Primjena određenih integrala pri računanju površine

Zadatak. Odrediti površinu koju zatvaraju krivulje $4y_1(x) = x^2 - 16$ i $y_2(x) = x - 4$.

Rješenje. Prva od dviju zadanih funkcija je implicitno zadana kvadratna funkcija, dakle parabola. Njezine nultočke su rješenja jednadžbe

$$x^2 - 16 = 0,$$

dakle -4 i 4. Dijeljenjem jednadžbe $4y_1(x) = x^2 - 16$ s 4 dobivamo

$$y_1(x) = \frac{x^2}{4} - 4,$$

odnosno eksplicitnu jednadžbu parabole. Odavde čitamo da parabola ima tjeme u točki $(0, -4)$ i, kako je koeficijent $1/4$ koji množi x^2 veći od 0, parabola je okrenuta prema gore. Sada imamo sve podatke koji su nam potrebni da je nacrtamo (prikazana je na slici na sljedećoj stranici).
Druga funkcija zadana u zadatku je pravac $y_2(x) = x - 4$. On siječe os x u točki 4 a os y u točki -4. Prikazan je zajedno s parabolom na slici. Sada je uočljivo područje koje zatvaraju ove dvije krivulje. Iz slike vidimo da tu površinu možemo dobiti integracijom između točaka **u kojima** se parabola i pravac sijeku. (Te točke dobivamo rješavanjem jednadžbe $y_1(x) = y_2(x)$, odnosno $\frac{x^2}{4} - 4 = x - 4$. Odavde slijedi $x^2 = 4x$, dakle $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$.)
Integraciju provodimo na sljedeći način. Integral

$$I_1 = \int_0^4 y_1(x)dx$$

predstavlja površinu koju zatvara parabola i koordinatne osi u četvrtom kvadrantu s **negativnim predznakom** jer se graf na segmentu $[0, 4]$ nalazi ispod osi x. Slično, integral

$$I_2 = \int_0^4 y_2(x)dx$$

je površina trokuta kojeg zatvaraju pravac i koordinatne osi, ali također s negativnim predznakom. Sada traženu površinu P dobivamo kao razliku

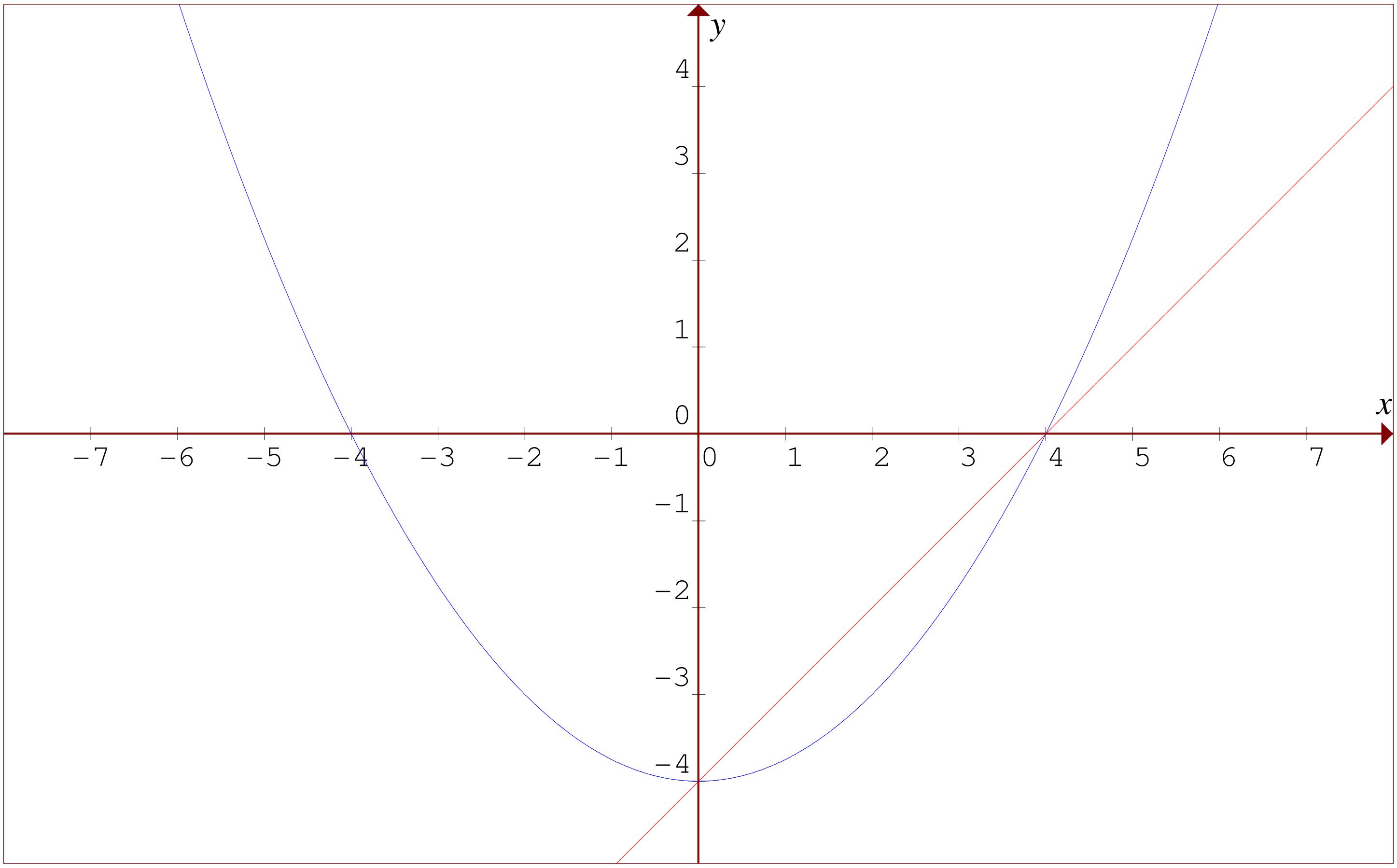
$$P = -I_1 - (-I_2) = I_2 - I_1.$$

Primijetimo da smo promijenili predznak brojevima I_1 i I_2 kako bismo dobili realne površine koje oni predstavljaju. Prema tome,

$$P = \int_0^4 y_2(x)dx - \int_0^4 y_1(x)dx = \int_0^4 (y_2(x) - y_1(x))dx =$$

$$= \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^4 = \frac{16}{2} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Graphmatica 2.0f © 2008 kSoft, Inc. - Untitled



Equations on screen:

1. y = x - 4
2. 4y = x^2 - 16