Nepravi integrali

Zadatak. Riješite integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx.$$

Rješenje. Kvadratnu funkciju x^2+4x+9 u nazivniku možemo zapisati kao $(x+2)^2+5$. Ukoliko neizmjerne granice integracije zamijenimo s $-a$ i a, koristeći limes početni integral postaje

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{1}{(x+2)^2+5} dx$$

Ovo je tablični integral, pa dobivamo

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{1}{(x+2)^2+5} dx &= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \right) \Bigg|_{-a}^{a} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{a\to\infty} \left(\arctan \frac{a+2}{\sqrt{5}} - \arctan \frac{-a+2}{\sqrt{5}} \right)\end{aligned}$$

Kako a teži u beskonačno, argumenti funkcija arkus tangens teže u ∞ odnosno $-\infty$. Prema tome, slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{a\to\infty} \left(\arctan \frac{a+2}{\sqrt{5}} - \arctan \frac{-a+2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Očekivali smo pozitivno rješenje budući da je graf funkcije $\frac{1}{(x+2)^2+5}$ uvijek iznad osi x.

Zadatak. Pokažite da vrijedi

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{x^3} dx = \frac{n}{2} \int_{1}^{\infty} \frac{\ln^{n-1} x}{x^3} dx.$$

Rješenje. Neizmjernu gornju granicu zamjenjujemo s b i rješavamo tako dobiven obični integral parcijalnom integracijom:

$$\int_{1}^{b} \frac{\ln^n x}{x^3} dx = \left(-\frac{\ln^n x}{2x^2} \right) \Bigg|_{1}^{b} + \frac{n}{2} \int_{1}^{b} \frac{\ln^{n-1} x}{x^3} dx.$$

Uvrštavanjem granica, izraz u zagradi postaje

$$-\frac{\ln^n b}{2b^2}.$$

Korištenjem L'Hospitalovog pravila, n puta derivirajući brojnik i nazivnik po b rješavamo limes

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln^n b}{2b^2} = \lim_{b\to\infty} \frac{n!}{2^{n+1} b^2} = \frac{n!}{2^{n+1}} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^2} = 0,$$

a odavde slijedi tvrdnja zadatka.