TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Primitivna funkcija i neodređeni integral. Izravno integriranje. Metoda zamjene. Metoda djelomične integracije.

ZADATCI:

1. Pokažite da je funkcija F primitivna funkcija realne funkcije f ako je:

a) $F(x)=2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\cdot\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+2013^{2012}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

b) $F(x)=\dfrac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}-x+2\cdot\sqrt{x}-2\cdot\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-2012^{2013}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$;

c) $F(x)=\dfrac{\ln(2012-e^{x})-x}{2012}+2013^{2012}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}-2012}$;

d) $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+2012^{2011}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$;

e) $F(x)=x\cdot\left(\ln^2 x-2\cdot\ln x+2\right)-2011^{2012}$ $f(x)=\ln^2 x$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2\cdot dx$;

b) $\int\left(\sqrt[6]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3\cdot dx$;

c) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot dx$;

d) $\int x\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[24]{x^{17}}+\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[8]{x^7}\right)\cdot dx$;

e) $\int\dfrac{1}{x^9}\cdot\left(x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}-x\cdot\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(x\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\cdot dx$.

3. Pogodnom zamjenom odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int x\cdot(4\cdot x-1)^{10}\cdot dx$;

b) $\int\dfrac{\ln^3(x+1)}{2\cdot x+2}\cdot dx$;

c) $\int\dfrac{6\cdot e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}+2012}\cdot dx$;

d) $\int\sqrt{\dfrac{2\cdot\arcsin(4\cdot x)}{1-16\cdot x^2}}\cdot dx$;

e) $\int\dfrac{dx}{(x^2-2\cdot x+2)\cdot e^{\operatorname{arctg}(x-1)}}$.

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

4. Metodom djelomične (parcijalne) integracije odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int (1-x)\cdot \cos x \cdot dx$;

b) $\int x^2 \cdot \sin x \cdot dx$ **;**

c) $\int \frac{x^2}{e^{2\cdot x}} \cdot dx$;

d) $\int \sqrt[3]{x^2} \cdot \ln\left(\sqrt{x}\right) \cdot dx$;

e) $\int 4 \cdot x \cdot \operatorname{arcctg} x \cdot dx$ **.**

5. Primjenom različitih metoda odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int 4022 \cdot x^{4023} \cdot e^{x^{2012}} \cdot dx$;

b) $\int \sin(2\cdot x) \cdot \ln(\sin x) \cdot dx$;

c) $\int \cos\sqrt{x} \cdot dx$;

d) $\int \operatorname{arcctg}\sqrt{x} \cdot dx$;

e) $\int \operatorname{arsh} x \cdot dx$.

6. Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

a) $\begin{cases} F'(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \ln x, \\ F(1) = \frac{7}{16}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} F'(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\cos(2\cdot x)}, \\ F(0) = -\frac{5}{4}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} F'(x) = \arccos\frac{x}{2}, \\ F(-2) = -2\cdot\pi. \end{cases}$

d) $\begin{cases} F'(x) = \operatorname{arch}(2\cdot x), \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} F'(x) = x \cdot \operatorname{tg}\left(x^2+1\right), \\ F\left(\sqrt{2\cdot\pi - 1}\right) = 1. \end{cases}$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbf{R}$ konstanta.

1. *Naputak*: Deriviranjem pokažite da vrijedi jednakost $F' = f$.

2. *Naputak*: U svakom zadatku najprije izvedite algebarske operacije u integrandu i što više pojednostavnite dobivene rezultate. Potom primijenite pravila za integriranje.

a) $-\frac{12}{11} \cdot x \cdot \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{5} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \cdot x^2 + C;$

b) $\frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} + \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{18 \cdot \sqrt[6]{x^5}}{x} - \frac{1}{x} + C;$

c) $\frac{3}{5} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot \sqrt{x} + C;$

d) $\frac{2}{7} \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{8}{29} \cdot x^3 \cdot \sqrt[8]{x^5} + C;$

e) $-\frac{2}{15} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x^8} - \frac{1}{4 \cdot x^4} + C.$

3. **a)** *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := 4 \cdot x - 1, \\ x = \frac{1}{4} \cdot (t+1), \\ dx = \frac{1}{4} \cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{1}{48} \cdot (4 \cdot x - 1)^{12} + \frac{1}{44} \cdot (4 \cdot x - 1)^{11} + C$.

b) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := \ln(x+1), \\ dt = \frac{dx}{x+1}. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{1}{8} \cdot \ln^4(x+1) + C$.

c) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := e^{2 \cdot x} + 2012, \\ dt = 2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $3 \cdot \ln(e^{2 \cdot x} + 2012) + C$.

d) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t = \arcsin(4 \cdot x), \\ dt = \frac{4 \cdot dx}{\sqrt{1 - 16 \cdot x^2}}. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \arcsin(4 \cdot x) \cdot \sqrt{\arcsin(4 \cdot x)} + C$.

e) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t := \frac{1}{e^{\operatorname{arctg}(x-1)}} = e^{-\operatorname{arctg}(x-1)}, \\ dt = -\frac{dx}{1 + (x-1)^2} = -\frac{dx}{x^2 - 2 \cdot x + 2} \end{cases}$. Dobiva se: $\frac{1}{e^{\operatorname{arctg}(x-1)}} + C$.

4. **a)** $(1 - x) \cdot \sin x - \cos x + C$.

b) $2 \cdot x \cdot \sin x + (2 - x^2) \cdot \cos x + C;$

c) $-\dfrac{2\cdot x^2+2\cdot x+1}{4\cdot e^{2\cdot x}}+C$;

d) $\dfrac{3}{50}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot(5\cdot\ln x-3)+C$;

e) $2\cdot(x\cdot\operatorname{arcctg} x+x-\operatorname{arctg} x)+C$.

5. **a)** _Naputak_: Uočite da je $x^{4023}=x^{2012}\cdot x^{2011}$. Zamijenite $\begin{cases} t:=x^{2012}, \\ dt=2012\cdot x^{2011}\cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $2\cdot e^{x^{2012}}\cdot(x^{2012}-1)+C$;

b) _Naputak_: Zamijenite $\sin(2\cdot x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ i $\begin{cases} t:=\sin x, \\ dt=\cos x\cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $\dfrac{1}{2}\cdot\sin^2 x\cdot(2\cdot\ln(\sin x)-1)+C$.

c) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t:=\sqrt{x}, \\ dt=\dfrac{dx}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow dx=2\cdot t\cdot dt. \end{cases}$. Dobiva se: $2\cdot\left(\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+C$.

d) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t:=\sqrt{x}, \\ dt=\dfrac{dx}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow dx=2\cdot t\cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+C$.

e) _Naputak_: Primijenite djelomičnu integraciju prema shemi $\left\{\begin{matrix} u=\operatorname{Arsh} x & v=x \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} & dv=dx \end{matrix}\right\}$, a u preostalom integralu zamijenite $\begin{cases} t=x^2+1, \\ dt=2\cdot x\cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $x\cdot\operatorname{Arsh} x-\sqrt{x^2+1}+C$.

6. _Naputak_: Integriranjem prve jednadžbe (uz primjenu metoda zamjene, odnosno djelomične integracije) dobije se opći oblik funkcije F koji sadrži nepoznatu konstantu C. Potom se u dobivenu jednakost uvrste x i $F(x)$ iz početnoga uvjeta, pa se dobije linearna jednadžba s jednom nepoznanicom C. (_Napomena_: Zadatak **ne** treba rješavati kao običnu diferencijalnu jednadžbu.)

a) $F(x)=\dfrac{3}{16}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot(4\cdot\ln x-3)+1$;

b) $F(x)=-\dfrac{1}{4}\cdot e^{\cos(2\cdot x)}-1$;

c) $F(x)=x\cdot\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$;

d) $F(x)=x\cdot\operatorname{arch}(2\cdot x)-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot x^2-1}$;

e) $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left[\cos\left(x^2+1\right)\right]+1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Integriranje (i)racionalnih funkcija.

ZADATCI:

1. Metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke) odredite sljedeće neodređene integrale i pojednostavnite dobivene izraze što je više moguće:

a) $\int \frac{5}{6-x-x^2} \cdot dx$;

b) $\int \frac{16}{15-2 \cdot x-x^2} \cdot dx$;

c) $\int \frac{7}{6 \cdot x^2+x-2} \cdot dx$;

d) $\int \frac{50}{12+7 \cdot x-12 \cdot x^2} \cdot dx$

e) $\int \frac{2 \cdot dx}{x-x^3}$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{3 \cdot x+4}{x^2+5 \cdot x+6} \cdot dx$;

b) $\int \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot x}{x^2+x+1} \cdot dx$;

c) $\int \frac{3 \cdot x-2}{x^2+3 \cdot x+4} \cdot dx$;

d) $\int \frac{x^3-1}{x^3+x} \cdot dx$;

e) $\int \frac{x^4}{x^3+1} \cdot dx$.

3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int 8 \cdot \sqrt{x^2+x} \cdot dx$

b) $\int 8 \cdot \sqrt{12-x-x^2} \cdot dx$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6 \cdot x}}$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 \cdot x-x^2}}$;

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2 \cdot x-x^2}} \cdot dx$;

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{3 \cdot x}{\sqrt{x}+1} \cdot dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-1}$;

e) $\int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt{x}}$.

5. Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

a) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{x^2}{x+1}, \\ F(0) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x}, \\ F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{3 \cdot x - 1}{2 + x - x^2}, \\ F(1) = \dfrac{4}{3} \cdot \ln \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{1}{x^{2013} + x}, \\ F(1) = \dfrac{1}{2012} \cdot \ln \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

e) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x - x^2}}, \\ F(0) = \pi; \end{cases}$

f) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}, \\ F(0) = -1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{4 \cdot \sqrt{x} + 4}, \\ F(0) = 1. \end{cases}$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbf{R}$ konstanta.

1. **a**) $\ln(x + 3) - \ln(2 - x) + C$ (ili $\ln\dfrac{x+3}{2-x} + C$);

b) $2 \cdot \ln(x + 5) - 2 \cdot \ln(3 - x) + C$ (ili $2 \cdot \ln\dfrac{x+5}{3-x} + C$);

c) $\ln(1 - 2 \cdot x) - \ln(3 \cdot x + 2) + C$ (ili $\ln\dfrac{1-2\cdot x}{3\cdot x+2} + C$);

d) $\ln(4 \cdot x + 3) - \ln(4 - 3 \cdot x) + C$ (ili $\ln\dfrac{4\cdot x+3}{4-3\cdot x} + C$);

e) $2 \cdot \ln x - \ln(x + 1) - \ln(1 - x) + C$ (ili $\ln\dfrac{x^2}{1-x^2} + C$).

2. **a**) $5 \cdot \ln(x + 3) - 2 \cdot \ln(x + 2) + C$;

b) $\sqrt{3}\cdot\ln(x^2+x+1)-2\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\cdot x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

c) $\dfrac{3}{2}\cdot\ln(x^2+3\cdot x+4)-\dfrac{13}{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\cdot x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$;

d) *Naputak*: Podijelite brojnik s nazivnikom prema pravilu za dijeljenje polinoma. Dobiva se: $x - \ln x - \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + C$;

e) $3 \cdot x^2 + 2 \cdot \ln(x + 1) - \ln(x^2 - x + 1) - 2 \cdot\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\cdot x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

3. **a**) $2\cdot(2\cdot x+1)\cdot\sqrt{x^2+x}-\ln\left(2\cdot x+1+2\cdot\sqrt{x^2+x}\right)+C$;

b) $2\cdot(2\cdot x+1)\cdot\sqrt{12-x-x^2}+49\cdot\arcsin\left(\dfrac{2\cdot x+1}{7}\right)+C$;

c) $\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6\cdot x}\right)+C$

d) $\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right)+C$ **;**

e) $\sqrt{2\cdot x-x^2}+2\cdot\arcsin(x-1)+C$;

4. **a**) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} x=(t-1)^2, \\ dx=2\cdot(t-1)\cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $2\cdot x\cdot\sqrt{x}-3\cdot x+6\cdot\sqrt{x}-6\cdot\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$.

b) *Naputak*: Zamijenite $\begin{cases} t=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow x=t^6, \\ dx=6\cdot t^5\cdot dt. \end{cases}$ Slijedi: $6\cdot\int\dfrac{t^5}{t^3+t^2}\cdot dt=6\cdot\int\dfrac{t^3}{t+1}\cdot dt.$ Rezultat: $2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\cdot\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$;

c) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t = \sqrt[3]{x} + 1 \Leftrightarrow x = (t-1)^3, \\ dx = 3 \cdot (t-1)^2 \cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3 \cdot \ln\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)$ $+ C$.

d) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t = \sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow x = t^2 + 2 \cdot t, \\ dx = 2 \cdot (t+1) \cdot dt. \end{cases}$. Dobiva se: $2 \cdot \sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$ $+ C$.

e) _Naputak_: Zamijenite $\begin{cases} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2, \\ dx = 2 \cdot t \cdot dt. \end{cases}$ Dobiva se: $\ln\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + C$.

5. **a)** $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + 1 + \ln(x+1)$ **;**

b) $F(x) = \ln\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)$ **;**

c) $F(x) = -\frac{5}{3} \cdot \ln(2-x) - \frac{4}{3} \cdot \ln(x+1)$ **;**

d) _Naputak_: $\frac{1}{x^{2013} + x} = \frac{1}{x \cdot (x^{2012} + 1)} = \frac{(x^{2012} + 1) - x^{2012}}{x \cdot (x^{2012} + 1)} = \frac{x^{2012} + 1}{x \cdot (x^{2012} + 1)} - \frac{x^{2012}}{x \cdot (x^{2012} + 1)} = \frac{1}{x} -$ $- \frac{x^{2011}}{x^{2012} + 1}$. Tako se dobije razlika dvaju integrala od kojih je prvi tablični, dok se drugi riješi zamjenom $\begin{cases} t = x^{2012} + 1, \\ dt = 2012 \cdot x^{2011} \cdot dx. \end{cases}$ Dobiva se: $F(x) = \ln x - \frac{1}{2012} \cdot \ln\left(x^{2012} + 1\right)$.

e) $F(x) = \arcsin(2 \cdot x + 1) + \frac{\pi}{2}$ **;**

f) $F(x) = \frac{3}{10} \cdot (2 \cdot x - 3) \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} - \frac{1}{10}$ **;**

g) $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right) + 1$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija.

ZADATCI:

1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sin^3 x \cdot \cos^{12} x \cdot dx$;

b) $\int \sin^5 x \cdot \cos^8 x \cdot dx$;

c) $\int \sin^8 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$;

d) $\int \sin^6 x \cdot \cos^5 x \cdot dx$;

e) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$;

f) $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) \cdot dx$;

g) $\int \mathrm{tg}^5 x \cdot dx$;

h) $\int \mathrm{ctg}^3 x \cdot dx$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sin(2 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) \cdot dx$;

b) $\int \sin(3 \cdot x) \cdot \cos(7 \cdot x) \cdot dx$;

c) $\int \cos(8 \cdot x) \cdot \cos(5 \cdot x) \cdot dx$;

d) $\int \sin(5 \cdot x) \cdot \sin(9 \cdot x) \cdot dx$.

3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$;

b) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

c) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

d) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$;

e) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$;

f) $\int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$.

4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} \cdot dx$;

b) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x} \cdot dx$;

c) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 4 \cdot \cos^2 x}} \cdot dx$;

d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot dx$.

5. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch}^{10} x \cdot dx$;

b) $\int \operatorname{sh}^5 x \cdot \operatorname{ch}^{12} x \cdot dx$;

c) $\int \operatorname{sh}^{16} x \cdot \operatorname{ch}^3 x \cdot dx$;

d) $\int \operatorname{sh}^{10} x \cdot \operatorname{ch}^5 x \cdot dx$;

e) $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x \cdot dx$;

f) $\int (\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x) \cdot dx$;

g) $\int \operatorname{th}^5 x \cdot dx$;

h) $\int \operatorname{cth}^3 x \cdot dx$.

6. Pomoću odgovarajuće zamjene odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \cdot dx$;

b) $\int \sqrt{4 \cdot x^6 - x^8} \cdot dx$;

c) $\int \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \cdot dx$;

d) $\int 15 \cdot \sqrt{x^8 + 16 \cdot x^6} \cdot dx$;

e) $\int \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} \cdot dx$;

f) $\int 35 \cdot \sqrt{x^{12} - 36 \cdot x^{10}} \cdot dx$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2 ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

REZULTATI ZADATAKA:

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbf{R}$ konstanta.

1. **a)** _Naputak_: Primijenite identitete $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x$ i $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $\frac{1}{15} \cdot \cos^{15} x - \frac{1}{13} \cdot \cos^{13} x + C$.

b) Vidjeti naputak za **a)** podzadatak. Dobiva se: $-\frac{1}{13} \cdot \cos^{13} x + \frac{2}{13} \cdot \cos^{13} x - \frac{1}{9} \cdot \cos^9 x + C$.

c) _Naputak_: Primijenite identitete $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x$ i $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \sin x, \\ dt = \cos x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $-\frac{1}{11} \cdot \sin^{11} x + \frac{1}{9} \cdot \sin^9 x + C$.

d) Vidjeti naputak za **c)** podzadatak. Dobiva se: $\frac{1}{11} \cdot \sin^{11} x - \frac{2}{9} \cdot \sin^9 x + \frac{1}{7} \cdot \sin^7 x + C$.

e) _Naputak:_ Koristeći identitete $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ i $\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot x)]$ slijedi:

$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin x \cdot \cos x)^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x)\right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2(2 \cdot x) = \frac{1}{8} \cdot [1 - \cos(4 \cdot x)]$. Dobiva se: $\frac{1}{8} \cdot x - \frac{1}{32} \cdot \cos(4 \cdot x) + C$.

f) _Naputak_: Primijenite identitet $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2$ = (prema **e)** podzadatku) = $1 - \frac{1}{4} \cdot [1 - \cos(4 \cdot x)] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \cos(4 \cdot x)$. Dobiva se: $\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot \sin(4 \cdot x) + C$.

g) _Naputak_: Primijenite identitet $\mathrm{tg}^5 x = \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \cdot \sin x = \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^5 x} \cdot \sin x = \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^5 x} \cdot$ $\cdot \sin x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $-\ln(\cos x) - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4 \cdot \cos^4 x} + C$.

h) _Naputak_: Primijenite identitet $\mathrm{ctg}^3 x = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \sin x, \\ dt = \cos x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $-\ln(\sin x) - \frac{1}{2 \cdot \sin^2 x} + C$.

2. _Naputak_: Primijenite identitete
$$\begin{cases} \sin(m \cdot x) \cdot \cos(n \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \{\sin[(m+n) \cdot x] + \sin[(m-n) \cdot x]\}; \\ \sin(m \cdot x) \cdot \sin(n \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \{\cos[(m-n) \cdot x] - \cos[(m+n) \cdot x]\}; \\ \cos(m \cdot x) \cdot \cos(n \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \{\cos[(m+n) \cdot x] + \cos[(m-n) \cdot x]\}. \end{cases}$$

a) $\frac{1}{4}\cdot\cos(2\cdot x)-\frac{1}{12}\cdot\cos(6\cdot x)+C$;

b) $\frac{1}{8}\cdot\cos(4\cdot x)-\frac{1}{20}\cdot\cos(10\cdot x)+C$;

c) $\frac{1}{6}\cdot\sin(3\cdot x)+\frac{1}{26}\cdot\sin(13\cdot x)+C$;

d) $\frac{1}{8}\cdot\sin(4\cdot x)-\frac{1}{28}\cdot\sin(14\cdot x)+C$.

3. **a)** <u>*Naputak*</u>: Zamijenite $\begin{cases} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \\ \sin x=\frac{2\cdot t}{1+t^2}, \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\cdot dt. \end{cases}$ Dobije se integral $\int\frac{2}{(t-1)^2}\cdot dt$ koji se riješi zamjenom $\begin{cases} u=t-1, \\ du=dt. \end{cases}$. Rezultat zadatka je: $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$

b) <u>*Naputak*</u>: Zamijenite $\begin{cases} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\cdot dt. \end{cases}$, Dobiva se: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

c) Vidjeti naputke za **a)** i **b)** podzadatak. Navedenom zamjenom dobije se integral $\int\frac{dt}{1+2\cdot t-t^2}$ koji je jednak integralu $\int\frac{dt}{2-(t-1)^2}$. Taj se integral svodi na tablični zamjenom $\begin{cases} u=t-1, \\ du=dt. \end{cases}$

Rezultat zadatka je: $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right)+C.$

d) Vidjeti naputke za **a)** i **b)** podzadatak. Navedenom zamjenom dobije se integral $\int\frac{dt}{t^2+2\cdot t-1}$ koji je jednak integralu $\int\frac{dt}{(t+1)^2-2}$. Taj se integral svodi na tablični zamjenom $\begin{cases} u=t+1, \\ du=dt. \end{cases}$

Rezultat zadatka je: $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right)+C.$

e) <u>Naputak</u>: Očito je $\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{1+(-\sin x)^2}$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \operatorname{tg} x, \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}. \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases}$ Dobiva se:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{tg} x\right)+C.$

f) <u>Naputak</u>: Očito je $\frac{1}{2+\cos^2 x}=\frac{1}{2+(-\cos x)^2}$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \operatorname{tg} x, \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}. \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases}$ Dobiva se:

$\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \operatorname{tg} x\right)+C.$

4. a) <u>Naputak</u>: Zamjenom $\begin{cases} t = \sin x, \\ dt = \cos x \cdot dx \end{cases}$ slijedi $\int \frac{dt}{t^2+t}=\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$, pa se uz novu zamjenu $\begin{cases} u = t+\frac{1}{2}, \\ du = dt \end{cases}$ dobije tablični integral $\int \frac{du}{u^2-\frac{1}{4}}$. Rezultat zadatka: $\ln \frac{\sin x}{1+\sin x}+C$. (*Napomena*: Integral $\int \frac{dt}{t^2+t}$ je moguće odrediti i metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke) uz isti rezultat.)

b) <u>Naputak</u>: Zamjenom $\begin{cases} t = \sin x, \\ dt = \cos x \cdot dx \end{cases}$ slijedi $\int \frac{dt}{t^3+t^2}=\int \frac{dt}{t^2\cdot(t+1)}$. Ovaj integral najbrže je riješiti metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke). Dobije se: $\frac{1}{t^2\cdot(t+1)}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t+1}$, pa je rješenje zadatka: $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

c) <u>Naputak</u>: Zamjenom $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$ slijedi $\int \frac{-dt}{\sqrt{t-4\cdot t^2}}=\int \frac{-dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(2\cdot t-\frac{1}{2}\right)^2}}$, pa se uz novu zamjenu $\begin{cases} u = 2\cdot t-\frac{1}{2}, \\ du = dt \end{cases}$ dobije tablični integral. Rezultat zadatka: $-\frac{1}{2}\cdot \arcsin(8\cdot \cos x - - 1)+C$.

d) _Naputak_: Najprije je $1 + \sin^2 x = 1 + (1 - \cos^2 x) = 2 - \cos^2 x$. Zamjenom $\begin{cases} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{cases}$ dobije se tablični integral. Rezultat: $-\arcsin\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

5. **a)** _Naputak_: Primijenite identitete $\mathrm{sh}^3 x = \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{sh}^2 x$ i $\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \mathrm{ch}\, x, \\ dt = \mathrm{sh}\, x \cdot dx \end{cases}$.

Dobiva se: $\frac{1}{13} \cdot \mathrm{ch}^{13} x - \frac{1}{11} \cdot \mathrm{ch}^{11} x + C$.

b) Vidjeti naputak za **a)** podzadatak. Dobiva se: $\frac{1}{17} \cdot \mathrm{ch}^{17} x - \frac{2}{15} \cdot \mathrm{ch}^{15} x + \frac{1}{13} \cdot \mathrm{ch}^{13} x + C$.

c) _Naputak_: Primijenite identitete $\mathrm{ch}^3 x = \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{ch}^2 x$ i $\mathrm{ch}^2 x = 1 + \sin^2 x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \mathrm{sh}\, x, \\ dt = \mathrm{ch}\, x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $\frac{1}{19} \cdot \mathrm{sh}^{19} x + \frac{1}{17} \cdot \mathrm{sh}^{17} x + C$.

d) Vidjeti naputak za **c)** podzadatak. Dobiva se: $\frac{1}{15} \cdot \mathrm{sh}^{15} x + \frac{2}{13} \cdot \mathrm{sh}^{13} x + \frac{1}{11} \cdot \mathrm{sh}^{11} x + C$.

e) _Naputak_: Koristeći definiciju funkcija sh x i ch x dobijemo: $\mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x = (\mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}\, x)^2 = \left[\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{16} \cdot (e^{2 \cdot x} - e^{-2 \cdot x})^2 = \frac{1}{16} \cdot e^{4 \cdot x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot e^{-4 \cdot x}$. Rezultat zadatka: $\frac{1}{64} \cdot (e^{4 \cdot x} - e^{-4 \cdot x}) - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{64} \cdot \mathrm{sh}(4 \cdot x) - \frac{1}{8} \cdot x + C$.

f) _Naputak_: Primijenite identitet $\mathrm{sh}^4 x + \mathrm{ch}^4 x = (\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x)^2 + 2 \cdot (\mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}\, x)^2 = 1 + 2 \cdot (\mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}\, x)^2$, te rezultat **e)** podzadatka. Dobiva se: $\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{32} \cdot (e^{4 \cdot x} - e^{-4 \cdot x}) = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{32} \cdot \mathrm{sh}(4 \cdot x) + C$.

g) _Naputak_: Primijenite identitet $\mathrm{th}^5 x = \frac{\mathrm{sh}^5 x}{\mathrm{ch}^5 x} = \frac{\mathrm{sh}^4 x}{\mathrm{ch}^5 x} \cdot \mathrm{sh}\, x = \frac{(\mathrm{sh}^2 x)^2}{\mathrm{ch}^5 x} \cdot \mathrm{sh}\, x = \frac{(\mathrm{ch}^2 x - 1)^2}{\mathrm{ch}^5 x} \cdot \mathrm{sh}\, x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \mathrm{ch}\, x, \\ dt = \mathrm{sh}\, x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $\ln(\mathrm{ch}\, x) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} + \frac{1}{4 \cdot \mathrm{ch}^4 x} + C$.

h) _Naputak_: Primijenite identitet $\mathrm{cth}^3 x = \frac{\mathrm{ch}^3 x}{\mathrm{sh}^3 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^3 x} \cdot \mathrm{ch}\, x = \frac{1 + \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^3 x} \cdot \mathrm{ch}\, x$, pa zamijenite $\begin{cases} t = \mathrm{sh}\, x, \\ dt = \mathrm{ch}\, x \cdot dx \end{cases}$. Dobiva se: $\ln(\mathrm{sh}\, x) - \frac{1}{2 \cdot \mathrm{sh}^2 x} + C$.

6. **a)** Polazni integral jednak je $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot dx$. Zamjenom $\begin{cases} x = \sin t, \\ dx = \cos t \cdot dt \end{cases}$ dobije se integral $\int \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \cdot dt = \int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t \cdot dt = \cos t + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|$. Preostaje primijeniti identitete

$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ i $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{\cos t + 1} = \frac{\sin t}{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}$, pa je konačan rezultat zadatka $\sqrt{1-x^2} + \ln|x| - \ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) + C$.

b) _Naputak_: Polazni integral najprije zapišemo u obliku $\int x^3 \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx = \int x^2 \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx$.

Zamjenom $\begin{cases} t = 4-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4-t \\ dt = -2\cdot x \cdot dx, \\ x\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot dt \end{cases}$ dobivamo integral $\int (t-4)\cdot\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt$ kojega razdvojimo na dva tablična integrala. Rezultat: $\frac{3\cdot x^4 - 4\cdot x^2 - 32}{15}\cdot\sqrt{4-x^2}$. (_Napomena_: Iako je zadatak moguće riješiti trigonometrijskom ili hiperbolnom zamjenom, ona se ne preporučuje jer se dobiju integrali bitno složeniji od integrala $\int (t-4)\cdot\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt$.)

c) Zadani integral je jednak $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\cdot dx$. Zamjenom $\begin{cases} x = 3\cdot \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{3}{\cos^2 t}\cdot dt \end{cases}$ dobijemo tablični integral $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|$. Preostaje primijeniti identitet $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} - 1}{\operatorname{tg} t}$, pa je polazni integral jednak $\sqrt{x^2+9} + 3\cdot\ln x - 3\cdot\ln\left(3+\sqrt{x^2+9}\right) + C$.

d) Vidjeti naputak za **b)** podzadatak. Rezultat: $(3\cdot x^2 - 32)\cdot(x^2+16)\cdot\sqrt{x^2+16} + C$.

e) _Naputak_: Zadani integral je jednak $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\cdot dx$. Zamjenom $\begin{cases} x = \frac{5}{\cos t}, \\ dx = \frac{5\cdot\sin t}{\cos^2 t}\cdot dt \end{cases}$ dobijemo $5\cdot\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot dt = 5\cdot\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\cdot dt = 5\cdot\left(\int\frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt\right) = 5\cdot\operatorname{tg} t - 5\cdot t$. Preostaje primijeniti identitet $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$ i dobiti rezultat $\sqrt{x^2-25} - 5\cdot\arccos\left(\frac{5}{x}\right) + C$.

f) _Naputak_: $\int 35\cdot\sqrt{x^{12} - 36\cdot x^{10}}\cdot dx = \int 35\cdot x^5\cdot\sqrt{x^2-36}\cdot dx = \int 35\cdot(x^2)^2\cdot x\cdot\sqrt{x^2-36}\cdot dx$, pa zamijenite $\begin{cases} t = x^2 - 36 \Leftrightarrow x^2 = t+36 \\ dt = 2\cdot x\cdot dx, \\ x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot dt \end{cases}$. Rezultat: $(5\cdot x^2 + 504\cdot x + 15120)\cdot(x^2-36)\cdot\sqrt{x^2-36} + C$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

**IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA**

Određeni integral i primjene.

ZADATCI:

1. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1 ... $y = x^2 - 2 \cdot x - 3$ i K_2... $x + y - 3 = 0$.
2. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1... $y = 2 - x - x^2$ i K_2... $x + y + 2 = 0$.
3. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1... $y = 4 + 5 \cdot x - x^2$ i K_2... $x - y - 4 = 0$.
4. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1… $y = 9 - x^2$ i K_2 … $y = x^2 - 9$.
5. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1… $y = (-x)^3$ i K_2… $x + y = 0$.
6. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1… $y = \dfrac{3}{x}$ i K_2 … $x + y = 4$.
7. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1… $y = x^3 + x - 2$ i K_2… $y = 2 \cdot (x^2 - 1)$.
8. Zadane su funkcije $f(x) = \sin^2 x$ i $g(x) = \cos^2 x$. Neka je a najveće strogo negativno rješenje jednadžbe $f(x) = g(x)$, a b najmanje strogo pozitivno rješenje iste jednadžbe. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = 0$, $x = a$ i $x = b$.
9. U točki $T = (1, y_T)$ krivulje K … $y = e^x - 1$ povučena je tangenta t na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K, t i $x = 0$.
10. U točki $T = (x_T, 0)$ krivulje K... $y = \ln(x + 1)$ povučena je normala n na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K, n i $x = 1$.
11. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os x, krivulja $y = 3 - e^{-x}$ i tangenta na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 2)$.
12. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os x, krivulja $y = 1 - \ln(x - 1)$ i normala na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 1)$.
13. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ na segmentu $[0, 1]$.
14. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = \sqrt{2 \cdot x - x^2}$.
15. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.
16. S točnošću od 10^{-5} izračunajte prosječnu vrijednost harmonijske funkcije $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ na njezinu osnovnu segmentu $\left[-\dfrac{\varphi}{\omega}, \dfrac{2 \cdot \pi - \varphi}{\omega}\right]$.
17. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu luka parabole $y = x^2 - x - 2$ na segmentu određenom njezinim nultočkama.
18. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu krivulje $y = \dfrac{2}{3} \cdot (x - 1) \cdot \sqrt{x - 1}$ na segmentu $[9, 81]$.
19. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu krivulje $y = 2 \cdot \left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}\right)$ na segmentu $[2 \cdot \ln 2, 4 \cdot \ln 2]$.
20. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu luka krivulje $y = \dfrac{4}{15} \cdot \left(2 + 3 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - 1\right) \cdot \sqrt{\sqrt{x} - 1}$ na segmentu $[625, 10\ 000]$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

21. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 8$ oko osi:
a) x;
b) y.

22. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = x^2$, $y = 0$, $x = 15$ i $x = 30$ oko osi:
a) x;
b) y.

23. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \pi$ oko osi:
a) x;
b) y.

24. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = 1 - e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$ oko osi:
a) x;
b) y.

25. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$ oko osi:
a) x;
b) y.

26. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sqrt{\arcsin x}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$ oko osi x.

27. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sqrt{x} \cdot e^x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ i $x = 1$ oko osi x.

28. S točnošću od 10^{-5} izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \operatorname{arsh} x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$ oko osi y.

29. S točnošću od 10^{-5} izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y = 0$, $x = 2 \cdot \ln 2$ i $x = 4 \cdot \ln 2$ oko osi y.

30. S točnošću od 10^{-5} izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3}{4} \cdot \pi$.

31. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a): $\int_0^1 x \cdot e^{a-x} \cdot dx = e - 2$.

32. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a): $\int_0^a \sqrt{10 - x} \cdot dx = \frac{38}{3}$.

33. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a): $\int_a^4 \ln \frac{x}{2} \cdot dx = 5 \cdot \ln 2 - 3$.

34. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a) u intervalu $[0, \pi]$: $\int_a^\pi \sin^3 x \cdot dx = \frac{2}{3}$.

35. Riješite jednadžbu (po nepoznanici a) u intervalu $[\pi, 2 \cdot \pi]$: $\int_\pi^a \cos^5 x \cdot dx = -\frac{8}{15}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

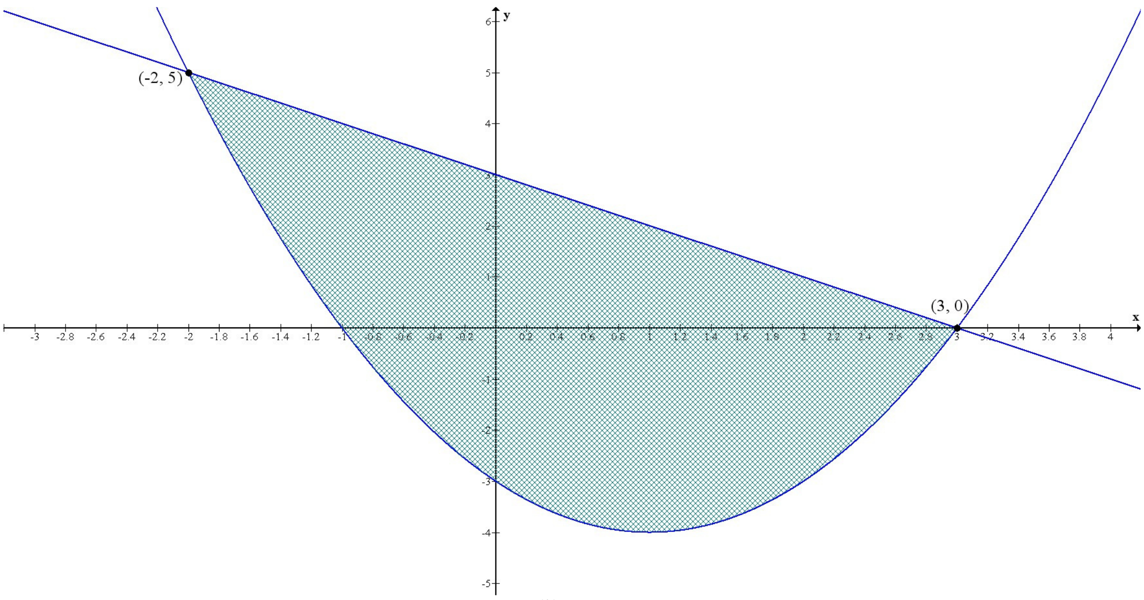
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

IZABRANI ZADATCI IZ MATEMATIKE 2
ZA RJEŠAVANJE NA DEMONSTRATURAMA

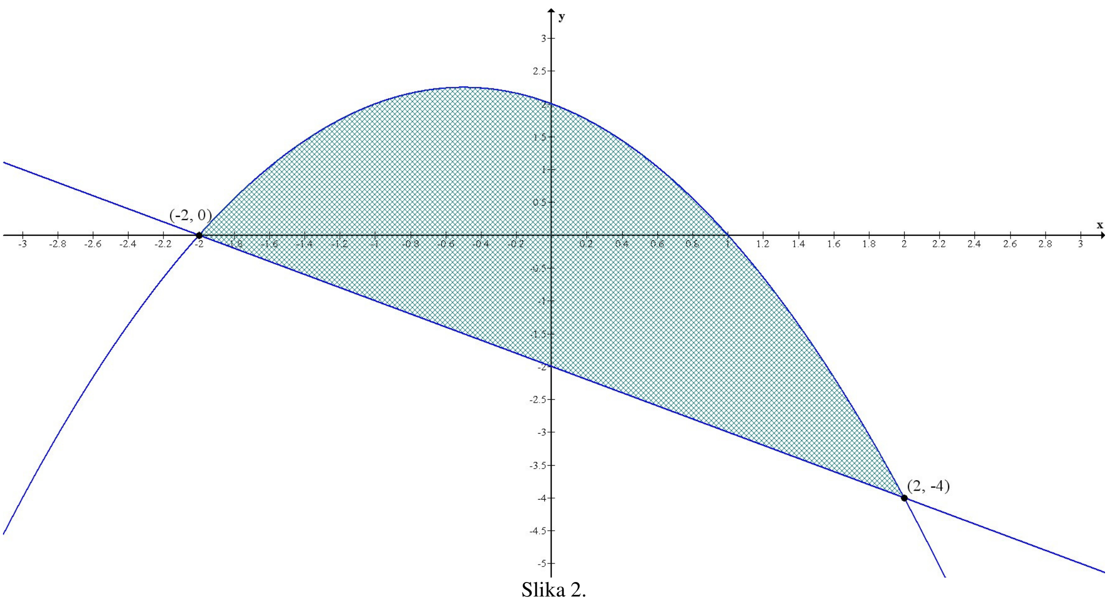
REZULTATI ZADATAKA

1. Vidjeti Sliku 1. $P=\left|\int\limits_{-1}^{3}(x^2-2\cdot x-3)\cdot dx\right|+\int\limits_{-2}^{3}(-x+3)\cdot dx-\int\limits_{-2}^{-1}(x^2-2\cdot x-3)\cdot dx=\frac{125}{6}$ kv. jed.



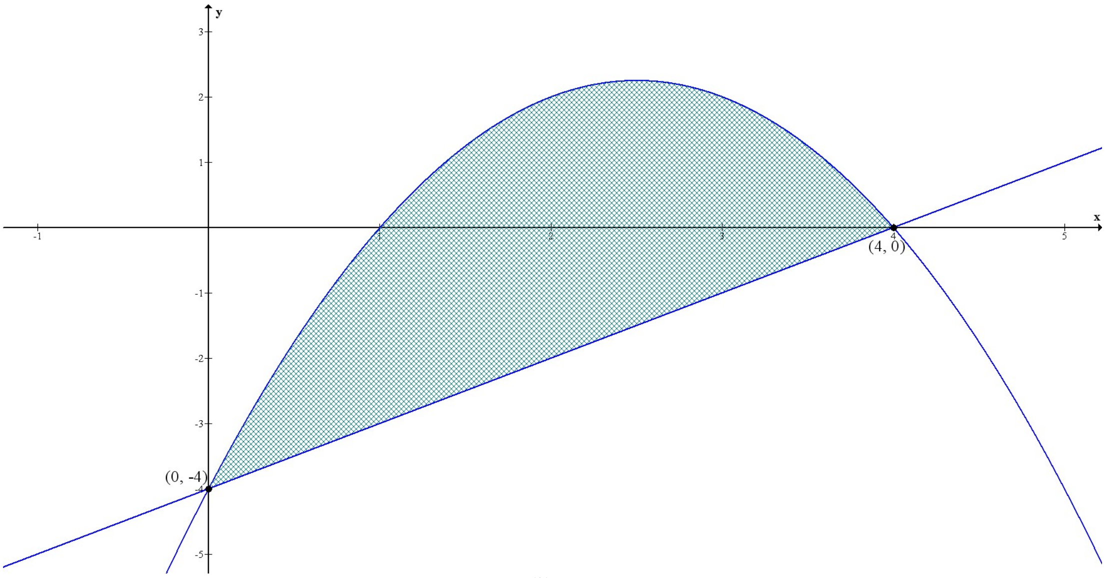
Slika 1.

2. Vidjeti Sliku 2. $P=\int\limits_{-2}^{1}(2-x-x^2)\cdot dx+\left|\int\limits_{-2}^{2}(-x-2)\cdot dx\right|-\left|\int\limits_{1}^{2}(2-x-x^2)\cdot dx\right|=\frac{32}{3}$ kv. jed.



Slika 2.

3. Vidjeti Sliku 3. $P = \int_1^4 (4 + 5 \cdot x - x^2) \cdot dx + \left| \int_0^4 (x - 4) \cdot dx \right| - \left| \int_0^1 (4 + 5 \cdot x - x^2) \cdot dx \right| = \frac{32}{3}$ kv. jed.



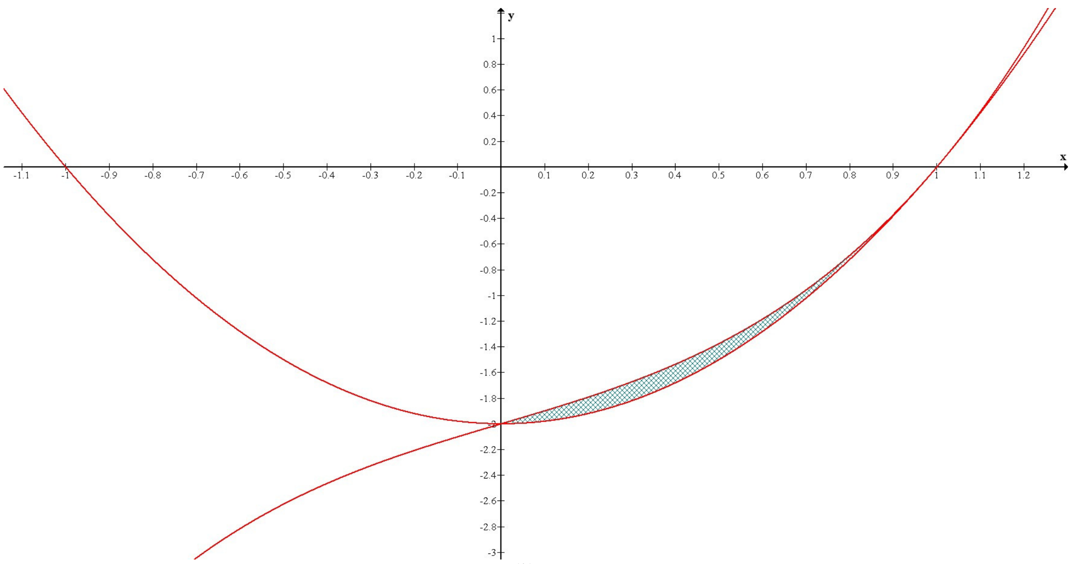
Slika 3.

4. $P = 72$ kv. jed.

5. $P = \frac{1}{2}$ kv. jed.

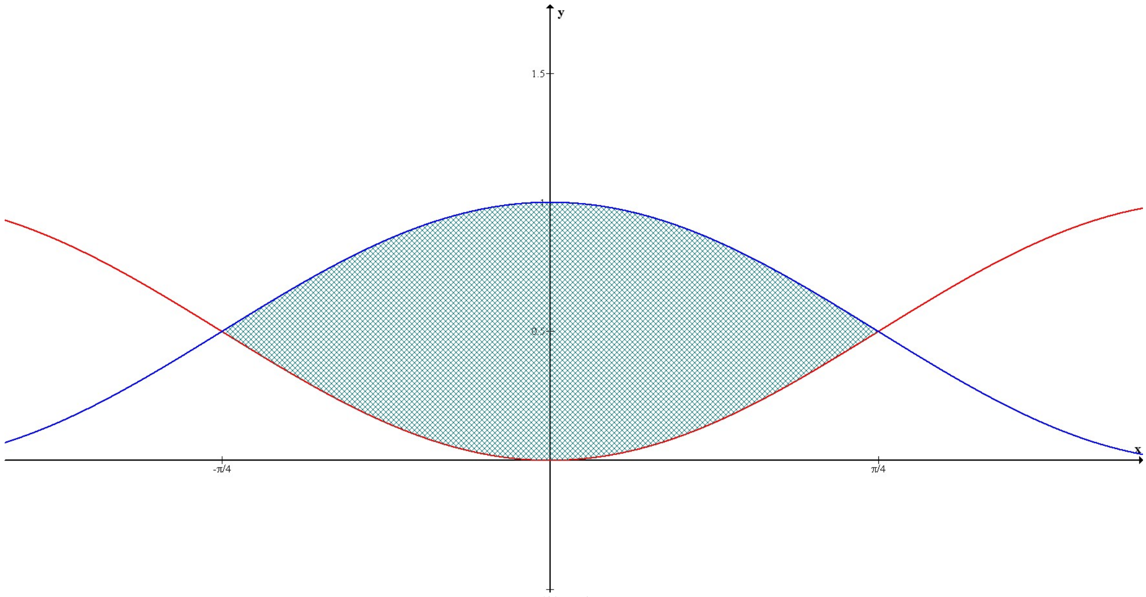
6. $P = 4 - 3 \cdot \ln 3$ kv. jed.

7. Vidjeti Sliku 4. $P = \left| \int_0^1 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot dx \right| - \left| \int_0^1 (x^3 + x - 2) \cdot dx \right| = \frac{1}{12}$ kv. jed.



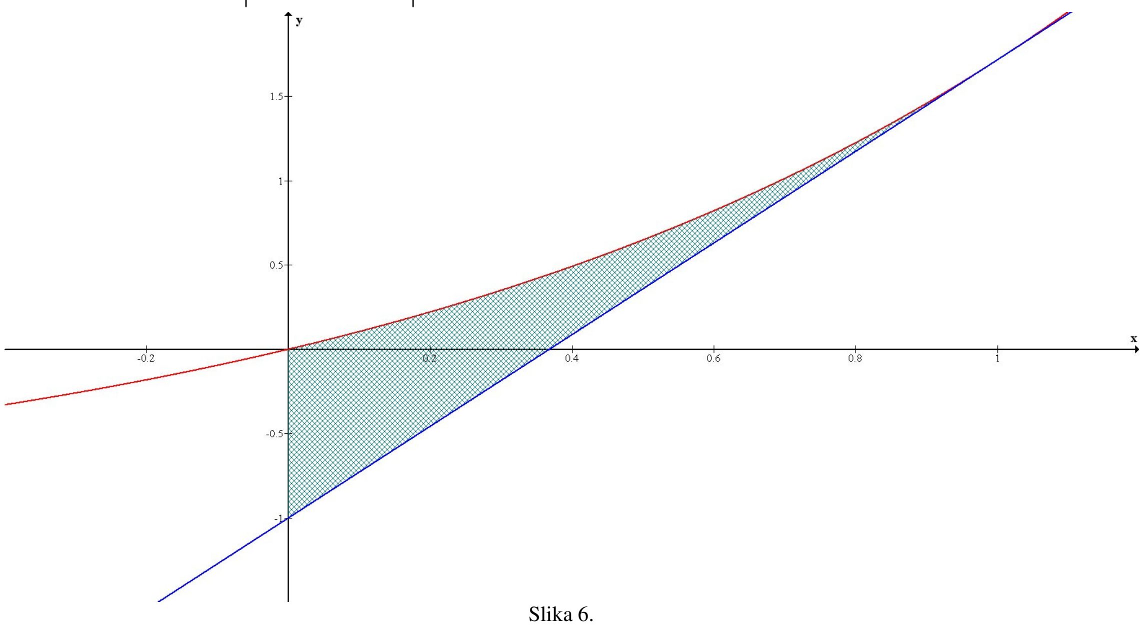
Slika 4.

8. Vidi Sl. 5. $P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2 \cdot x) \cdot dx = 1$ kv. jed.



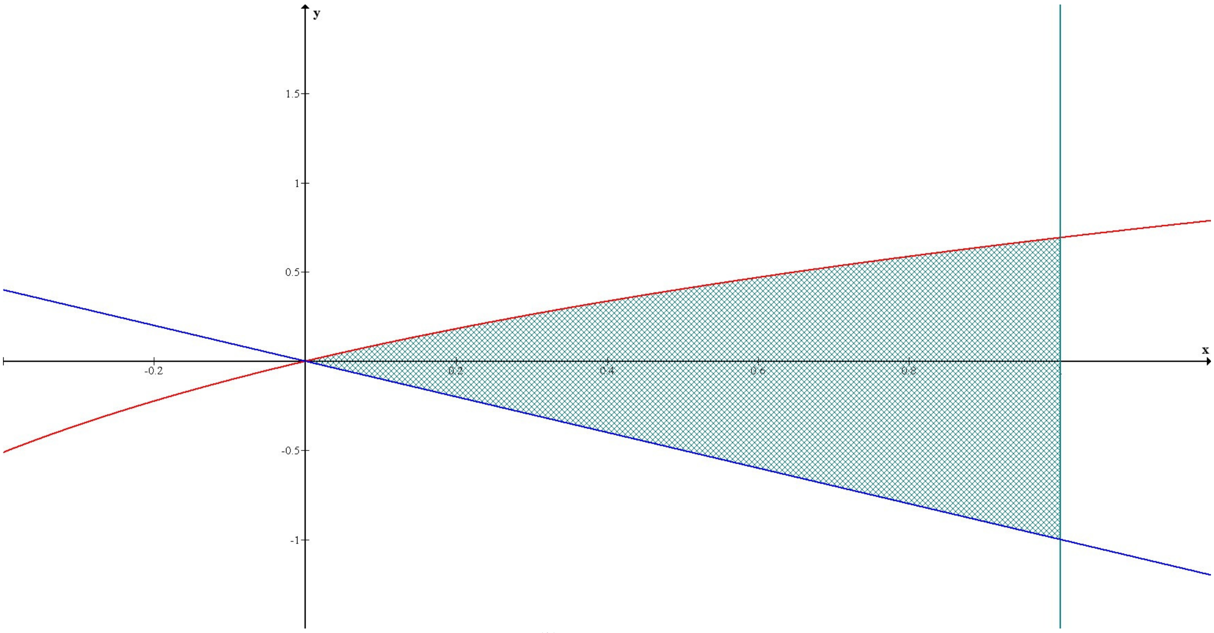
Slika 5.

9. Vidjeti Sliku 6. $P = \left| \int_0^{\frac{1}{e}} (e \cdot x - 1) \cdot dx \right| + \int_0^1 (e^x - 1) \cdot dx - \int_0^1 (e \cdot x - 1) \cdot dx = \frac{(e-1)^2}{2 \cdot e}$ kv. jed.



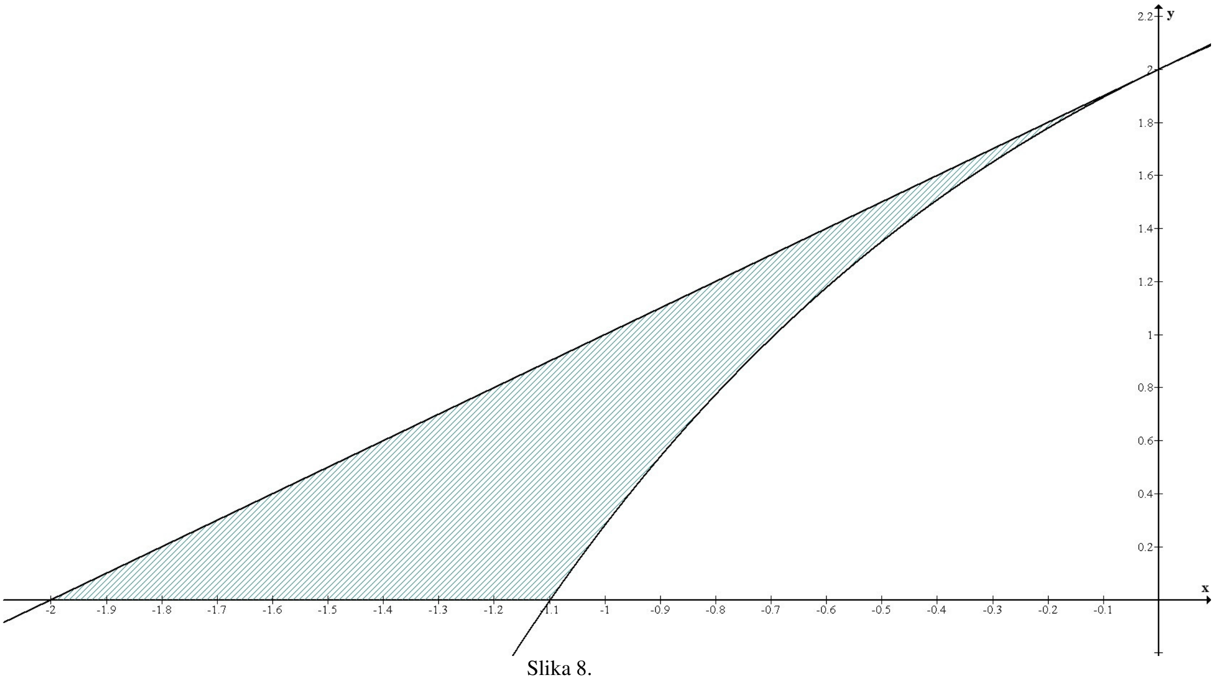
Slika 6.

10. Vidjeti Sliku 7. $P = \int_0^1 \ln(x+1) \cdot dx - \left| \int_0^1 (-x) \cdot dx \right| = 2 \cdot \ln 2 - \frac{1}{2}$ kv. jed.



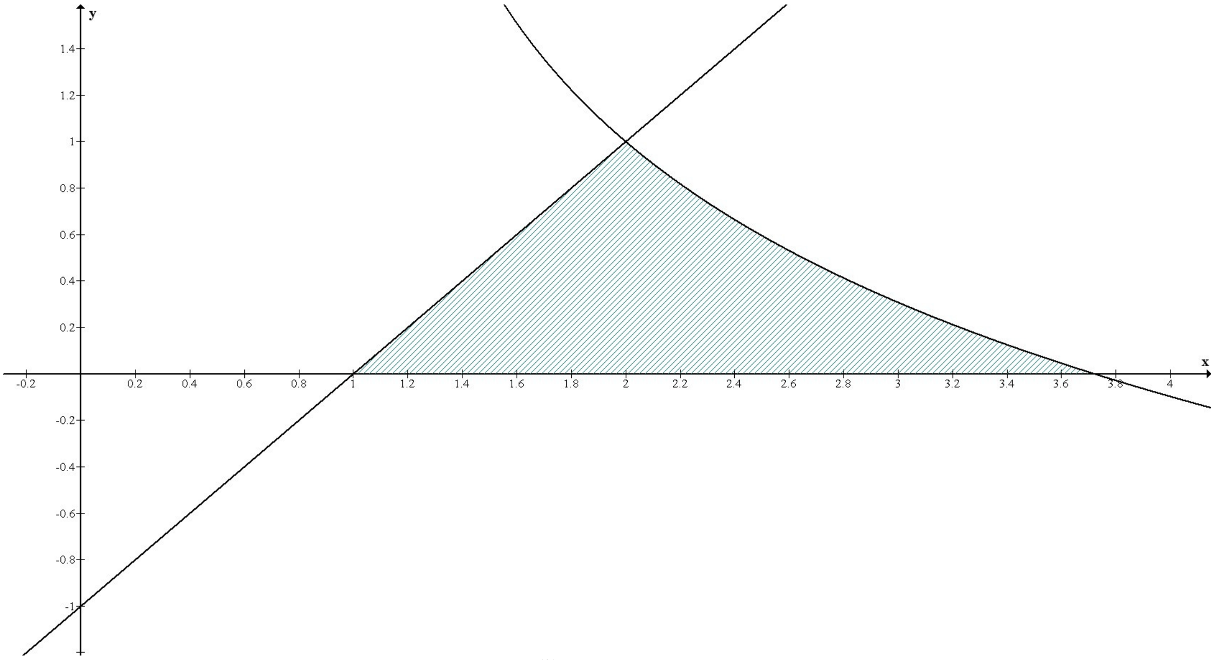
Slika 7.

11. Vidjeti Sliku 8. $P = \int_{-2}^{0} (x+2) \cdot dx - \int_{-\ln 3}^{0} (3 - e^{-x}) \cdot dx = 4 - 3 \cdot \ln 3 \approx 0.70416$ kv. jed.



Slika 8.

12. Vidjeti Sliku 9. $P=\int\limits_1^2 (x-1)\cdot dx+\int\limits_2^{e+1}\left[1-\ln(x-1)\right]\cdot dx=e-\frac{3}{2}\approx 1.28128$ kv. jed.



Slika 9.

13. $\overline{f}_{[0,1]}=\frac{1}{1-0}\cdot\int\limits_0^1 x^2\cdot e^{-x}\cdot dx=2-\frac{5}{e}\approx 0.1606$.

14. Uočimo da je D_f = [0, 2]. Stoga je $\overline{f}_{[0,2]}=\frac{1}{2-0}\cdot\int\limits_0^2\sqrt{2\cdot x-x^2}\cdot dx=\frac{\pi}{4}\approx 0.7854$.

15. Uočimo da je D_f = [0, 1]. Stoga je $\overline{f}_{[0,1]}=\frac{1}{1-0}\cdot\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{x}\cdot dx=\frac{\pi}{4}\approx 0.7854$. (*Napomena*: Pripadni neodređeni integral treba odrediti zamjenom $\begin{cases} t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2, \\ dx=2\cdot t\cdot dt\end{cases}$ a potom djelomičnom integracijom: $\left|\begin{matrix} u=\arcsin t & v=t^2 \\ du=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & dv=2\cdot t\cdot dt\end{matrix}\right|$ koristeći $\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot dt=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot dt-$ $-\int\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot dt$.)

16. 0.

17. $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{10}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\approx 5.65264$ jed.

18. 468 jed.

19. 4 jed.
20. 77 500 jed.
21. **a)** $V = \frac{381}{7} \cdot \pi$ kub.jed.; **b)** $V = \frac{765}{4} \cdot \pi$ kub.jed.
22. **a)** $V = 150\,660\,000 \cdot \pi$ kub.jed.; **b)** $V = 6\,075\,000 \cdot \pi$ kub. jed.
23. **a)** i **b)** $V = 2 \cdot \pi^2$ kub jed.
24. **a)** $V = \frac{4 \cdot e - e^2 - 1}{2 \cdot e^2} \cdot \pi$ kub. jed.; **b)** $V = \left(\frac{4}{e} - 1\right) \cdot \pi$ kub.jed..
25. **a)** $V = (e - 2) \cdot \pi$ kub. jed. **b)** $V = \frac{e^2 + 1}{2} \cdot \pi$ kub. jed. (*Napomena*: Oba neodređena integrala rješavaju se djelomičnom integracijom.)
26. $V = \frac{1}{2} \cdot (\pi - 2) \cdot \pi$ kub. jed. (*Napomena*: Pripadni neodređeni integral rješava se djelomičnom integracijom $\left| \begin{matrix} u = \arcsin x & v = x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} & dv = dx \end{matrix} \right|$, pa zamjenom $t = 1 - x^2$.)
27. $V = \frac{1}{4} \cdot e^2$ kub jed.
28. $V \approx 11.45217$. (*Napomena*: Pripadni neodređeni integral rješava se djelomičnom integracijom $\left| \begin{matrix} u = \operatorname{arsh} x & v = \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} & dv = x \cdot dx \end{matrix} \right|$, pa primjenom identiteta $x^2 = (x^2 + 1) - 1$ kojim se integral dobiven djelomičnom integracijom rastavlja na dva tablična integrala.)
29. $V \approx 2.26905$ kub.jed.
30. $V = \frac{1}{4} \cdot (\pi + 2) \cdot \pi^2 \approx 12.68637$ kub.jed.
31. $a = 1$.
32. $a = 5$.
33. $a = 1$.
34. $a = \frac{\pi}{2}$.
35. $a = \frac{3}{2} \cdot \pi$.