



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

17.06.2013.

GRUPA 1.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$y'' - 2 \cdot y' + 2 \cdot y = 0.$$

1. Pokažite da je funkcija $y = \frac{\cos x}{x}$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - 1) \cdot y = \sin x.$$

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

2.
$$\begin{cases} 2 \cdot x \cdot y \cdot y' = y^2 + 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y' + y = y^2, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y' + (\operatorname{tg} x) \cdot y = \cos x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

5. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y' + y = 2 \cdot \sin x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. (**bonus zadatak**) RC-strujni krug se sastoji od otpornika čiji je otpor $R = 10 \, \Omega$ i kondenzatora kapaciteta $C = 1 \, \text{pF}$ spojenih na bateriju čija je elektromotorna sila $E = 10 \, \text{V}$. Označimo s $Q(t)$ naboj na kondenzatoru u trenutku t . Ako je $Q(0) = 0$, izračunajte $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C}$.

Naputak: Koristite jednakosti $E - I \cdot R - \frac{Q}{C} = 0$ i $I = \frac{dQ}{dt}$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

17.06.2013.

GRUPA 2.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$y'' + 2 \cdot y' + 2 \cdot y = 0.$$

1. Pokažite da je funkcija $y = \frac{\ln x}{x}$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' - x \cdot y + 2 = 0.$$

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

2.
$$\begin{cases} 2 \cdot x \cdot y \cdot y' = y^2 + 2, \\ y(3) = 1. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y' + y = 2 \cdot y^2, \\ y(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y' + 2 \cdot [\operatorname{tg}(2 \cdot x)] \cdot y = 2 \cdot \cos(2 \cdot x), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

5. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y' + y = 3 \cdot \sin x, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. **(bonus zadatak)** RC-strujni krug se sastoji od otpornika čiji je otpor $R = 15 \, \Omega$ i kondenzatora kapaciteta $C = 1 \, \text{pF}$ spojenih na bateriju čija je elektromotorna sila $E = 15 \, \text{V}$. Označimo s $Q(t)$ naboj na kondenzatoru u trenutku t . Ako je $Q(0) = 0$, izračunajte $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C}$.

Naputak: Koristite jednakosti $E - I \cdot R - \frac{Q}{C} = 0$ i $I = \frac{dQ}{dt}$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

17.06.2013.

GRUPA 3.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$y'' - 2 \cdot y' + 10 \cdot y = 0.$$

1. Pokažite da je funkcija $y = \frac{\ln x}{x^2}$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$x^4 \cdot y'' + x^3 \cdot y' - 4 \cdot x^2 \cdot y + 4 = 0.$$

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

2.
$$\begin{cases} 2 \cdot x \cdot y \cdot y' = y^2 + 3, \\ y(4) = 1. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y' + y = 3 \cdot y^2, \\ y(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y' + 3 \cdot [\operatorname{tg}(3 \cdot x)] \cdot y = 3 \cdot \cos(3 \cdot x), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

5. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y' + y = 4 \cdot \sin x, \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. **(bonus zadatak)** RC-strujni krug se sastoji od otpornika čiji je otpor $R = 20 \, \Omega$ i kondenzatora kapaciteta $C = 1 \, \text{pF}$ spojenih na bateriju čija je elektromotorna sila $E = 20 \, \text{V}$. Označimo s $Q(t)$ naboj na kondenzatoru u trenutku t . Ako je $Q(0) = 0$, izračunajte $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C}$.

Naputak: Koristite jednakosti $E - I \cdot R - \frac{Q}{C} = 0$ i $I = \frac{dQ}{dt}$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

17.06.2013.

REZULTATI ZADATAKA

1.

OBAVEZNI ZADATAK: $y = C_1 \cdot e^x \cdot \sin x + C_2 \cdot e^x \cdot \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

$$y = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow y' = -\frac{x \cdot \sin x + \cos x}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2 \cdot x \cdot \sin x - (x^2 - 2) \cdot \cos x}{x^3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1. \quad x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - 1) \cdot y &= x^2 \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \sin x - (x^2 - 2) \cdot \cos x}{x^3} - x \cdot \frac{x \cdot \sin x + \cos x}{x^2} + (x^2 - 1) \cdot \frac{\cos x}{x} = \\ &= \frac{2 \cdot x \cdot \sin x - (x^2 - 2) \cdot \cos x - x \cdot \sin x - \cos x + (x^2 - 1) \cdot \cos x}{x} = \sin x. \end{aligned}$$

2. $y = \sqrt{x-1}$.

3. $y = \frac{1}{e^x + 1}$.

4. $y = (x+1) \cdot \cos x$.

5. $y = 2 \cdot \cos x$.

6. $E - R \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot Q = \frac{E}{R} \Rightarrow Q(t) = C \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{C \cdot R}}\right) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C} = E = 10 \text{ V}.$

2.

OBAVEZNI ZADATAK: $y = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \sin x + C_2 \cdot e^{-x} \cdot \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

$$y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2 \cdot \ln x - 3}{x^3} \Rightarrow x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' - x \cdot y + 2 =$$

1. $= x^3 \cdot \frac{2 \cdot \ln x - 3}{x^3} + x^2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} - x \cdot \frac{\ln x}{x} + 2 = 2 \cdot \ln x - 3 + 1 - \ln x - \ln x + 2 = 0$

2. $y = \sqrt{x-2}$.

3. $y = \frac{1}{e^x + 2}$.

4. $y = 2 \cdot (x+1) \cdot \cos(2 \cdot x)$.

5. $y = 3 \cdot \cos x$.

6. $E - R \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot Q = \frac{E}{R} \Rightarrow Q(t) = C \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{C \cdot R}}\right) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C} = E = 15 \text{ V}.$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

17.06.2013.

3.

OBAVEZNI ZADATAK: $y = C_1 \cdot e^x \cdot \sin(3 \cdot x) + C_2 \cdot e^x \cdot \cos(3 \cdot x)$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

1.
$$y = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} \Rightarrow y'' = \frac{6 \cdot \ln x - 5}{x^4} \Rightarrow x^4 \cdot y'' + x^3 \cdot y' - 4 \cdot x^2 \cdot y + 4 =$$
$$= x^4 \cdot \frac{6 \cdot \ln x - 5}{x^4} + x^3 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} - 4 \cdot x^2 \cdot \frac{\ln x}{x^2} + 4 = 6 \cdot \ln x - 5 + 1 - 2 \cdot \ln x - 4 \cdot \ln x + 4 = 0$$
2. $y = \sqrt{x - 3}$.
3. $y = \frac{1}{e^x + 3}$.
4. $y = 3 \cdot (x + 1) \cdot \cos(3 \cdot x)$.
5. $y = 4 \cdot \cos x$.
6. $E - R \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot Q = \frac{E}{R} \Rightarrow Q(t) = C \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{C \cdot R}}\right) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{C} = E = 20 \text{ V}.$