KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE	**Matematika 2** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za grupne konzultacije 14.6.2016.**

1. Izračunajte nepravi integral $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathrm{d}w}{\pi \cdot \left(w^2 + w + 1\right)}$.

2. Izračunajte zbroj koeficijenata uz $\cos(2016 \cdot t)$ i $\sin(2016 \cdot t)$ u razvoju funkcije $h(t) = 1\ 016\ 064 \cdot t^2$ u Fourierov red na segmentu $[-\pi,\ \pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

3. Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\sqrt[3]{n}\right)}{n^4}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

4. Odredite jednadžbu ravninske krivulje koja dodiruje pravac $p \ldots x + y - 2 = 0$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale povučene na krivulju u bilo kojoj točki krivulje jednak omjeru kvadrata apscise i ordinate te točke. Pojednostavnite dobiveni izraz što je više moguće.

5. Nađite neko partikularno rješenje jednadžbe $y'' - 8 \cdot y' + 16 \cdot y = 2 \cdot e^{4 \cdot x}$. Pojednostavnite dobiveni izraz što je više moguće.

REZULTATI ZADATAKA

1. 2.
2. 1.
3. Za zbroj S zadanoga reda vrijedi nejednakost $0 < S < \frac{\pi^4}{90}$, pa zadani red konvergira.
4. $y = \frac{x}{2 \cdot x - 1}$.
5. $y_p = x^2 \cdot e^{4 \cdot x}$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Odredimo najprije pripadni neodređeni integral. Koristimo identitet

$$w^2 + w + 1 = \left(w + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(w + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Dobivamo:

$$\int \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot \mathrm{d}w}{\pi\cdot(w^2 - w)} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}\cdot\int \frac{\mathrm{d}w}{\left(w+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \begin{Bmatrix} \text{zamjena:} \\ t = w + \frac{1}{2} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}w \end{Bmatrix} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}\cdot\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{6}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot\left(w+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot w+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Odaberemo $C = 0$, pa dobijemo standardnu antiderivaciju:

$$F(w) = \frac{6}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot w+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Prema definiciji nepravoga integrala slijedi:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(0)\right] = \frac{6}{\pi}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot b+1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot 0+1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{6}{\pi}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot b+1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{6}{\pi}\cdot\left\{\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot b+1}{\sqrt{3}}\right)\right] - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \frac{6}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3} = 2.$$

2. Funkcija h je parna funkcija. Zbog toga se u njezinu razvoju u Fourierov red javljaju samo članovi oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot t)$. Dakle, koeficijent uz $\sin(2016\cdot t)$ jednak je $b_{2016} = 0$.

Odredimo koeficijent uz $\cos(2016\cdot t)$, odnosno a_{2016}. Imamo:

$$a_{2016} = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} 1\ 016\ 064\cdot t^2\cdot\cos(2016\cdot t)\cdot\mathrm{d}t = \frac{2\ 032\ 128}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} t^2\cdot\cos(2016\cdot t)\cdot\mathrm{d}t.$$

Primijenimo identitet

$$\int t^2\cdot\cos(2016\cdot t)\cdot\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cdot 1008^2}\cdot t\cdot\cos(2016\cdot t) + \frac{1}{4\cdot 1008^3}\cdot(2\cdot 1008^2\cdot t^2 - 1)\cdot\sin(2016\cdot t) + C.$$

Odaberemo $C = 0$, pa dobijemo standardnu antiderivaciju:

$$F(t) = \frac{1}{2\cdot 1008^2}\cdot t\cdot\cos(2016\cdot t) + \frac{1}{4\cdot 1008^3}\cdot(2\cdot 1008^2\cdot t^2 - 1)\cdot\sin(2016\cdot t).$$

Stoga je:

$$a_{2016}=\frac{2\,032\,128}{\pi}\cdot\left[F(\pi)-F(0)\right]=$$
$$=\frac{2\,032\,128}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 1008^2}\cdot\pi\cdot\cos(2016\cdot\pi)+\frac{1}{4\cdot 1008^3}\cdot(2\cdot 1008^2\cdot\pi^2-1)\cdot\sin(2016\cdot\pi)\right]-$$
$$-\frac{2\,032\,128}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 1008^2}\cdot 0\cdot\cos(2016\cdot 0)+\frac{1}{4\cdot 1008^3}\cdot(2\cdot 1008^2\cdot 0^2-1)\cdot\sin(2016\cdot 0)\right]=$$
$$=\frac{2\,032\,128}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 1008^2}\cdot\pi\right]=1.$$

Zaključimo: $a_{2016}+b_{2016}=1+0=1.$

3. Koristit ćemo podatak da Dirichletov (hiperharmonijski) red $\sum\frac{1}{n^p}$ konvergira za $p>1$. Posebno, red $\sum\frac{1}{n^4}$ konvergira. Neka je S zbroj toga reda. Tako imamo:

$$-1\le\sin\left(\sqrt[3]{n}\right)\le 1,$$
$$0\le\sin^2\left(\sqrt[3]{n}\right)\le 1,\quad /:n^4>0$$
$$0\le\frac{\sin^2\left(\sqrt[3]{n}\right)}{n^4}\le\frac{1}{n^4}\quad /\sum_{n=1}^{+\infty}$$
$$0\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2\left(\sqrt[3]{n}\right)}{n^4}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4},$$
$$0\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2\left(\sqrt[3]{n}\right)}{n^4}\le S.$$

Dakle, zbroj zadanoga reda pripada segmentu [0, S], što znači da zadani red konvergira.

Napomena: Može se pokazati da vrijede jednakost $S=\frac{1}{90}\cdot\pi^4$ i nejednakost $0<\sin^2\left(\sqrt[3]{n}\right)<1$, pa zbroj zadanoga reda zapravo pripada intervalu $\langle 0,\ S\rangle$.

4. Neka su $K\ldots y=f(x)$ tražena krivulja i $T=(x_T,\ y_T)\in K$. Koeficijent smjera normale povučene na krivulju K u točki T jednak je $k_n=-\frac{1}{f'(x_T)}=-\frac{1}{y'(x_T)}$, pa zbog zahtjeva zadatka dobivamo:

$$k_n=\frac{x_T^2}{y_T^2},$$
$$-\frac{1}{y'(x_T)}=\frac{x_T^2}{y_T^2},$$
$$y'(x_T)=-\frac{y_T^2}{x_T^2}.$$

Zbog proizvoljnosti točke T slijedi:

$$y'=-\frac{y^2}{x^2}\Leftrightarrow y'=-\frac{1}{x^2}\cdot y^2.$$

Riješimo tu jednadžbu. Prva jednadžba je obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama. Očitamo

$$f(x) = -\frac{1}{x^2},\ g(y) = y^2,$$

pa uvrštavanjem u formulu za rješenje obične diferencijalne jednadžbe 1. reda sa razdvojenim varijablama dobivamo:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{d}x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow y = -\frac{x}{C \cdot x + 1},\ C \in \mathbb{R}.$$

Iz uvjeta da pravac p mora dodirivati zadanu krivulju slijedi da sustav jednadžbi $\begin{cases} y = -\dfrac{x}{C \cdot x + 1}, \\ y = -x + 2 \end{cases}$

ima točno jedno rješenje. Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Odatle slijedi:

$$-\frac{x}{C \cdot x + 1} = -x + 2 \Leftrightarrow C \cdot x^2 - 2 \cdot C \cdot x - 2 = 0.$$

Ova kvadratna jednadžba mora imati točno jedno rješenje, što znači da njezina diskriminanta D mora biti jednaka nuli. Budući da je

$$D = (-2 \cdot C)^2 - 4 \cdot C \cdot (-2) = 4 \cdot C^2 + 8 \cdot C = 4 \cdot C \cdot (C + 2),$$

iz zahtjeva $D = 0$ slijedi $C_1 = 0$ i $C_2 = -2$ .Ako bi bilo $C = 0$, dobili bismo da je tražena krivulja pravac $y = -x$. U tom slučaju zadatak nema smisla (pojmovi tangente i normale povučene na neki pravac nisu definirani). Stoga mora biti $C = -2$.

Dakle, rješenje zadatka je krivulja

$$K \ldots\ y = -\frac{x}{(-2) \cdot x + 1} = \frac{x}{2 \cdot x - 1}.$$

5. Napišimo najprije karakterističnu jednadžbu. Ona glasi: $k^2 - 8 \cdot k + 16 = 0$. Ona ima jedno realno dvostruko rješenje $k = 4$. Zadatak dalje možemo riješiti na dva načina. Oba načina daju jednako konačno rješenje.

I. način:

Koeficijent uz x u eksponentu eksponencijalne funkcije na desnoj strani jednadžbe je $b = 4$. $b = 4$ je dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe. Stoga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{4 \cdot x}.$$

Odredimo prve dvije derivacije toga izraza:

$$y_p' = A \cdot \left[(x^2)' \cdot e^{4 \cdot x} + x^2 \cdot \left(e^{4 \cdot x}\right)' \right] = 2 \cdot A \cdot (2 \cdot x^2 + x) \cdot e^{4 \cdot x},$$
$$y_p'' = 2 \cdot A \cdot \left[(2 \cdot x^2 + 1)' \cdot e^{4 \cdot x} + (2 \cdot x^2 + 1) \cdot (e^{4 \cdot x})' \right] = 2 \cdot A \cdot (8 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 1) \cdot e^{4 \cdot x}.$$

Uvrštavanjem tih dvaju izraza u polaznu običnu diferencijalnu jednadžbu dobijemo:

$$y_p'' - 8 \cdot y_p' + 16 \cdot y_p = 2 \cdot A \cdot \left[8 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 1 - 8 \cdot (2 \cdot x^2 + x) + 8 \cdot x^2\right] \cdot e^{4 \cdot x} = 2 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x}.$$

Usporedbom s desnom stranom polazne obične diferencijalne jednadžbe dobijemo:

$$2 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} = 2 \cdot e^{4 \cdot x}.$$

Otuda je $A = 1$. Dakle, traženo partikularno rješenje je $y_p = x^2 \cdot e^{4 \cdot x}$.

<u>II. način:</u>

Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe dano je izrazom

$$y_h = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{4 \cdot x} = C_1 \cdot e^{4 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{4 \cdot x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primijenimo metodu varijacije konstanti. Pripadna bazična rješenja su

$$y_1 = e^{4 \cdot x},\ y_2 = x \cdot e^{4 \cdot x}\ .$$

Označimo $R(x) = 2 \cdot e^{4 \cdot x}$. Odredimo redom:

$$u = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x \cdot e^{4 \cdot x}}{e^{4 \cdot x}} = x,$$

$$v = \frac{R(x)}{y_1} = \frac{2 \cdot e^{4 \cdot x}}{e^{4 \cdot x}} = 2,$$

pa konačno dobivamo:

$$y_p = e^{4 \cdot x} \cdot \int (x)' \cdot \left(\int \frac{2}{(x)'} \cdot \mathrm{d}x\right) \cdot \mathrm{d}x = e^{4 \cdot x} \cdot \int 1 \cdot \left(\int \frac{2}{1} \cdot \mathrm{d}x\right) \cdot \mathrm{d}x = e^{4 \cdot x} \cdot \int 1 \cdot \left(\int 2 \cdot \mathrm{d}x\right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= e^{4 \cdot x} \cdot \int 1 \cdot 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x = e^{4 \cdot x} \cdot \int 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x = e^{4 \cdot x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} = x^2 \cdot e^{4 \cdot x}.$$