



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

ZADATCI ZA DEMONSTRATURE IZ MATEMATIKE 2

12.06.2013.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$y'' + 2 \cdot y' + 10 \cdot y = 0.$$

1. Pokažite da je funkcija $y = \frac{\ln x}{x^3}$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$x^5 \cdot y'' - x^4 \cdot y' - 15 \cdot x^3 \cdot y + 8 = 0$$

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

2.
$$\begin{cases} 3 \cdot x \cdot y^2 \cdot y' = y^3 + 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y' + y = (2 \cdot y)^2, \\ y(0) = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y' - (\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 2 \cdot \cos x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

6. (**bonus zadatak**) RC-strujni krug se sastoji od baterije čija je elektromotorna sila $E = 10 \text{ V}$, otpornika čiji je otpor $R = 10 \text{ } \Omega$ i kondenzatora kapaciteta $C = 1 \text{ pF}$ čije su ploče spojene na kratko. Označimo s $Q(t)$ naboj na kondenzatoru u trenutku t . Ako je $Q(0) = C \cdot E$, izračunajte

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C}.$$

Naputak: Koristite jednakosti $I \cdot R + \frac{Q}{C} = 0 = 0$ i $I = \frac{dQ}{dt}$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

ZADATCI ZA DEMONSTRATURE IZ MATEMATIKE 2

12.06.2013.

REZULTATI ZADATAKA

OBAVEZNI ZADATAK: $y = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \sin(3 \cdot x) + C_2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(3 \cdot x)$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

1.
$$y = \frac{\ln x}{x^3} \Rightarrow y' = \frac{1-3 \cdot \ln x}{x^4} \Rightarrow y'' = \frac{12 \cdot \ln x - 7}{x^5} \Rightarrow x^5 \cdot y'' - x^4 \cdot y' + 15 \cdot x^3 \cdot y + 8 =$$
$$= x^5 \cdot \frac{12 \cdot \ln x - 7}{x^5} - x^4 \cdot \frac{1-3 \cdot \ln x}{x^4} - 15 \cdot x^3 \cdot \frac{\ln x}{x^3} + 8 = 12 \cdot \ln x - 7 - 1 + 3 \cdot \ln x - 15 \cdot \ln x + 8 = 0$$
2. $y = \sqrt[3]{x-1}$.
3. $y = \frac{1}{e^x + 4}$.
4. $y = x \cdot \sin x$.
5. $y = 2 \cdot \sin x$.
6. $I \cdot R + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q = 0 \Rightarrow Q(t) = C \cdot E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C} = 0$.