdot x) - \frac{1}{8} \cdot x$ + C.

f) _Naputak_: Primijenite identitet $\text{sh}^4 x + \text{ch}^4 x = (\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x)^2 + 2 \cdot (\text{sh}\, x \cdot \text{ch}\, x)^2$ = 1 + 2 · (sh x · · ch x)^2, te rezultat **e)** podzadatka. Dobiva se: $\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{32} \cdot (e^{4 \cdot x} - e^{-4 \cdot x}) = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{32} \cdot \text{sh}(4 \cdot x)$ + C.

g) _Naputak_: Primijenite identitet $\text{th}^5 x = \frac{\text{sh}^5 x}{\text{ch}^5 x} = \frac{\text{sh}^4 x}{\text{ch}^5 x} \cdot \text{sh}\, x = \frac{(\text{sh}^2 x)^2}{\text{ch}^5 x} \cdot \text{sh}\, x = \frac{(\text{ch}^2 x - 1)^2}{\text{ch}^5 x} \cdot$ sh x, pa zamijenite $\begin{cases} t = \text{ch}\, x, \\ dt = \text{sh}\, x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: ln(ch x) $+ \frac{1}{\text{ch}^2 x} + \frac{1}{4 \cdot \text{ch}^4 x}$ + C.

h) _Naputak_: Primijenite identitet $\text{cth}^3 x = \frac{\text{ch}^3 x}{\text{sh}^3 x} = \frac{\text{ch}^2 x}{\text{sh}^3 x} \cdot \text{ch}\, x = \frac{1 + \text{sh}^2 x}{\text{sh}^3 x} \cdot \text{ch}\, x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \text{sh}\, x, \\ dt = \text{ch}\, x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: ln(sh x) $- \frac{1}{2 \cdot \text{sh}^2 x} + C$.

6. **a)** Polazni integral jednak je $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot dx$. Zamjenom $\begin{cases} x = \sin t, \\ dx = \cos t \cdot dt \end{cases}$ dobije se integral $\int \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \cdot dt = \int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t \cdot dt$ = cos t + ln$\left|\text{tg}\frac{t}{2}\right|$. Preostaje primijeniti identitete

$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ i $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{\cos t + 1} = \frac{\sin t}{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}$, pa je konačan rezultat zadatka $\sqrt{1-x^2} + \ln|x| - \ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) + C.$

b) _Naputak_: Polazni integral najprije zapišemo u obliku $\int x^3 \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx = \int x^2 \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx$.

Zamjenom $\begin{cases} t = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 - t \\ dt = -2 \cdot x \cdot dx, \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{cases}$ dobivamo integral $\int (t-4) \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot dt$ kojega razdvojimo na dva tablična integrala. Rezultat: $\frac{3 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2 - 32}{15} \cdot \sqrt{4-x^2}$. (_Napomena_: Iako je zadatak moguće riješiti trigonometrijskom ili hiperbolnom zamjenom, ona se ne preporučuje jer se dobiju integrali bitno složeniji od integrala $\int (t-4) \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot dt$.)

c) Zadani integral je jednak $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \cdot dx$. Zamjenom $\begin{cases} x = 3 \cdot \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{3}{\cos^2 t} \cdot dt \end{cases}$ dobijemo tablični integral $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|$. Preostaje primijeniti identitet $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} - 1}{\operatorname{tg} t}$, pa je polazni integral jednak $\sqrt{x^2+9} + 3 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln\left(3+\sqrt{x^2+9}\right) + C.$

d) Vidjeti naputak za **b)** podzadatak. Rezultat: $(3 \cdot x^2 - 32) \cdot (x^2 + 16) \cdot \sqrt{x^2+16} + C.$

e) _Naputak_: Zadani integral je jednak $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} \cdot dx$. Zamjenom $\begin{cases} x = \frac{5}{\cos t}, \\ dx = \frac{5 \cdot \sin t}{\cos^2 t} \cdot dt \end{cases}$ dobijemo $5 \cdot \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot dt = 5 \cdot \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} \cdot dt = 5 \cdot \left(\int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt\right) = 5 \cdot \operatorname{tg} t - 5 \cdot t$. Preostaje primijeniti identitet $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$ i dobiti rezultat $\sqrt{x^2-25} - 5 \cdot \arccos\left(\frac{5}{x}\right) + C.$

f) _Naputak_: $\int 35 \cdot \sqrt{x^{12} - 36 \cdot x^{10}} \cdot dx = \int 35 \cdot x^5 \cdot \sqrt{x^2-36} \cdot dx = \int 35 \cdot (x^2)^2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2-36} \cdot dx$, pa zamijenite $\begin{cases} t = x^2 - 36 \Leftrightarrow x^2 = t + 36 \\ dt = 2 \cdot x \cdot dx, \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{cases}$. Rezultat: $(5 \cdot x^2 + 504 \cdot x + 15120) \cdot (x^2 - 36) \cdot \sqrt{x^2-36} + C.$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Određeni integral i primjene.

ZADATCI:

1. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = x^2 - 2 \cdot x - 3$ i $K_2 \ldots\, x + y - 3 = 0$.

2. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = 2 - x - x^2$ i $K_2 \ldots\, x + y + 2 = 0$.

3. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = 4 + 5 \cdot x - x^2$ i $K_2 \ldots\, x - y - 4 = 0$.

4. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = 9 - x^2$ i $K_2 \ldots\, y = x^2 - 9$.

5. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = (-x)^3$ i $K_2 \ldots\, x + y = 0$.

6. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = \dfrac{3}{x}$ i $K_2 \ldots\, x + y = 4$.

7. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\, y = x^3 + x - 2$ i $K_2 \ldots\, y = 2 \cdot (x^2 - 1)$.

8. Zadane su funkcije $f(x) = \sin^2 x$ i $g(x) = \cos^2 x$. Neka je a najveće strogo negativno rješenje jednadžbe $f(x) = g(x)$, a b najmanje strogo pozitivno rješenje iste jednadžbe. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = 0$, $x = a$ i $x = b$.

9. U točki $T = (1, y_T)$ krivulje $K \ldots\, y = e^x - 1$ povučena je tangenta t na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K, t i $x = 0$.

10. U točki $T = (x_T, 0)$ krivulje $K \ldots\, y = \ln(x + 1)$ povučena je normala n na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K, n i $x = 1$.

11. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os x, krivulja $y = 3 - e^{-x}$ i tangenta na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 2)$.

12. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os x, krivulja $y = 1 - \ln(x - 1)$ i normala na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 1)$.

13. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ na segmentu $[0, 1]$.

14. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = \sqrt{2 \cdot x - x^2}$.

15. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.

16. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost harmonijske funkcije $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ na njezinu osnovnu segmentu $\left[-\dfrac{\varphi}{\omega}, \dfrac{2 \cdot \pi - \varphi}{\omega}\right]$.

17. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu luka parabole $y = x^2 - x - 2$ na segmentu određenom njezinim nultočkama.

18. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu krivulje $y = \dfrac{2}{3} \cdot (x - 1) \cdot \sqrt{x - 1}$ na segmentu $[9, 81]$.

19. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu krivulje $y = 2 \cdot \left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}\right)$ na segmentu $[2 \cdot \ln 2, 4 \cdot \ln 2]$.

20. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu luka krivulje $y = \dfrac{4}{15} \cdot \left(2 + 3 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - 1\right) \cdot \sqrt{\sqrt{x} - 1}$ na segmentu $[625, 10\,000]$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

21. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 8$ oko osi:
a) x;
b) y.

22. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = x^2$, $y = 0$, $x = 15$ i $x = 30$ oko osi:
a) x;
b) y.

23. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \pi$ oko osi:
a) x;
b) y.

24. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = 1 - e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$ oko osi:
a) x;
b) y.

25. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$ oko osi:
a) x;
b) y.

26. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sqrt{\arcsin x}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$ oko osi x.

27. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sqrt{x} \cdot e^x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ i $x = 1$ oko osi x.

28. S točnošću od 10^{-5} izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \operatorname{arsh} x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$ oko osi y.

29. S točnošću od 10^{-5} izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y = 0$, $x = 2 \cdot \ln 2$ i $x = 4 \cdot \ln 2$ oko osi y.

30. S točnošću od 10^{-5} izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3}{4} \cdot \pi$.

31. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a): $\int_0^1 x \cdot e^{a-x} \cdot dx = e - 2$.

32. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a): $\int_0^a \sqrt{10 - x} \cdot dx = \frac{38}{3}$.

33. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a): $\int_a^4 \ln \frac{x}{2} \cdot dx = 5 \cdot \ln 2 - 3$.

34. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a) u intervalu $[0, \pi]$: $\int_a^{\pi} \sin^3 x \cdot dx = \frac{2}{3}$.

35. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a) u intervalu $[\pi, 2 \cdot \pi]$: $\int_{\pi}^{a} \cos^5 x \cdot dx = -\frac{8}{15}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

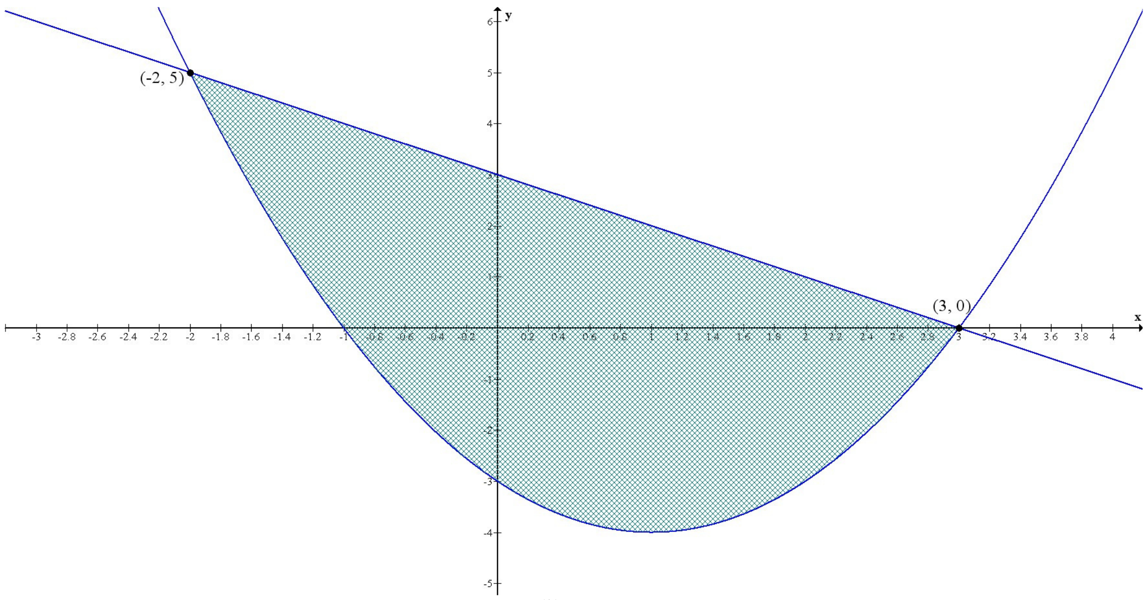
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

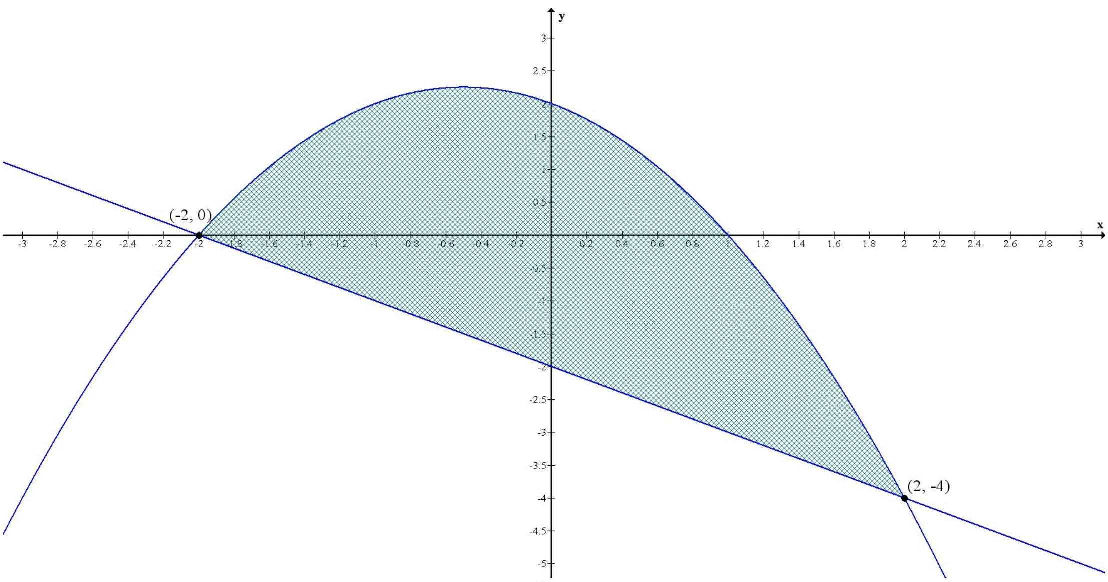
REZULTATI ZADATAKA

1. Vidjeti Sliku 1. $P=\left|\int_{-1}^{3}(x^2-2\cdot x-3)\cdot dx\right|+\int_{-2}^{3}(-x+3)\cdot dx-\int_{-2}^{-1}(x^2-2\cdot x-3)\cdot dx=\frac{125}{6}$ kv. jed.



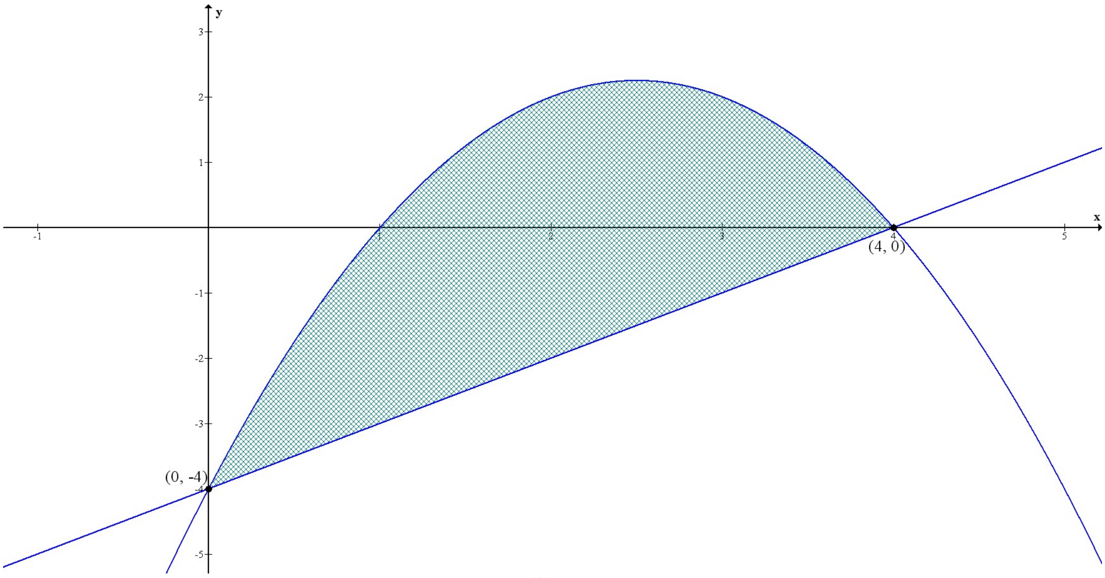
Slika 1.

2. Vidjeti Sliku 2. $P=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\cdot dx+\left|\int_{-2}^{2}(-x-2)\cdot dx\right|-\left|\int_{1}^{2}(2-x-x^2)\cdot dx\right|=\frac{32}{3}$ kv. jed.



Slika 2.

3. Vidjeti Sliku 3. $P = \int_1^4 (4 + 5 \cdot x - x^2) \cdot dx + \left| \int_0^4 (x-4) \cdot dx \right| - \left| \int_0^1 (4 + 5 \cdot x - x^2) \cdot dx \right| = \frac{32}{3}$ kv. jed.



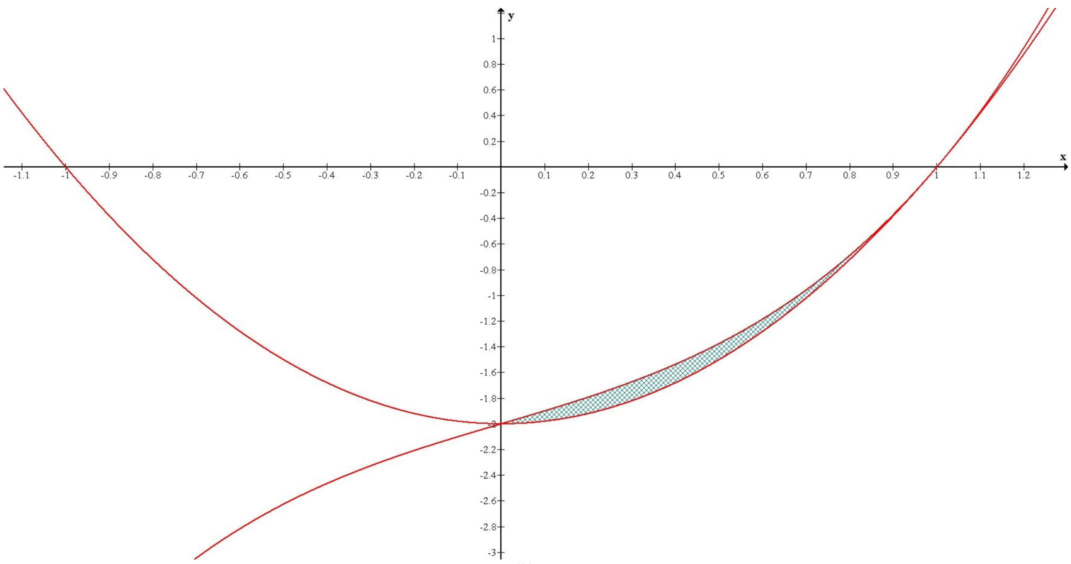
Slika 3.

4. $P = 72$ kv. jed.

5. $P = \frac{1}{2}$ kv. jed.

6. $P = 4 - 3 \cdot \ln 3$ kv. jed.

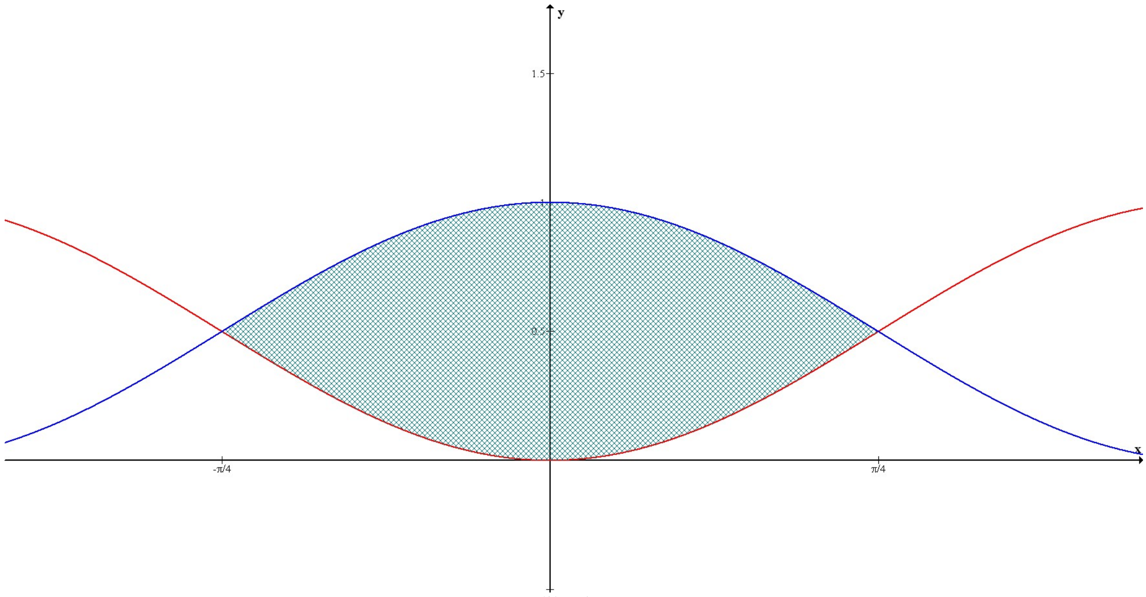
7. Vidjeti Sliku 4. $P = \left| \int_0^1 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot dx \right| - \left| \int_0^1 (x^3 + x - 2) \cdot dx \right| = \frac{1}{12}$ kv. jed.



Slika 4.

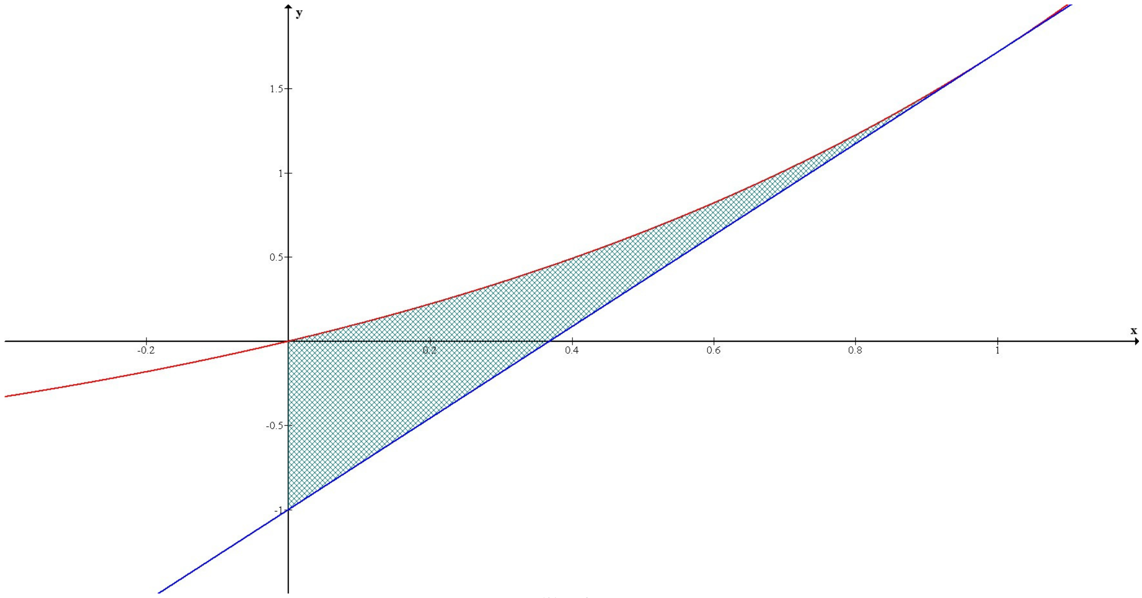
**IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA**

8. Vidi Sl. 5. $P=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\cdot dx-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cdot dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\cdot x)\cdot dx=1$ kv. jed.



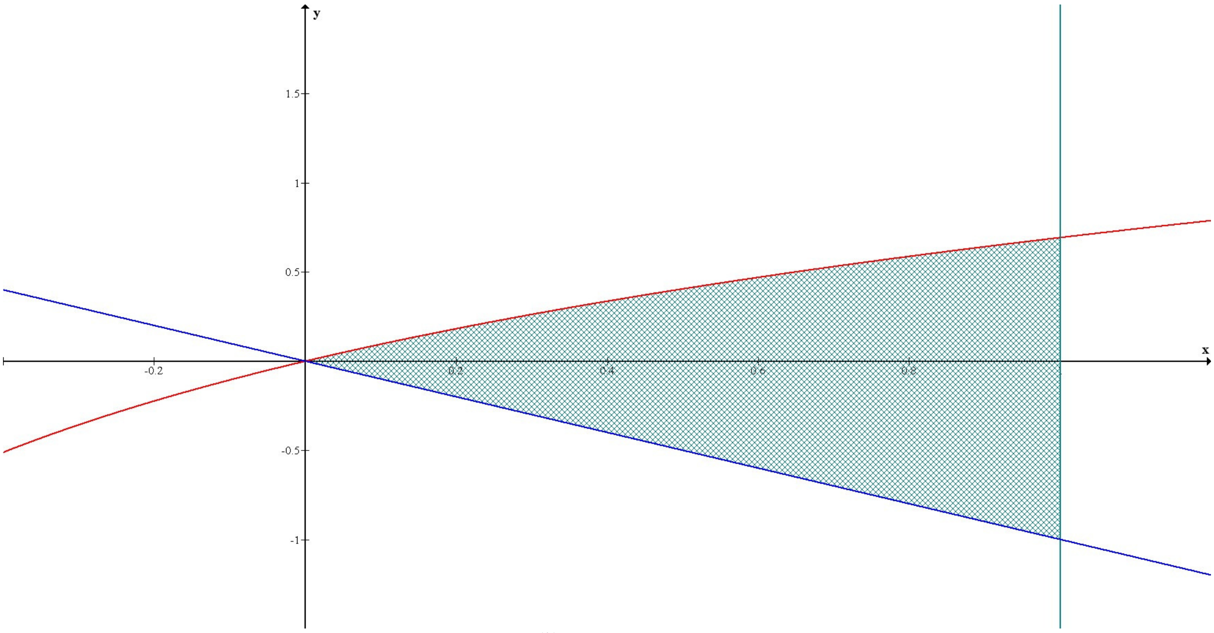
Slika 5.

9. Vidjeti Sliku 6. $P=\left|\int\limits_0^{\frac{1}{e}}(e\cdot x-1)\cdot dx\right|+\int\limits_0^1(e^x-1)\cdot dx-\int\limits_0^1(e\cdot x-1)\cdot dx=\dfrac{(e-1)^2}{2\cdot e}$ kv. jed.



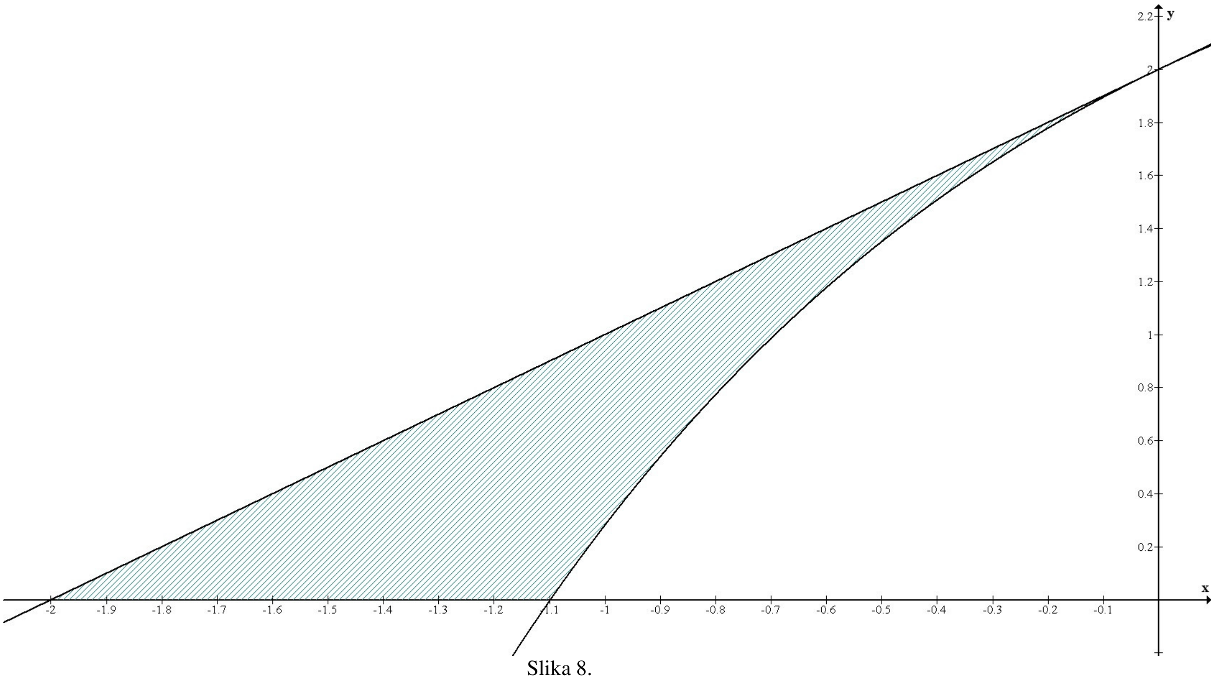
Slika 6.

10. Vidjeti Sliku 7. $P=\int_0^1 \ln(x+1)\cdot dx-\left|\int_0^1(-x)\cdot dx\right|=2\cdot\ln 2-\frac{1}{2}$ kv. jed.



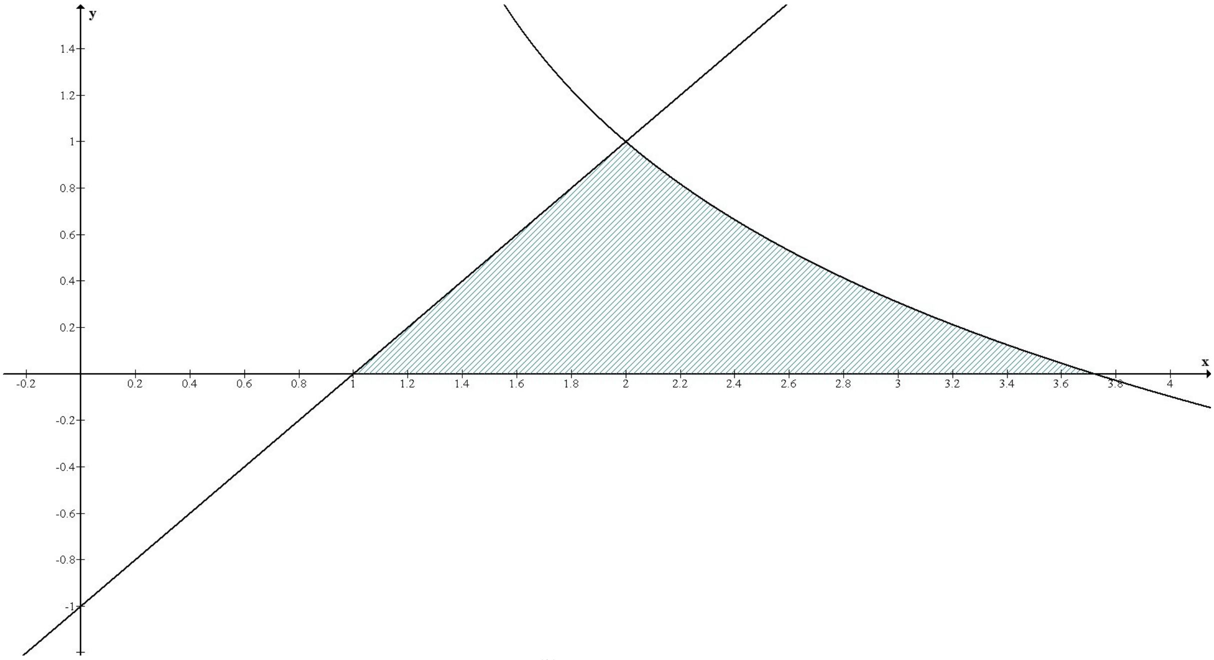
Slika 7.

11. Vidjeti Sliku 8. $P=\int_{-2}^{0}(x+2)\cdot dx-\int_{-\ln 3}^{0}(3-e^{-x})\cdot dx=4-3\cdot\ln 3\approx 0.70416$ kv. jed.



Slika 8.

12. Vidjeti Sliku 9. $P = \int_1^2 (x-1) \cdot dx + \int_2^{e+1} \left[1 - \ln(x-1)\right] \cdot dx = e - \frac{3}{2} \approx 1.28128$ kv. jed.



Slika 9.

13. $\overline{f}_{[0,1]} = \frac{1}{1-0} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = 2 - \frac{5}{e} \approx 0.1606$.

14. Uočimo da je $D_f = [0, 2]$. Stoga je $\overline{f}_{[0,2]} = \frac{1}{2-0} \cdot \int_0^2 \sqrt{2 \cdot x - x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$.

15. Uočimo da je $D_f = [0, 1]$. Stoga je $\overline{f}_{[0,1]} = \frac{1}{1-0} \cdot \int_0^1 \arcsin\sqrt{x} \cdot dx = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$. (*Napomena*: Pripadni neodređeni integral treba odrediti zamjenom $\begin{cases} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2, \\ dx = 2 \cdot t \cdot dt \end{cases}$ a potom djelomičnom integracijom: $\begin{vmatrix} u = \arcsin t & v = t^2 \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & dv = 2 \cdot t \cdot dt \end{vmatrix}$ koristeći $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt -$
$- \int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$.)

16. 0.

17. $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(3 + \sqrt{10}\right) \approx 5.65264$ jed.

18. 468 jed.

19. 4 jed.

20. 77 500 jed.

21. **a)** $V = \frac{381}{7} \cdot \pi$ kub.jed.; **b)** $V = \frac{765}{4} \cdot \pi$ kub.jed.

22. **a)** $V = 150\,660\,000 \cdot \pi$ kub.jed.; **b)** $V = 6\,075\,000 \cdot \pi$ kub. jed.

23. **a)** i **b)** $V = 2 \cdot \pi^2$ kub jed.

24. **a)** $V = \frac{4 \cdot e - e^2 - 1}{2 \cdot e^2} \cdot \pi$ kub. jed.; **b)** $V = \left(\frac{4}{e} - 1\right) \cdot \pi$ kub.jed..

25. **a)** $V = (e - 2) \cdot \pi$ kub. jed. **b)** $V = \frac{e^2 + 1}{2} \cdot \pi$ kub. jed. (*Napomena*: Oba neodređena integrala rješavaju se djelomičnom integracijom.)

26. $V = \frac{1}{2} \cdot (\pi - 2) \cdot \pi$ kub. jed. (*Napomena*: Pripadni neodređeni integral rješava se djelomičnom integracijom $\begin{vmatrix} u = \arcsin x & v = x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} & dv = dx \end{vmatrix}$, pa zamjenom $t = 1 - x^2$.)

27. $V = \frac{1}{4} \cdot e^2$ kub jed.

28. $V \approx 11.45217$. (*Napomena*: Pripadni neodređeni integral rješava se djelomičnom integracijom $\begin{vmatrix} u = \text{arsh}\, x & v = \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} & dv = x \cdot dx \end{vmatrix}$, pa primjenom identiteta $x^2 = (x^2 + 1) - 1$ kojim se integral dobiven djelomičnom integracijom rastavlja na dva tablična integrala.)

29. $V \approx 2.26905$ kub.jed.

30. $V = \frac{1}{4} \cdot (\pi + 2) \cdot \pi^2 \approx 12.68637$ kub.jed.

31. $a = 1$.

32. $a = 5$.

33. $a = 1$.

34. $a = \frac{\pi}{2}$.

35. $a = \frac{3}{2} \cdot \pi$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

1. DODATNI PRIMJER 1. KOLOKVIJA

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite neodređeni integral $\int 130 \cdot \left(2 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot dx$ i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete.

1. Zadane su funkcije $F(x) = \frac{1}{27} \cdot x^3 \cdot (9 \cdot \ln^2 x - 6 \cdot \ln x + 2) + 2013^{\sqrt{2012}}$ i $f(x) = (x \cdot \ln x)^2$. Isključivo deriviranjem pokažite da je funkcija F primitivna funkcija funkcije f.

U zadatcima 2. – 6. odredite neodređeni integral i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete:

2. $\int 1456 \cdot u^3 \cdot (2 \cdot u^2 - 1)^{12} \cdot du$.

3. $\int (w+1) \cdot \sin(2 \cdot w) \cdot dw$.

4. $\int 15 \cdot \mathrm{ch}^5 y \cdot dy$.

5. $\int \frac{2 \cdot (z+2)}{z^2 - 2 \cdot z + 2} \cdot dz$.

6. $\int \frac{dt}{\sqrt{24 - 2 \cdot t - t^2}}$.

7. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os x, krivulja $y = \ln(x + 1) + 1$ i normala na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 1)$.

REZULTATI ZADATAKA

Napomena: U svim rezultatima je $C \in \mathbf{R}$ realna konstanta.

OBAVEZNI ZADATAK: $312 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 240 \cdot x \cdot \sqrt[12]{x} + 65 \cdot \sqrt{x} + C$

1. $F'(x) = \frac{1}{9} \cdot x^2 \cdot (9 \cdot \ln^2 x - 6 \cdot \ln x + 2) + \frac{1}{27} \cdot x^3 \cdot \left(18 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{6}{x}\right) = f'(x)$, što dokazuje tvrdnju.

2. *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t = 2 \cdot u^2 - 1 \Rightarrow u^2 = \frac{1}{2} \cdot (t+1) \\ dt = 4 \cdot u \cdot du \end{cases}$ i primijenite jednakost $u^3 = u^2 \cdot u$. Dobiva se: $13 \cdot (2 \cdot u^2 - 1)^{14} + 14 \cdot (2 \cdot u^2 - 1)^{13} + C$.

3. $\frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot \cos(2 \cdot x) + C$ ..

4. $3 \cdot \mathrm{sh}^5 y + 10 \cdot \mathrm{sh}^3 y + 15 \cdot \mathrm{sh}\, y + C$.

5. $\ln(x^2 - 2 \cdot x + 2) + 6 \cdot \mathrm{arctg}(x-1) + C$.

6. $\arcsin\left(\frac{x+1}{5}\right) + C$.

7. $P = \frac{e+2}{2 \cdot e} \approx 0.86788$ kv. jed.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

2. DODATNI PRIMJER 1. KOLOKVIJA

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite neodređeni integral $\int \left(x^{\frac{9}{5}} + 14 \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \cdot dx$ i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete.

U zadatcima 1. – 8. odredite neodređeni integral i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete:

1. $\int 18 \cdot x^8 \cdot (x^9 + 1)^7 \cdot dx$.

2. $\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \cdot dx$.

3. $\int 63 \cdot \sin^5 x \cdot \cos^6 x \cdot dx$.

4. $\int 165 \cdot \sin^4 x \cdot \cos^7 x \cdot dx$.

5. $\int \frac{x - 4}{x^2 + 2 \cdot x} \cdot dx$.

6. $\int \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 5 \cdot x - 2 \cdot x^2}}$.

9. S točnošću od 10^{-2} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju krivulje $y = \frac{e^x - 1}{e - 1}$ i $y = 2 \cdot x - x^2$.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA

Napomena: U svim zadatcima je $C \in \mathbf{R}$ realna konstanta.

OBAVEZNI ZADATAK: $I = \frac{5}{14} \cdot x^{\frac{14}{5}} + 8 \cdot x^{\frac{7}{4}} - 6 \cdot x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{5}{14} \cdot x^2 \cdot \sqrt[5]{x^4} + 8 \cdot x \cdot \sqrt[4]{x^3} - 6 \cdot \sqrt[3]{x} + C$.

1. $\frac{1}{4} \cdot \left(x^9 + 1\right)^8 + C$.

2. $2 \cdot x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x + C$.

3. $\frac{63}{11} \cdot \cos^{11} x - 14 \cdot \cos^9 x + 9 \cdot \cos^7 x + C$.

4. $-15 \cdot \sin^{11} x + 55 \cdot \sin^9 x - \frac{495}{7} \cdot \sin^7 x + 33 \cdot \sin^5 x + C$.

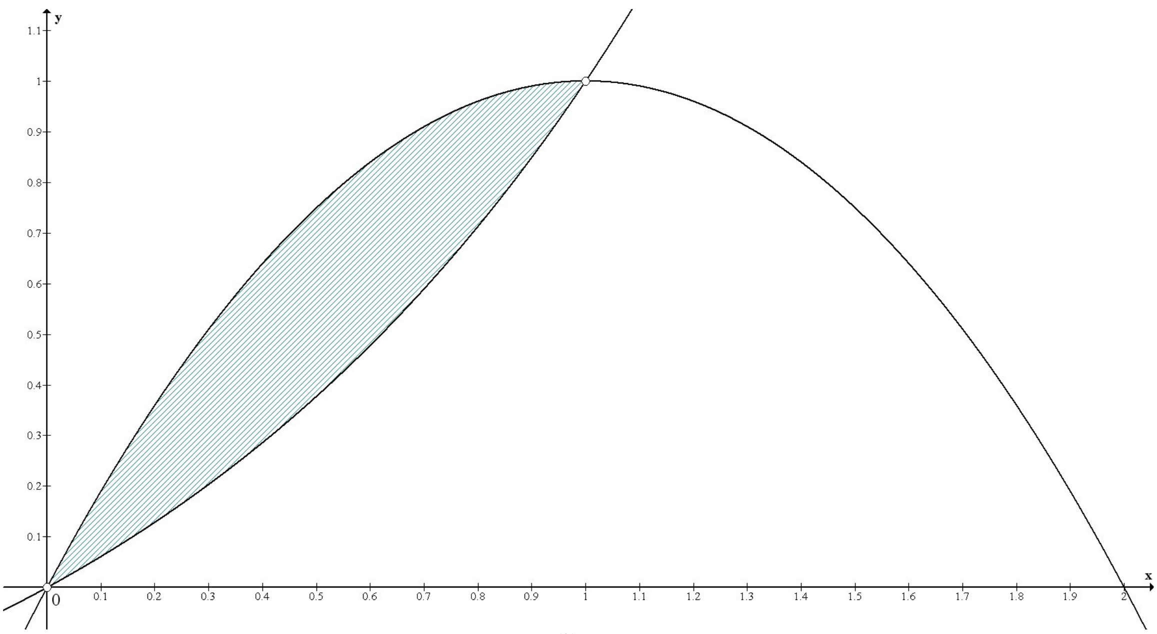
5. $3 \cdot \ln|x + 2| - 2 \cdot \ln|x| + C = \ln \frac{\left|(x+2)^3\right|}{x^2} + C$.

6. $\frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2 - x + 1\right) + \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (2 \cdot x - 1)\right] + C$.

7. $\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \ln\left|\sqrt{5} \cdot x - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1}\right| + C$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{4}{9} \cdot x - \frac{5}{9}\right) + C$.

9. Vidjeti Sliku 1. $P = \frac{4 - e}{3 \cdot e - 3} \approx 0.25$ kv. jed.



Slika 1.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

NEPRAVI INTEGRALI

ZADATCI:

Ispitajte konvergenciju sljedećih nepravih integrala i, ako konvergiraju, izračunajte ih:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{6 \cdot dx}{9 \cdot x^2 + 1}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{10 \cdot dx}{25 \cdot x^2 + 1}$.

3. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3 \cdot (x-1)}{(2 \cdot x)^2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx$.

4. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{x-3}{3 \cdot \sqrt{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 \cdot dx$.

5. $\int\limits_9^{+\infty} \frac{x-9}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{3}{2 \cdot x}\right)^2 \cdot dx$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2 \cdot x} + 2 \cdot e^x + 2} \cdot dx$.

7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\pi}{2 \cdot (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} \cdot dx$.

8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{4 \cdot \operatorname{arctg} x}{(2 \cdot \ln 2 + \pi) \cdot x^2} \cdot dx$.

9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{4 \cdot \operatorname{arcctg} x}{(\pi - 2) \cdot x^3} \cdot dx$.

10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\ln(2) \cdot (e^x + 1)}$.

11. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln 2}{x \cdot \ln^2 x} \cdot dx$.

12. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x - 2}$.

13. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^2} \cdot dx$.

14. $\int\limits_0^1 \frac{x-(x+1)\cdot\ln(x+1)}{[\ln(2)-1]\cdot(x^3+x^2)}\cdot dx$.

15. $\int\limits_0^1 \frac{e^x\cdot(x-1)+1}{(e-2)\cdot x^2}\cdot dx$.

REZULTATI ZADATAKA

1. Integral konvergira i jednak je π.
2. Integral konvergira i jednak je π.
3. Integral konvergira i jednak je 1.
4. Integral konvergira i jednak je 1.
5. Integral konvergira i jednak je 1.
6. Integral konvergira i jednak je $\operatorname{arctg}(2)-\frac{\pi}{4}$.
7. *Naputak*: Zamijenite $t = \operatorname{arctg} x$. Integral konvergira i jednak je 1.

8. *Naputak*: Djelomičnom integracijom dobije se:

$$\int\frac{4\cdot\operatorname{arctg}x}{x^2}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+\int\frac{4}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+4\cdot\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+$$

$$+4\cdot\int\frac{x^2+1}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx-4\cdot\int\frac{x^2}{x\cdot(x^2+1)}\cdot dx=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+4\cdot\ln x-2\cdot\ln(x^2+1)=(-4)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+2\cdot\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)+C$$

Prijelazom na graničnu vrijednost (uz primjenu L'Hospitalova pravila) slijedi da polazni integral konvergira, te da je jednak 1.

9. *Naputak*: Djelomičnom integracijom dobije se:

$$\int\frac{\operatorname{arcctg}x}{x^3}\cdot dx=-\frac{\operatorname{arcctg}x}{2\cdot x^2}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2\cdot(x^2+1)}=-\frac{\operatorname{arcctg}x}{2\cdot x^2}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^2\cdot(x^2+1)}\cdot dx=-\frac{\operatorname{arcctg}x}{2\cdot x^2}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{\operatorname{arcctg}x}{2\cdot x^2}+\frac{1}{2\cdot x}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x$$

Prijelazom na graničnu vrijednost (uz primjenu L'Hospitalova pravila) slijedi da polazni integral konvergira, te da je jednak 1.

10. *Naputak*: $\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1}\cdot dx=\int 1\cdot dx-\int\frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx=x-\ln(e^x+1)+C$. Integral konvergira i jednak je 1.

11. *Naputak*: Zamijenite $t = \ln x$. Integral konvergira i jednak je 1.

12. *Naputak*: $\int\frac{dx}{e^x-2}=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot(2-e^x)+\frac{1}{2}\cdot e^x}{e^x-2}\cdot dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{e^x}{e^x-2}\cdot dx=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\ln(e^x-2)+C$. Polazni integral divergira.

13. *Naputak*: Zamijenite $t=\frac{\sin x}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

14. *Naputak*: Zamijenite $t=\frac{\ln(x+1)}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

15. *Naputak*: Zamijenite $t=\frac{e^x-1}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

Napomena: Neodređeni integrali u **14.** i **15.** zadatku mogu se odrediti i bez navedenih zamjena, ali postupak određivanja je bitno dulji negoli uz navedenu zamjenu.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REDOVI BROJEVA

ZADATCI:

Izračunajte zbrojeve sljedećih redova:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^{2\cdot n}\left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right)$.

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^{2\cdot n}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right)$.

5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tg}^{4\cdot n}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right)$.

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{ctg}^{4\cdot n}\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right)$.

7. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x$.

a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda bude jednak $\frac{2}{3}$.

c) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $4 - 2\sqrt{3}$.

8. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^n x$.

a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\frac{2}{3}$.

c) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $4 + 2\sqrt{3}$.

9. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tg}^{2\cdot n} x$.

a) Odredite sve $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite $x \in \left\langle \frac{\pi}{2},\ \pi \right\rangle$ za koji je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

c) Odredite $x \in \left\langle \pi,\ \frac{3}{2} \cdot \pi \right\rangle$ za koji je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\frac{3}{2}$.

10. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ctg}^{2 \cdot n} x$.

a) Odredite sve $x \in \langle 0, \pi \rangle$ za koje je zadani red divergentan.

b) Odredite sve $x \in \langle \pi, 2 \cdot \pi \rangle$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $-\frac{1}{2}$.

c) Odredite sve $x \in \langle 2 \cdot \pi, 3 \cdot \pi \rangle$ za koje je zbroj svih članova zadanoga reda jednak $\frac{3}{2}$.

Ispitajte konvergenciju sljedećih redova i precizno obrazložite sve svoje tvrdnje:

11. $\sum \frac{n+1}{3^n}$.

12. $\sum (-1)^{2 \cdot n+1} \cdot \left(\frac{2 \cdot n+1}{5^n}\right)$.

13. $\sum \frac{2 \cdot n-1}{7^n}$.

14. $\sum (-1)^{2 \cdot n-1} \cdot \left(\frac{n^2+2011}{2^n}\right)$

15. $\sum \frac{n^2+n}{2^n}$.

16. $\sum (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n^3+1}$.

17. $\sum \frac{n^3-1}{2^{2 \cdot n}}$.

18. $\sum (-1)^{n-n^2} \cdot \left(\frac{n^3+n^2}{2^n}\right)$

19. $\sum \frac{1}{n!}$

20. $\sum (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot \frac{2^n}{n!}$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n \cdot 2^{2 \cdot n}}$.

23. $\sum \frac{n \cdot 7^n}{2^{3 \cdot n}}$.

24. $\sum \frac{n \cdot 3^{2 \cdot n}}{2^{3 \cdot n}}$.

25. $\sum \frac{n^{n+1}}{(2 \cdot n + 1)^n}$.

26. $\sum \frac{2^{n^2}}{2011^n}$.

27. $\sum (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{2 \cdot n - 1} \right)^n$.

28. $\sum (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{2 \cdot n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^n$.

29. $\sum (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n+1}{2 \cdot n + 1} \right)^{3 \cdot n}$

30. $\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot n^2 + 2011 \cdot n + 2012}{n^2 - 2013 \cdot n + 2014} \right)^{2011 \cdot n}$.

31. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

32. $\sum \frac{n}{2 \cdot n - 1}$.

33. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2) \cdot (n+1)}$.

34. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n}$.

35. $\sum \frac{n}{n^2 + 2}$.

36. $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$.

37. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$.

38. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

39. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1+\ln n}{(n \cdot \ln n)^5}$.

40. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

REZULTATI ZADATAKA:

1. 2.

2. $\frac{3}{4}$.

3. 4.

4. $\frac{4}{5}$.

5. $\frac{9}{8}$.

6. $\frac{9}{10}$.

7. **a)** $S_1 = \{k \cdot \pi : k \in \mathbf{Z}\}$;

b) $S_2 = \left\{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot k \pm 1) : k \in \mathbf{Z}\right\}$;

c) $S_3 = \left\{\frac{\pi}{6} \cdot (12 \cdot k \pm 5) : k \in \mathbf{Z}\right\}$

8. **a)** $S_1 = \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\}$;

b) $S_2 = \left\{\frac{\pi}{6} \cdot (12 \cdot k + 1) : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} \cdot (12 \cdot k + 5) : k \in \mathbf{Z}\right\}$;

c) $S_3 = \left\{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot k + 2) : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6 \cdot k - 1) : k \in \mathbf{Z}\right\}$.

9. **a)** $S_1 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$;

b) $x = \frac{2}{3} \cdot \pi$;

c) $x = \frac{7}{6} \cdot \pi$.

10. **a)** $S = \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4} \cdot \pi, \pi\right\rangle$;

b) $x_1 = \frac{7}{6} \cdot \pi,\ x_2 = \frac{11}{6} \cdot \pi$;

c) $x_1 = \frac{7}{3} \cdot \pi,\ x_2 = \frac{8}{3} \cdot \pi$.

11. *Naputak*: Primijenite D'Alembertov kriterij. Zadani red konvergira.
12. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
13. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
14. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
15. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
16. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red divergira.
17. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
18. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
19. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
20. Vidjeti naputak za 11. zadatak. Zadani red konvergira.
21. *Naputak*: Primijenite Cauchyjev kriterij. Zadani red konvergira.
22. *Naputak*: Primijenite Cauchyjev kriterij ili obrat po kontrapoziciji nužnoga uvjeta konvergencije reda. Zadani red divergira.
23. Vidjeti naputak za 21. zadatak. Zadani red konvergira.
24. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
25. *Naputak*: Zapišite $a_n = \left(\frac{n}{2 \cdot n + 1} \right)^n \cdot n$, pa primijenite Cauchyjev kriterij. Zadani red konvergira.
26. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
27. Vidjeti naputak za 21. zadatak. Zadani red konvergira.
28. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
29. Vidjeti naputak za 21. zadatak. Zadani red konvergira.
30. Vidjeti naputak za 22. zadatak. Zadani red divergira.
31. *Naputak*: Primijenite Raabeov kriterij. Zadani red konvergira.
32. *Naputak*: Primijenite Raabeov kriterij ili obrat po kontrapoziciji nužnoga uvjeta za konvergenciju reda. Zadani red divergira.
33. Vidjeti naputak za 31. zadatak. Zadani red konvergira.
34. Vidjeti naputak za 31. zadatak. Zadani red konvergira.
35. *Naputak*: Primijenite Cauchyjev integralni kriterij. Zadani red divergira.
36. *Naputak*: Primijenite Leibnizov kriterij. Zadani red konvergira.
37. Vidjeti naputak za 35. zadatak. Zadani red konvergira.
38. Vidjeti naputak za 36. zadatak. Zadani red konvergira.
39. Vidjeti naputak za 35. zadatak. Zadani red konvergira.
40. Vidjeti naputak za 36. zadatak. Zadani red konvergira.

REKURZIVNE RELACIJE. RJEŠAVANJE LINEARNIH HOMOGENIH REKURZIJA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.

Metodom teleskopiranja riješite sljedeće rekurzije uz zadane početne uvjete:

1. $a_n = a_{n-1} + 5,\ a_1 = 6.$

2. $a_n = a_{n-1} - 7,\ a_1 = 1.$

3. $a_n = 6 \cdot a_{n-1},\ a_1 = 36.$

4. $a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{3},\ a_1 = -3.$

5. $a_n = (n-1) \cdot a_{n-1},\ a(1) = 2.$

Riješite sljedeće linearne homogene rekurzije s konstantnim koeficijentima uz zadane početne uvjete:

6. $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 8 \cdot a_{n-2},\ a_1 = 2,\ a_2 = 20.$

7. $a_n = 8 \cdot a_{n-2} - 2 \cdot a_{n-2},\ a_1 = -2,\ a_2 = 20.$

8. $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2},\ a_1 = 6,\ a_2 = 27.$

9. $a_n = 8 \cdot a_{n-1} - 16 \cdot a_{n-2},\ a_1 = 12,\ a_2 = 80.$

10. $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} - 2 \cdot a_{n-3},\ a_1 = 2,\ a_2 = 6,\ a_3 = 8.$

REZULTATI ZADATAKA

1. $a_n = 5 \cdot n + 1$.

2. $a_n = -7 \cdot n + 8$.

3. $a_n = 6^{n+1}.$

4. $a_n = 9 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. $a_n = 2 \cdot n!.$

6. $a_n = (-2)^n + 4^n$.

7. $a_n = (-4)^n + 2^n$

8. $a_n = (n+1) \cdot 3^n$.

9. $a_n = (2 \cdot n + 1) \cdot 2^{2 \cdot n}$

10. $a_n = (-1)^n + 2^n + 1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

TAYLOROV I MACLAURINOV RED

ZADATCI:

Aproksimirajte sljedeće realne funkcije Maclaurinovim polinomom stupnja 4 (razlomke potpuno skratite i nemojte ih zapisivati kao decimalne brojeve):

1. $f(x) = x \cdot e^x$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

3. $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

5. $f(x) = x \cdot \sin x$.

6. $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

7. $f(x) = e^x \cdot \sin(2 \cdot x)$.

8. $f(x) = e^x \cdot \cos(2 \cdot x)$.

9. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

10. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

11. $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$.

12. $f(x) = x^2 \cdot \cos(2 \cdot x)$.

13. $f(x) = \ln(2 \cdot x + 1)$.

14. $f(x) = \ln(1 - x)$.

15. $f(x) = \ln(1 - 3 \cdot x)$.

16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$.

17. $f(x) = x \cdot \ln(1 + x)$.

18. $f(x) = e^x \cdot \ln(1 - x)$.

19. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x+1}$.

20. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Aproksimirajte sljedeće realne funkcije u okolini točke c Taylorovim polinomom stupnja 4 (razlomke potpuno skratite i nemojte ih zapisivati kao decimalne brojeve):

21. $f(x) = e^{1-x}$, $c = 1$.
22. $f(x) = e^{x+2}$, $c = -2$.
23. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$, $c = 1$.
24. $f(x) = x \cdot \ln x$, $c = 1$.
25. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $c = 1$.
26. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $c = 1$.
27. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $c = 1$.
28. $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{x^2}$, $c = 1$.
29. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, $c = \dfrac{\pi}{2}$.
30. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $c = \pi$.

Razvijte polinom $p(x)$ po potencijama od $x - c$:

31. $p(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3$, $c = 1$.
32. $p(x) = 4 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 10$, $c = -1$.
33. $p(x) = 7 \cdot x^3 - 47 \cdot x^2 + 107 \cdot x - 83$, $c = 2$.
34. $p(x) = 1 - 5 \cdot x - 3 \cdot x^2 - x^3$, $c = -2$.
35. $p(x) = x^3 - x$, $c = 3$.
36. $p(x) = x^3 + x$, $c = -1$.
37. $p(x) = x^3 - x^2$, $c = 1$.
38. $p(x) = 1 - x - x^3$, $c = 2$.
39. $p(x) = 1 + x - x^3$, $c = -2$.
40. $p(x) = x^3$, $c = \pi$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

1. $f(x) \approx M_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{6} \cdot x^4$.

2. $f(x) \approx M_4(x) = x - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

3. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 + x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^4$.

4. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^4$.

5. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

6. $f(x) \approx M_4(x) = 1 + x - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

7. $f(x) \approx M_4(x) = 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^4$.

8. $f(x) \approx M_4(x) = 1 + x - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{11}{3} \cdot x^3 - \frac{7}{24} \cdot x^4$.

9. $f(x) \approx M_4(x) = 1 - \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{120} \cdot x^4$.

10. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^4$.

11. $f(x) \approx M_4(x) = 1 - x + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4$.

12. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - 2 \cdot x^4$.

13. $f(x) \approx M_4(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot x^2 + \frac{8}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x^4$.

14. $f(x) \approx M_4(x) = -x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4$.

15. $f(x) \approx M_4(x) = -3 \cdot x - \frac{9}{2} \cdot x^2 - 9 \cdot x^3 - \frac{81}{4} \cdot x^4$.

16. $f(x) \approx M_4(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^3 - \frac{1}{64} \cdot x^3$

17. $f(x) \approx M_4(x) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^3$.

18. $f(x) \approx M_4(x) = -x - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x^3 - x^4$.

19. $f(x) \approx M_4(x) = x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{11}{6} \cdot x^3 - \frac{25}{12} \cdot x^4$.

20. $f(x) \approx M_4(x) = x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x^3 - x^4$.

21. $f(x) \approx T_4(x) = 1 - (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{6} \cdot (x-1)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x-1)^4$.

22. $f(x) \approx T_4(x) = 1 + (x+2) + \frac{1}{2}\cdot(x+2)^2 + \frac{1}{6}\cdot(x+2)^3 + \frac{1}{24}\cdot(x+2)^4$.

23. $f(x) \approx T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 - \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 + \frac{3}{8}\cdot(x-1)^4$.

24. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) + \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 - \frac{1}{6}\cdot(x-1)^3 + \frac{1}{12}\cdot(x-1)^4$.

25. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) + \frac{3}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{1}{12}\cdot(x-1)^4$.

26. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) - \frac{3}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{11}{6}\cdot(x-1)^3 - \frac{25}{12}\cdot(x-1)^4$.

27. $f(x) \approx T_4(x) = (x-1) - \frac{5}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{13}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{77}{12}\cdot(x-1)^4$.

28. $f(x) \approx T_4(x) = 3\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{1}{4}\cdot(x-1)^4$

29. $f(x) \approx T_4(x) = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{5}{48}\cdot\pi\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$.

30. $f(x) \approx T_4(x) = -\frac{1}{\pi}\cdot(x-\pi) + \frac{1}{\pi}\cdot(x-\pi)^2 + \frac{\pi^2-6}{6\cdot\pi^3}\cdot(x-\pi)^3 + \frac{6-\pi^2}{6\cdot\pi^4}\cdot(x-\pi)^4$.

31. *Naputak*: Zadatak se svodi na određivanje svih koeficijenata Taylorova razvoja polinoma p oko točke c, pri čemu vrijedi $a_n = 0$, za svaki $n \geq \deg(p) + 1$. Dobiva se: $p(x) = (x-1)^3 - 2\cdot(x-1)^2 + (x-1) + 1$.

32. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = 4\cdot(x+1)^3 + 3\cdot(x+1)^2 + 2\cdot(x+1) + 1$.

33. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = 7\cdot(x-2)^3 - 5\cdot(x-2)^2 + 3\cdot(x-2) - 1$.

34. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (-1)\cdot(x+2)^3 + 3\cdot(x+2)^2 - 5\cdot(x+2) + 7$.

35. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x-3)^3 + 9\cdot(x-3)^2 + 26\cdot(x-3) + 24$.

36. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x+1)^3 - 3\cdot(x+1)^2 + 4\cdot(x+1) - 2$.

37. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x-1)^3 + 2\cdot(x-1)^2 + (x-1)$.

38. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (-1)\cdot(x-2)^3 - 6\cdot(x-2)^2 - 13\cdot(x-2) - 9$.

39. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (-1)\cdot(x+2)^3 + 6\cdot(x+2)^2 - 11\cdot(x+2) + 7$.

40. Vidjeti naputak za 31. zadatak. $p(x) = (x-\pi)^3 + 3\cdot\pi\cdot(x-\pi)^2 + 3\cdot\pi^2\cdot(x-\pi) + \pi^3$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

FOURIEROVI REDOVI

1. Parna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = -x, \text{ za } x \in [-\pi, 0].$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

c) Koristeći razvoj zadane funkcije u Fourierov red na segmentu $[-\pi, \pi]$ izračunajte zbroj svih članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2 \cdot n - 1)^2}$.

2. Parna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x, \text{ za } x \in [0, \pi].$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

3. Neparna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = 1, \text{ za } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

c) Koristeći razvoj zadane funkcije u Fourierov red na segmentu $[-\pi, \pi]$ izračunajte zbroj svih članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n - 1}$.

4. Neparna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = 2, \text{ za } x \in \langle -\pi, 0 \rangle.$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

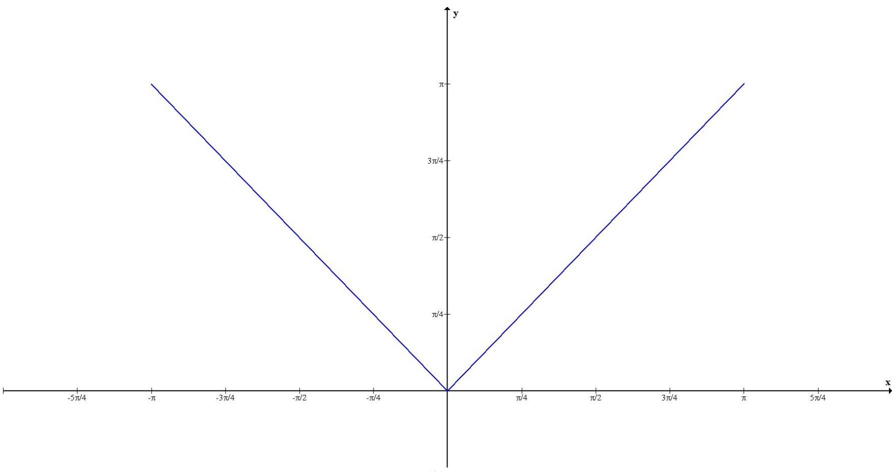
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA

1. **a)** Vidjeti Sliku 1.



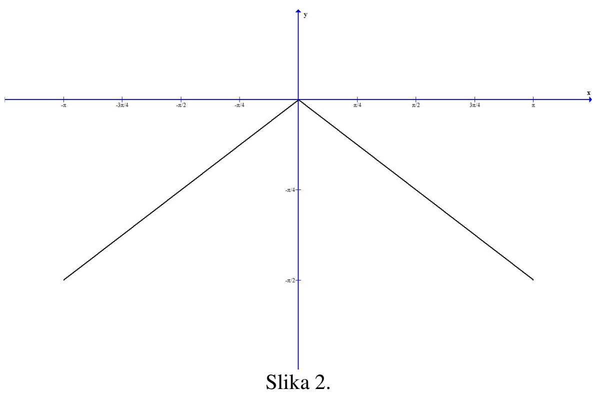
Slika 1.

Na segmentu $[-\pi, \pi]$ h nema točaka prekida, te ima jedan strogi ekstrem (strogi minimum 0 u $x = 0$). Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \cos x - \frac{4}{9 \cdot \pi} \cdot \cos(3 \cdot x) - \frac{4}{25 \cdot \pi} \cdot \cos(5 \cdot x) - \frac{4}{49 \cdot \pi} \cdot \cos(7 \cdot x).$

c) Za $x = 0$ dobiva se $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\right)$. Odatle slijedi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2 \cdot n - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. **a)** Vidjeti Sliku 2.

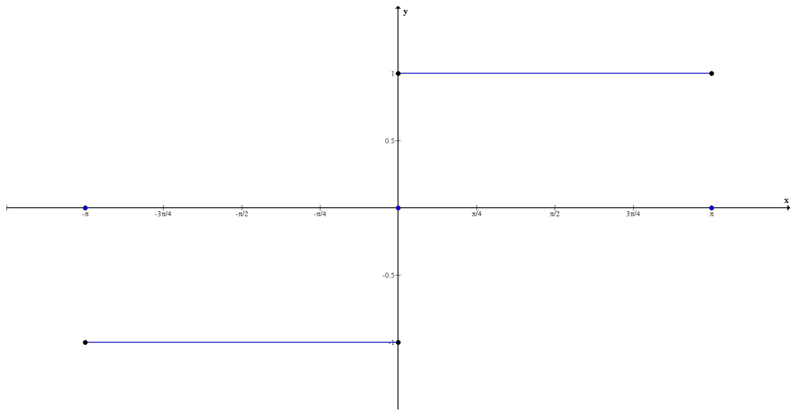


Slika 2.

Na segmentu $[-\pi, \pi]$ h nema točaka prekida, te ima jedan strogi ekstrem (strogi maksimum 0 u $x = 0$). Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cdot \cos x + \frac{2}{9 \cdot \pi} \cdot \cos(3 \cdot x) + \frac{2}{25 \cdot \pi} \cdot \cos(5 \cdot x) + \frac{2}{49 \cdot \pi} \cdot \cos(7 \cdot x)$.

3. **a)** Vidjeti Sliku 3.



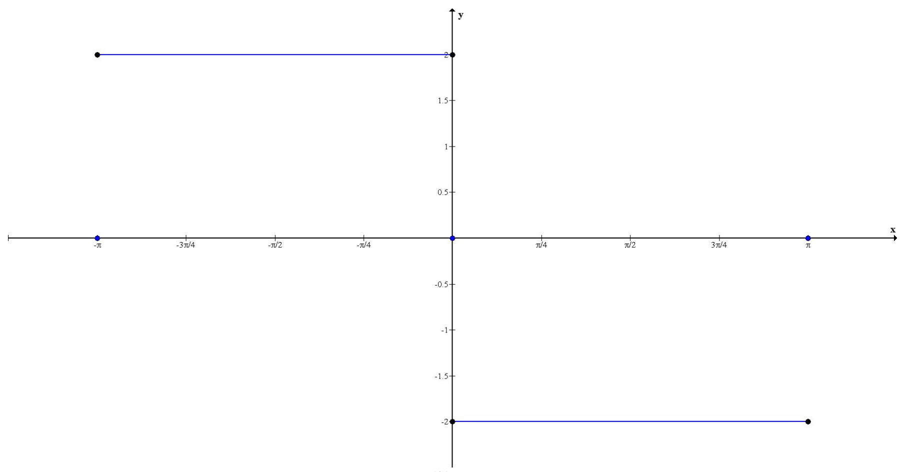
Slika 3.

Na segmentu [–π, π] *h* ima tri točke prekida (–π, 0 i π), te nema niti jedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin x + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) + \frac{4}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) + \frac{4}{7 \cdot \pi} \cdot \sin(7 \cdot x)$.

c) Za $x = \frac{\pi}{2}$ dobiva se $1 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$. Odatle slijedi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n - 1} = \frac{\pi}{4}$.

4. **a)** Vidjeti Sliku 4.



Slika 4.

Na segmentu [–π, π] *h* ima tri točke prekida (–π, 0 i π), te nema niti jedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = -\frac{8}{\pi} \cdot \sin x - \frac{8}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{8}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) - \frac{8}{7 \cdot \pi} \cdot \sin(7 \cdot x)$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

OGLEDNI PRIMJER 2. KOLOKVIJA

1. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int\limits_{\frac{3}{\pi}}^{+\infty} \frac{3 \cdot \sin\left(\frac{3}{x}\right)}{2 \cdot x^2} \cdot dx$. Ako integral konvergira, izračunajte ga.

2. Zadan je red $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^n x$. Odredite $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ za koji je zbroj svih članova reda jednak $\frac{2}{3}$.

3. <u>Koristeći Cauchyjev kriterij</u> ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2 \cdot n}}{n \cdot 5^n}$.

4. Aproksimirajte realnu funkciju $f(x) = \frac{1-x}{e^x}$ Maclaurinovim polinomom 4. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

5. Aproksimirajte realnu funkciju $g(x) = x^3 \cdot \ln(x - 2)$ oko točke $x = 3$ Taylorovim polinomom 4. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

6. Neparna $(2 \cdot \pi)$ – periodična realna funkcija $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$h(x) = \frac{1}{2}, \text{ za } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi, \pi]$, pa pomoću njega provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[-\pi, \pi]$ Fourierovim polinomom 7. stupnja. (Razlomke potpuno skratite i nemojte ih pretvarati u decimalne brojeve.)

7. Riješite rekurziju: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}$ uz početne uvjete $a_1 = 5$, $a_2 = 9$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

<u>REZULTATI ZADATAKA</u>

1. *Naputak*: Zamijenite $t = \frac{3}{x}$. Integral konvergira i jednak je 1.

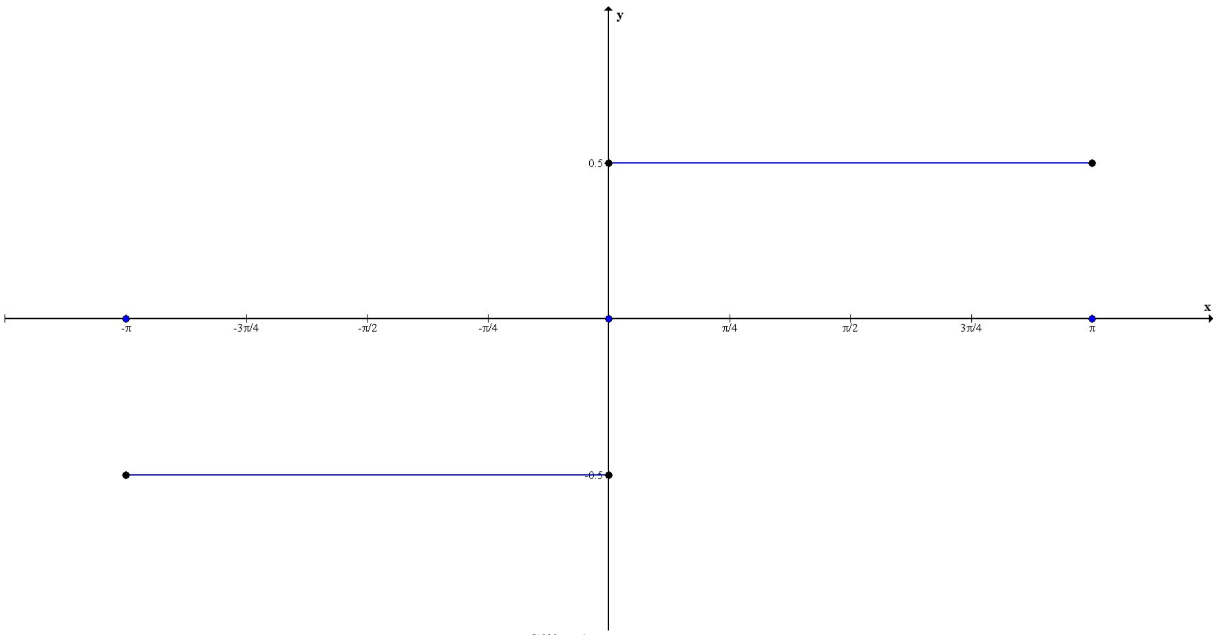
2. *Naputak*: Zbroj zadanoga reda jednak je $S = \frac{1}{1+\cos x}$. Dobiva se $x = \frac{\pi}{3}$.

3. Red konvergira $\left(r = \frac{4}{5}\right)$.

4. *Naputak*: Primijenite definiciju MacLaurinova reda, te jednakost $[\varphi(x) \cdot e^{-x}]' = [\varphi'(x) - \varphi(x)] \cdot e^{-x}$ koja bitno ubrzava izračun druge, treće i četvrte derivacije funkcije oblika $\varphi(x) \cdot e^{-x}$ (pogotovo ako je φ polinom). Dobiva se $f(x) \approx M_4(x) = 1 - 2 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{24} \cdot x^4$.

5. $g(x) \approx T_4(x) = 27 \cdot (x-3) + \frac{27}{2} \cdot (x-3)^2 + \frac{9}{2} \cdot (x-3)^3 - \frac{5}{4} \cdot (x-3)^4$.

6. **a)** *Naputak*: Prigodom crtanja grafa uočiti da je $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$. Vidjeti Sliku 1.



Slika 1.

Na segmentu $[-\pi, \pi]$ h ima tri točke prekida ($-\pi$, 0 i π), te nema niti jedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $h(x) \approx F_7(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot \sin x - \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{2}{5 \cdot \pi} \cdot \sin(5 \cdot x) - \frac{2}{7 \cdot \pi} \cdot \sin(7 \cdot x)$.

7. *Naputak*: Karakteristična jednadžba je $k^2 - 3 \cdot k + 2 = 0$, pa se dobiva $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Stoga je opće rješenje rekurzije $a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$. Iz početnih uvjeta lagano slijedi $(C_1, C_2) = (1, 2)$, pa je rješenje zadatka $a_n = 2^{n+1} + 1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je skup S opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe *ODJ* i navedite neko partikularno rješenje te jednadžbe ako je:

a) $S = \left\{ \frac{t}{2} \cdot (C + \ln^2 t) : C \in \mathbf{R} \right\}$, *ODJ*… $t \cdot y' - y = t \cdot \ln t$;

b) $S = \left\{ \frac{C + t^2}{2 \cdot e^t} : C \in \mathbf{R} \right\}$, *ODJ*… $e^t \cdot (y' + y) = t$;

c) $S = \left\{ C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t - \frac{1}{2} \cdot t \cdot \cos t : C_1, C_2 \in \mathbf{R} \right\}$, *ODJ*… $y'' + y = \sin t$;

d) $S = \left\{ C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot \cos t : C_1, C_2 \in \mathbf{R} \right\}$, *ODJ*… $y'' - y = \cos t$.

2. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} (x^2 + 1) \cdot y \cdot dy - \operatorname{arctg} x \cdot dx = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin(2 \cdot x) \cdot dy - 2 \cdot y \cdot dx = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \cdot dy - y \cdot (x + 1) \cdot dx = 0 \\ y(0) = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \cdot dy + (1 - x \cdot \operatorname{ctg} x) \cdot y \cdot dx = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}. \end{cases}$

3. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} x \cdot y' + y = \sin x; \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' + 2 \cdot y = e^{2 \cdot x} \\ y(0) = \frac{1}{4}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot y' - y = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \cdot y' + 2 \cdot y = 2 \\ y(0) = 2. \end{cases}$

4. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} x^2 \cdot (x \cdot y' - y) = y^2, \\ y(1) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \cdot (y' + y^2) = y, \\ y(1) = 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \cdot (y' - y^2) + y = 0, \\ y(e) = -\dfrac{1}{e}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \cdot y' + y = \sqrt{x \cdot y}, \\ y(-1) = 0. \end{cases}$

5. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera tangente u svakoj točki te krivulje dvostruko veći od omjera ordinate i apscise te točke.

6. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (0, -1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera tangente u svakoj točki te krivulje dvostruko manji od razlike apscise i ordinate te točke.

7. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (e, 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera bilo koje njezine normale jednak geometrijskoj sredini koordinata sjecišta te normale i krivulje.

8. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 2)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale u svakoj točki te krivulje jednak umnošku obiju koordinata te točke.

9. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 2)$ i ima svojstvo da je odsječak koji na osi ordinata odsijeca bilo koja njezina normala dvostruko veći od ordinate sjecišta te normale i krivulje.

10. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 2)$ i ima svojstvo da bilo koja tangenta te krivulje na osi ordinata odsijeca odsječak jednak razlici apscise i ordinate dirališta te tangente.

11. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (-1, -2)$ i ima svojstvo da bilo koja tangenta te krivulje na osi ordinata odsijeca odsječak dvostruko veći od razlike apscise i ordinate dirališta te tangente.

12. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 1)$ i ima svojstvo da je umnožak odsječka kojega bilo koja normala te krivulje odsijeca na osi apscisa i apscise sjecišta te normale i zadane krivulje jednak kvadratu ordinate sjecišta normale i krivulje.

13. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ i ima svojstvo da je odsječak koji na osi ordinata odsijeca bilo koja njezina tangenta jednak kvadratu ordinate dirališta te tangente.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2 ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA

2. *Naputak*: U svim podzadatcima riječ je o običnoj diferencijalnoj jednadžbi sa separiranim varijablama.
a) $y = \operatorname{arctg} x$;
b) $y = \operatorname{tg} x$;
c) $y = x \cdot e^x$;
d) $y = \frac{\sin x}{x}$.

3. *Naputak*: U svim podzadatcima riječ je o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda.
a) $y = -\frac{\cos x}{x}$;
b) $y = \frac{1}{4} \cdot e^{2 \cdot x}$;
c) $y = \sin x - 1$;
d) $y = 1 + \cos^2 x$.

4. *Naputak*: U svim podzadatcima riječ je o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi oblika $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^k$, gdje je $k \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$. Njezino rješenje (u implicitnom obliku) dano je izrazom:

$$y^{k-1} = \frac{e^{(1-k)\cdot \int P(x)\cdot dx}}{(1-k)\cdot \int e^{(1-k)\cdot \int P(x)\cdot dx} \cdot Q(x)\cdot dx + C}.$$

a) $y = x^2$;
b) $y = \frac{2}{x}$;
c) $y = -\frac{1}{x \cdot \ln x}$;
d) $y = \frac{(x+1)^2}{4 \cdot x}$.

5. *Naputak*: Iz uvjeta zadatka dobiva se obična diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama $y' = 2 \cdot \frac{y}{x}$,. Nakon njezina rješavanja nepoznatu konstantu C treba odrediti iz uvjeta $y(1) = 1$. Rezultat: $y = x^2$.

6. *Naputak*: Iz uvjeta zadatka dobiva se neheomogena linearna obična diferencijalna jednadžba $2 \cdot y' = x - y$. Nakon njezina rješavanja nepoznatu konstantu C treba odrediti iz uvjeta $y(0) = -1$. Rezultat: $y = e^{-\frac{x}{2}} + x - 2$.

7. *Naputak*: Iz uvjeta zadatka dobiva se obična diferencijalna jednadžba $-\frac{1}{y'} = \sqrt{x \cdot y}$ koju možemo zapisati u obliku $y' = -\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$, a to je obična diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama. Nakon njezina rješavanja nepoznatu konstantu C treba odrediti iz uvjeta $y(1) = 0$. Rezultat: $y = (3 - 3\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}$.

8. *Naputak*: Iz uvjeta zadatka dobiva se obična diferencijalna jednadžba $-\frac{1}{y'} = x \cdot y$ koju možemo zapisati u obliku $y \cdot y' = -\frac{1}{x}$, a to je obična diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama. Nakon njezina rješavanja nepoznatu konstantu C treba odrediti iz uvjeta $y(1) = 2$. Rezultat: $y = \sqrt{4 - 2 \cdot \ln x}$.

9. *Naputak*: Iz zadanih uvjeta dobije se $\frac{1}{y'} \cdot x + y = 2 \cdot y$, odnosno obična diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama $y' = x \cdot \frac{1}{y}$. Njezino opće rješenje je $y = \sqrt{C + x^2}$. Iz uvjeta da krivulja mora prolaziti točkom A dobije se $C = 3$, pa je tražena krivulja $y = \sqrt{x^2 + 3}$.

10. *Naputak i rezultat*: Neka je $y = f(x)$ tražena krivulja i neka je $T = (x_T, y_T)$ bilo koja njezina točka. Jednadžba tangente na krivulju čije je dirałište točka T glasi $y = f'(x_T) \cdot (x - x_T) + y_T$. Njezino sjecište s osi ordinata dobivamo ako u navedenu jednadžbu tangente stavimo $x = 0$. Tada je $S = (0, y_T - f'(x_T) \cdot x_T)$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost $y_T - f'(x_T) \cdot x_T = x_T - y_T$. Zbog proizvoljnosti točke T dobiva se obična diferencijalna jednadžba $y - x \cdot y' = x - y$, tj. nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda $x \cdot y' - 2 \cdot y = -x$. Njezino opće rješenje je $y = C \cdot x^2 + x$. Iz uvjeta da krivulja mora prolaziti točkom A dobiva se linearna jednadžba (s nepoznanicom C) $2 = C + 1$, a odavde je $C = 1$. Stoga je tražena krivulja parabola $y = x^2 + x$.

11. Vidjeti naputak za prethodni zadatak. Rezultat: $y = x^3 + x$.

12. *Naputak i rezultat*: Neka je $y = f(x)$ tražena krivulja i neka je $T = (x_T, y_T)$ bilo koja njezina točka. Jednadžba normale na krivulju u točki T glasi $y = -\frac{1}{f'(x_T)} \cdot (x - x_T) + y_T$. Njezino sjecište s osi apscisa dobivamo ako u navedenu jednadžbu tangente stavimo $y = 0$. Tada je $S = (f'(x_T) \cdot y_T + x_T, 0)$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost $x_T \cdot [f'(x_T) \cdot y_T + x_T] = y_T^2$. Zbog proizvoljnosti točke T dobiva se obična diferencijalna jednadžba $x \cdot (y' \cdot y + x) = y^2$, tj. Bernoullijeva obična diferencijalna jednadžba 1. reda $y' - \frac{1}{x} \cdot y = -x \cdot \frac{1}{y}$ Njezino opće rješenje je $y^2 = C \cdot x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \ln x$. Iz uvjeta da krivulja mora prolaziti točkom A dobiva se $C =$ $= 1$. Stoga je tražena krivulja (u implicitnom obliku) $x^2 - y^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \ln x = 0$.

13. *Naputak*: Iz zadanih uvjeta dobije se Bernoullijeva jednadžba $y' - \frac{1}{x} \cdot y = -\frac{1}{x} \cdot y^2$. Njezino opće rješenje je $y = \frac{x}{C + x}$, $C > 0$. Iz uvjeta da krivulja mora prolaziti točkom A dobiva se $C = 1$, pa je rješenje zadatka krivulja $y = \frac{x}{x + 1}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

1. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme (bez primjene Laplaceove transformacije):

a) $\begin{cases} y''-2\cdot y'-8\cdot y=0, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=8; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''+y'-12\cdot y=0, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=-1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''-10\cdot y'+25\cdot y=0 \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y''+16\cdot y'+64\cdot y=0 \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-9; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y''+9\cdot y=0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \\ y'\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)=-3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} y''+100\cdot y=0 \\ y(\pi)=-1, \\ y'(2\cdot\pi)=20. \end{cases}$

2. Bez primjene Laplaceove transformacije riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} y''-4\cdot y'+3\cdot y=3\cdot x-7 \\ y(1)=0, \\ y'(3)=1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''-y'-2\cdot y=2\cdot(1-x-x^2) \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''+5\cdot y'+4\cdot y=18\cdot e^{2\cdot x} \\ y(\ln 2)=4, \\ y'(0)=2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y''+y'-2\cdot y=72\cdot e^{-5\cdot x} \\ y(0)=5, \\ y'(0)=-19; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y''-2\cdot y'+y+8\cdot e^{-x}=0 \\ y(0)=-2, \\ y'(0)=3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} y''+8\cdot y'-9\cdot y=16\cdot\cos x-20\cdot\sin x \\ y(0)=1, \\ y'(0)=3; \end{cases}$

3. Isključivo primjenom Laplaceove transformacije riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} y''+y'+y=x+6, \\ y(0)=5, \\ y'(0)=1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9\cdot y''+2\cdot y+2\cdot x^2=0, \\ y(0)=9, \\ y'(0)=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''+y'=2\cdot x+1, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=-1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\cdot y''+3\cdot y'=9\cdot x^2-8, \\ y(0)=y'(0)=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y''-y'+2\cdot y=2\cdot e^{x}, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} y''+2\cdot y'+24\cdot e^{2\cdot x}=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-14; \end{cases}$

g) $\begin{cases} y''+y'-y+5\cdot\sin x=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=2; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2\cdot y''-2\cdot y'+5\cdot y=13\cdot\cos x, \\ y(0)=3, \\ y'(0)=-2; \end{cases}$

i) $\begin{cases} y''-y'=2\cdot e^{x}, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=2; \end{cases}$

j) $\begin{cases} y''+y=8\cdot\cos x, \\ y(0)=y'(0)=0; \end{cases}$

k) $\begin{cases} y''+y+6\cdot\sin x=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=3. \end{cases}$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA

1. *Naputak*: U svim podzadatcima riječ je o homogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 2. reda s konstantnim koeficijentima.

a) $y = 2 \cdot e^{4 \cdot x}$;
b) $y = e^{-4 \cdot x} + e^{3 \cdot x}$;
c) $y = x \cdot e^{5 \cdot x}$;
d) $y = (1 - x) \cdot e^{-8 \cdot x}$;
e) $y = \cos(3 \cdot x) - \sin(3 \cdot x)$;
f) $y = 2 \cdot \sin(10 \cdot x) - \cos(10 \cdot x)$.

2. *Naputak*: U svim podzadatcima riječ je o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 2. reda s konstantnim koeficijentima. Najprije treba riješiti pripadnu homogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima, a potom odrediti partikularno rješenje uvrštavajući pogodni oblik toga rješenja u samu običnu diferencijalnu jednadžbu. Opće rješenje polazne nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima je zbroj općega rješenja pripadne homogene linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima i partikularnoga rješenja polazne jednadžbe.

a) *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = a \cdot x + b$. Rezultat: $y = x - 1$;
b) *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Rezultat: $y = x^2 + e^{-x}$.
c) *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = a \cdot e^{2 \cdot x}$. Rezultat: $y = e^{2 \cdot x}$.
d) *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = a \cdot e^{-5 \cdot x}$. Rezultat: $y = e^{x} + 4 \cdot e^{-5 \cdot x}$.
e) *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^{x}$. Rezultat: $y = x \cdot e^{x} - 2 \cdot e^{-x}$.
f) *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$. Rezultat: $y = e^{x} + 2 \cdot \sin x$.

3. **a)** $y = x + 5$;
b) $y = 9 - x^2$;
c) $y = x^2 - x$;
d) $y = x^3 - 2 \cdot x^2$;
e) $y = e^{x} + e^{-x}$;
f) $y = 4 \cdot e^{-2 \cdot x} - 3 \cdot e^{2 \cdot x}$;
g) $y = 2 \cdot \sin x + \cos x$;
h) $y = 3 \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x$;
i) $y = 2 \cdot x \cdot e^{x}$;
j) $y = 4 \cdot x \cdot \sin x$;
k) $y = 3 \cdot x \cdot \cos x$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

OGLEDNI PRIMJERI 3. KOLOKVIJA

PRIMJER 1.

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je funkcija $y = x \cdot \ln(2011 \cdot x) + 2011$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 2011.$$

2. Napišite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 0)$ tako da bilo koja njezina tangenta na osi ordinata odsijeca odsječak dvostruko manji od razlike apscise i ordinate dirališta te tangente.

3. Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 20 \cdot y' + 221 \cdot y = 0.$$

4. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} 2 \cdot y'' - 3 \cdot y' + y = x - 3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

5. $\begin{cases} 10 \cdot x^3 \cdot y' = 10 \cdot x^2 \cdot y - y^2, \\ y(1) = -10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5 \cdot x \cdot y' - y = 3 \cdot \sqrt{x}, \\ y(1) = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'' + 4 \cdot y + 4 \cdot \sin(2 \cdot x) = 0, \\ y(\pi) = \pi, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

PRIMJER 2.

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je skup $S = \{\ln^2 x + C_1 \cdot \ln x + C_2 : C_1, C_2 \in \mathbf{R}\}$ opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 2 \cdot x.$$

2. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y' - 6 \cdot y + 10 \cdot e^{-2 \cdot x} = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

3. Napišite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 1)$ tako da dužina određena diralištem bilo koje tangente tražene krivulje i sjecištem te tangente s osi x ima polovište u sjecištu te tangente s osi y.

4. Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe $y'' + 14 \cdot y' + 49 \cdot y = 0$.

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

5. $\begin{cases} x^4 \cdot y' + x^3 \cdot y + y^2 = 0, \\ y(1) = -4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x \cdot y' - x \cdot y = x - y, \\ y(-1) = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4 \cdot y'' + y = 4 \cdot \cos \dfrac{x}{2}, \\ y(\pi) = \pi, \\ y'(\pi) = 1. \end{cases}$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA

PRIMJER 1.

1. Budući da je $y' = \ln(2011 \cdot x) + 1$ i $y'' = \frac{1}{x}$, slijedi:

$$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = x^2 \cdot \frac{1}{x} - x \cdot \ln(2011 \cdot x) - x + x \cdot \ln(2011 \cdot x) + 2011 = 2011,$$

što dokazuje tvrdnju.

2. *Naputak*: Iz podataka u zadatku dobiva se Cauchyjev problem $\begin{cases} y' - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot y = -\frac{1}{2}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Njegovo je rješenje $y = x \cdot \sqrt{x} + x$.

3. $y = e^{10 \cdot x} \cdot \left[C_1 \cdot \cos(11 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(11 \cdot x)\right], C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

4. *Naputak*: Provjerite imaju li polinomi $p_1(s) = 2 \cdot s^2 - 3 \cdot s + 1$ i $p_2(s) = 2 \cdot s^3 + s^2 - 3 \cdot s + 1$ zajedničke nultočke, tj. jesu li $s = 1$ i $s = \frac{1}{2}$ nultočke polinoma p_2. Tako se dobiju rastavi $p_1(s) = (s - 1) \cdot (2 \cdot s - 1)$ i $p_2(s) = (2 \cdot s - 1) \cdot (s^2 + s - 1)$. Rezultat: $y = x + e^x$.

5. *Naputak*: Riječ je o Bernoullijevoj ODJ. Rezultat: $y = (-10) \cdot x^2$.

6. *Naputak*: Riječ je o nehomogenoj linearnoj ODJ 1. reda. Rezultat: $y = 2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[5]{x}$.

7. *Naputak*: Partikularno rješenje potražite u obliku $p(x) = x \cdot [M \cdot \cos(2 \cdot x) + N \cdot \sin(2 \cdot x)]$.
Rezultat: $y = x \cdot \cos(2 \cdot x)$.

**IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA**

PRIMJER 2.

1. $y' = \dfrac{C_1 + 2 \cdot \ln x}{x}, \; y'' = \dfrac{2 - C_1 - 2 \cdot \ln x}{x^2} \Rightarrow x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 2 \cdot x$.

2. $y = 2 \cdot x \cdot e^{-2 \cdot x}$.

3. $y = \sqrt{x}$.

4. $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-7 \cdot x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

5. $y = -4 \cdot x^3$.

6. $y = -1 - \dfrac{1}{x}$.

7. $y = x \cdot \sin \dfrac{x}{2}$.