	Matematika na državnoj maturi	rješenja zadataka iz kolovoza 2021. (viša razina)
TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB		

1. C. Prema pretpostavci, vrijedi jednakost: $M = \frac{1}{5} \cdot N$. Iz te jednakosti slijedi:

$$M = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} \cdot N = \frac{20}{100} \cdot N = 20\% \cdot N.$$

Dakle, broj M je 20% broja N.

2. B. Vrijede aproksimacije:

$$\frac{-11}{3} = -3.\dot{6} \approx -3.66667,$$
$$\frac{-2}{3} = -0.\dot{6} \approx -0.66667.$$

Odatle zaključujemo da brojevi –3.7, –0.6 i –0.2 ne pripadaju zadanom intervalu (prvi od tih triju brojeva je strogo manji od $\frac{-11}{3}$, dok su ostala dva strogo veća od $\frac{-2}{3}$). Dakle, zadanom intervalu pripada jedino broj –2.1.

3. D. Primijetimo najprije da je nužno $y \neq 0$. Množenjem prve jednadžbe s y dobivamo $x = 7 \cdot y$. Uvrštavanjem ovoga izraza u drugu jednadžbu slijedi:

$$3 \cdot (7 \cdot y) = y + 5 \Leftrightarrow 21 \cdot y = y + 5 \Leftrightarrow 21 \cdot y - y = 5 \Leftrightarrow 20 \cdot y = 5.$$

Odatle dijeljenjem s 20 slijedi $y = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

4. C. Promotrimo pravokutan trokut kojemu su katete visina povučena na osnovicu zadanoga trokuta iz vrha nasuprot toj osnovici, polovica osnovice zadanoga trokuta i krak zadanoga trokuta. U tom trokutu znamo duljinu jedne katete:

$$a_1 = \frac{a}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm},$$

kao i kut kojega ta kateta zatvara s hipotenuzom (tj. krakom zadanoga trokuta): $\alpha = 54^\circ$. Primjenom trigonometrijske funkcije kosinus odmah dobivamo:

$$b = \frac{a_1}{\cos \alpha} = \frac{6}{\cos 54^\circ} \approx 10.2078097 \approx 10.2 \text{ cm}.$$

5. A. Transformirajmo zadanu jednadžbu ovako:

$$4\cdot x^2-5\cdot x-8=0 \quad /:4$$
$$x^2-\frac{5}{4}\cdot x-2=0.$$

Primjenom Vièteovih formula izravno slijedi da je traženi umnožak jednak –2.

6. C. Najprije dokažimo pomoćnu tvrdnju.

Tvrdnja 1. Neka je $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj. Pretpostavimo da aritmetička sredina svih modaliteta nekoga obilježja u uzorku od N_i objekata iznosi s_i, za svaki $i=1,2,\ldots,n.$ Tada je aritmetička sredina vrijednosti svih $\sum_{i=1}^{n} N_i$ modaliteta toga obilježja jednaka

$$s=\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i\cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}.$$

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su objekti označeni brojevima $1,\ldots,N_1,N_1+1,\ldots,N_1+N_2,N_1+N_2+1,\ldots,\sum_{i=1}^{n} N_i$, te da je x_i vrijednost obilježja za i-ti objekt, za svaki $i=1,2,\ldots,\sum_{i=1}^{n} N_i.$ Prema pretpostavci zadatka vrijedi sljedećih n jednakosti:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{N_1}}{N_1}=s_1,$$
$$\frac{x_{N_1+1}+x_{N_1+2}+\ldots+x_{N_1+N_2}}{N_2}=s_2,$$
$$\vdots$$
$$\frac{x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i+1}+x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i+2}+\ldots+x_{\sum_{i=1}^{n} N_i}}{N_n}=s_n.$$

Množenjem svake od njih nazivnikom razlomka na njezinoj lijevoj strani dobivamo:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{N_1}=s_1\cdot N_1,$$
$$x_{N_1+1}+x_{N_1+2}+\ldots+x_{N_1+N_2}=s_2\cdot N_2,$$
$$\vdots$$
$$x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i+1}+x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i+2}+\ldots+x_{\sum_{i=1}^{n} N_i}=s_n\cdot N_n.$$

Zbrajanjem svih dobivenih jednakosti (posebno zbrajajući njihove lijeve, a posebno njihove desne strane) slijedi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1} + x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \ldots + x_{N_1+N_2} + \ldots + x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + 1} + x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + 2} + \ldots + x_{\sum_{i=1}^{n} N_i} =$$

$$s_1 \cdot N_1 + s_2 \cdot N_2 + \ldots + s_n \cdot N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{\sum_{i=1}^{n} N_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot N_i, \qquad / : \sum_{i=1}^{n} N_i$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\sum_{i=1}^{n} N_i} x_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}.$$

Lijeva strana posljednje jednakosti je upravo aritmetička sredina vrijednosti svih $\sum_{i=1}^{n} N_i$ modaliteta promatranoga obilježja jer je riječ o količniku zbroja vrijednosti svih modaliteta i njihovoga ukupnoga broja. Dakle,

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i},$$

što je i trebalo dokazati. ■

Posljedica: Pretpostavimo da aritmetička sredina svih modaliteta nekoga obilježja u uzorku od N_i objekata iznosi s_i, za svaki $i = 1, 2.$ Tada je aritmetička sredina vrijednosti svih $N_1 + N_2$ modaliteta toga obilježja jednaka

$$s = \frac{s_1 \cdot N_1 + s_2 \cdot N_2}{N_1 + N_2}.$$

U zadatku kojega rješavamo su $s_1 = 58\%,\ s_2 = 63\%,\ N_1 = 23,\ N_2 = 27,$ pa je tražena aritmetička sredina jednaka:

$$s = \frac{58\% \cdot 23 + 63\% \cdot 27}{23 + 27} = \frac{1334\% + 1701\%}{50} = \frac{3035\%}{50} = 60.7\%.$$

7. **A**. Neka je x ukupan broj dana u kojima je radnik radio u jutarnjoj smjeni, a y ukupan broj dana u kojima je radnik radio u poslijepodnevnoj smjeni. Budući da

radnik svakoga dana radi u točno jednoj smjeni, zbroj $x+y$ mora biti jednak ukupnom broju radnih dana, odnosno 23. Dakle, mora vrijediti jednakost:

$$x+y=23.$$

Ukupna radnikova zarada u *svakom* od x radnih dana u kojima je radio u prijepodnevnoj smjeni iznosi $8\cdot 30=240$ kn. Zbog toga ukupna radnikova zarada u svih x dana u kojima je radio u prijepodnevnoj smjeni iznosi $240\cdot x$ kn.

Ukupna radnikova zarada u *svakom* od y radnih dana u kojima je radio u poslijepodnevnoj smjeni iznosi $8\cdot 35=280$ kn. Zbog toga ukupna radnikova zarada u svih y dana u kojima je radio u poslijepodnevnoj smjeni iznosi $280\cdot y$ kn.

Dakle, ukupna radnikova zarada u sva 23 radna dana iznosi $240\cdot x+280\cdot y$ kn. Prema podacima u zadatku, taj zbroj treba biti jednak 6040 kn, pa mora vrijediti jednakost:

$$240\cdot x+280\cdot y=6040 \Leftrightarrow 6\cdot x+7\cdot y=151.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x+y=23, \\ 6\cdot x+7\cdot y=151. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe toga sustava je $y=23-x$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &6\cdot x+7\cdot(23-x)=151, \\ &6\cdot x+161-7\cdot x=151, \\ &-x=151-161, \\ &-x=-10, \\ &x=10. \end{aligned}$$

Dakle, radnik je ukupno 10 radnih dana radio u jutarnjoj smjeni, pa njegova zarada koju je ostvario radeći samo u jutarnjoj smjeni iznosi $10\cdot 240=2400$ kn.

Napomena: U zadatku se zapravo pretpostavlja da radnik u svakom danu radi u samo jednoj smjeni, a ne da je u točno jednom danu radio u točno jednoj smjeni (a u svim ostalim danima u obje smjene). Naime, ako bi radnik u točno jednom danu radio u točno jednoj smjeni, a u svim ostalim danima u obje smjene, onda bi u svakom od $23-1=22$ radna dana u kojima je radio u obje smjene zaradio

$8\cdot(35+30)=8\cdot 65=520$ kn, odnosno ukupno najmanje $22\cdot 520=11440$ kn, što je nemoguće jer njegova ukupna zarada iznosi 6040 kn.

8. **C**. Primijenimo binomni poučak, pa dobijemo:

$$\left(a^3+4\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\cdot\left(a^3\right)^k\cdot 4^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\cdot a^{3\cdot k}\cdot 4^{10-k}.$$

Koeficijent uz a^{27} dobijemo za $3\cdot k=27$, odnosno $k=9,$ i on je jednak:

$$\binom{10}{9}\cdot 4^{10-9}=\binom{10}{10-9}\cdot 4^1=\binom{10}{1}\cdot 4=10\cdot 4=40.$$

9. **A**. Imamo redom:

$$(f\circ g)(6)=f(g(6))=f\left(10^6\right)=\frac{1}{10^6}=10^{-6}.$$

10. **A**. Primijetimo da su sve nultočke zadane funkcije $x_1=-1$ i $x_2=7.$ Prva nultočka ima kratnost 1 (to je eksponent u izrazu $(x+1)$), što znači da funkcija u dovoljno maloj okolini točke $x=-1$ ima različite predznake. Očito su $g(-1.1)>0$ i $g(-0.9)<0$ pa zaključujemo da graf funkcije g „dolazi“ u točku $(-1,0)$ iz drugoga kvadranta (jer jedino točke u drugom kvadrantu imaju svojstvo da im je prva koordinata strogo negativna, a druga strogo pozitivna), „prolazi“ kroz tu točku i „nastavlja se“ u trećem kvadrantu (jer jedino točke u trećem kvadrantu imaju obje koordinate negativne).

Druga nultočka ima kratnost 2 (to je eksponent u izrazu $(x-7)^2$), što znači da funkcija u dovoljno maloj okolini točke $x=-1$ ima jednake predznake. Očito su $g(6.9)<0$ i $g(7.1)<0$, pa zaključujemo da graf funkcije g „dolazi“ u točku $(7,0)$ iz četvrtoga kvadranta (jer jedino točke u četvrtom kvadrantu imaju svojstvo da im je prva koordinata strogo pozitivna, a druga strogo negativna), „zaokreće“ u toj točki i „vraća se“ u četvrti kvadrant.

Jedini od četiriju ponuđenih grafova koji ima oba gore opisana svojstva je graf naveden pod **A**, pa je on rješenje zadatka.

11. **D**. Označimo traženi kut s α. Koristeći skalarni umnožak dobivamo:

$$\cos\alpha=\frac{(2,3)\cdot(4,-1)}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{2\cdot 4+3\cdot(-1)}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{16+1}}=\frac{8-3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}=\frac{5}{\sqrt{221}}\Rightarrow$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{221}}\right)\approx 70.34617594^\circ\approx 70^\circ 20' 46''.$$

12. C. Opseg kruga polumjera $r=20\,\text{m}$ jednak je $O=2\cdot r\cdot\pi=2\cdot 20\cdot\pi=40\cdot\pi\,\text{m}$. Budući da jedna minuta ima 60 sekundi, u 10 minuta = $10\cdot 60=600$ sekundi Jan će prijeći ukupno $s=v\cdot t=3.5\cdot 600=2100\,\text{m}$. Zbog toga je traženi broj jednak

$$n=\left\lfloor\frac{2100}{40\cdot\pi}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{105}{2\cdot\pi}\right\rfloor=\lfloor 16.71\rfloor=16.$$

Ovdje je s $\lfloor\ \rfloor$ označena funkcija *najveće cijelo*, tj. funkcija koja svakom realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj jednak ili manji od x.

13. B. Neka je a duljina osnovnoga brida zadane piramide. Tada je i duljina visine te piramide također a. Obujam piramide je:

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot v=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot a^3.$$

Prema podacima u zadatku, obujam je jednak 43.41 cm^3, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot a^3=43.41.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$a^3=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot 43.41=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot 43.41=\frac{12}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 43.41=4\cdot\sqrt{3}\cdot 43.41,$$
$$a=\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{3}\cdot 43.41}\approx 6.6999279878\approx 6.7.$$

Dakle, duljina osnovnoga brida zadane piramide iznosi (približno) 6.7 cm, pa je i tražena duljina visine te piramide također (približno) 6.7 cm.

14. B. Primijetimo najprije da su zadani trokutovi slični prema poučku K – K (imaju jedan zajednički kut (kod vrha C) i par sukladnih kutova). Pripadni koeficijent sličnosti jednak je $k=\frac{8+4}{5}=\frac{12}{5}$. Duljinu stranice $\overline{AC}$ već znamo: ona je jednaka $8+4=12$ cm. Duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom su jednake:

$$\left|\overline{AB}\right| = \frac{12}{5} \cdot 10 = 24,$$
$$\left|\overline{BC}\right| = \frac{12}{5} \cdot 8 = \frac{96}{5} = 19.2.$$

Zbog toga je traženi opseg jednak:

$$O = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{CA}\right| = 12 + 24 + 19.2 = 55.2.$$

Napomena: Iz podataka u zadatku ne može se odrediti mjerna jedinica u kojoj su iskazane duljine na slici. Zboga toga bi ispravno rješenje zadatka trebalo biti 55.2 jedinica duljine, a ne 55.2 cm.

15. D. Primijetimo da je $f(x) = (x+1)^2$. Ta funkcija je strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle$, a strogo rastuća na intervalu $\langle -1, +\infty \rangle$. Prema pretpostavci je $a \geq 2$, pa vrijede nejednakosti

$$-3 \cdot a < -2 \cdot a < -1 < \frac{a}{3} < \frac{a}{2}.$$

Zbog gornjega razmatranja su $f(-3 \cdot a) > f(-2 \cdot a)$ (jer je lijevo od -1 funkcija strogo padajuća) i $f\left(\frac{a}{3}\right) < f\left(\frac{a}{2}\right)$ (jer je desno od -1 funkcija strogo rastuća). To znači da zadana funkcija ne može poprimiti svoju najmanju vrijednost ni za $x = -3 \cdot a$, ni za $x = \frac{a}{2}$.

Preostaje usporediti $f(-2 \cdot a)$ i $f\left(\frac{a}{3}\right)$. Bude li prva vrijednost veća od druge, zadana funkcija će poprimiti najmanju vrijednost za $x = \frac{a}{3}$. Obratno, bude li druga vrijednost veća od prve, zadana će funkcija poprimiti svoju najmanju vrijednost za $x = -2 \cdot a$. Računamo:

$$f(-2 \cdot a) - f\left(\frac{a}{3}\right) = (-2 \cdot a + 1)^2 - \left(\frac{a}{3} + 1\right)^2 = \left(-2 \cdot a + 1 - \frac{a}{3} - 1\right) \cdot \left(-2 \cdot a + 1 + \frac{a}{3} + 1\right) =$$
$$= \frac{-7}{3} \cdot a \cdot \left(2 - \frac{5}{3} \cdot a\right).$$

Budući da je $a \geq 2$, vrijedi:

$$2-\frac{5}{3}\cdot a\leq 2-\frac{5}{3}\cdot 2=2-\frac{10}{3}=\frac{-4}{3}<0,$$

pa je $f\left(-2\cdot a\right)-f\left(\frac{a}{3}\right)$ zapravo umnožak dvaju strogo negativnih faktora (to su $\frac{-7}{3}$ i $2-\frac{5}{3}\cdot a$) i jednoga strogo pozitivnoga faktora (to je *a*), što znači da je ona strogo pozitivna. Tako zaključujemo da vrijedi nejednakost

$$f(-2\cdot a)>f\left(\frac{a}{3}\right),$$

pa je vrijednost $f\left(\frac{a}{3}\right)$ najmanja od svih četiriju ponuđenih vrijednosti. Dakle, tražena je vrijednost $x=\frac{a}{3}$.

16. 1.) $\frac{b-a}{d}+1$. Uz dodatnu pretpostavku $d\neq 0$, imamo redom:

$$(n-1)\cdot d=b-a,\quad /:d$$
$$n-1=\frac{b-a}{d},$$
$$n=\frac{b-a}{d}+1.$$

Napomena: Zadatak nema rješenja ako je $d=0$.

2.) (0,-4) ili (0, 4). *Svaka* točka na osi ordinata ima prvu koordinatu jednaku 0. Zbog toga možemo pretpostaviti da je tražena točka $T=(0,y)$. Njezina udaljenost od ishodišta jednaka je

$$d=\sqrt{(0-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{0^2+y^2}=\sqrt{0+y^2}=\sqrt{y^2}=|y|.$$

(Apsolutnu vrijednost moramo uzeti jer ne znamo predznak broja *y*.) Tako iz jednadžbe $|y|=4$, a prema definiciji apsolutne vrijednosti, odmah slijedi $y_1=-4$ i $y_2=4$. Dakle, postoje točno dvije točke s traženim svojstvom i to su $T_1=(0,-4)$ i $T_2=(0,4)$.

17. 1.) $x\geq 10$ **ili** $x\in\left[10,+\infty\right\rangle$. Pomnožimo obje strane zadane nejednadžbe s 18, pa redom dobivamo:

$$3 \cdot 5 \cdot x - 2 \cdot (x+2) \leq 18 \cdot (x-3),$$
$$15 \cdot x - 2 \cdot x - 4 \leq 18 \cdot x - 54,$$
$$15 \cdot x - 2 \cdot x - 18 \cdot x \leq -54 + 4,$$
$$(-5) \cdot x \leq -50.$$

Odatle dijeljenjem s (-5) slijedi $x \geq 10$. Dakle, skup rješenja zadane nejednadžbe tvore svi realni brojevi jednaki ili veći od 10. Taj je skup interval $\left[10, +\infty\right\rangle$.

2.) $x \in [-26, 26]$. Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 676$ je parabola okrenuta prema gore (tj. parabola oblika $\cup$). Zapravo tražimo sve vrijednosti varijable x za koje su pripadne vrijednosti funkcije na nepozitivnom dijelu osi ordinata. Zbog oblika parabole, te vrijednosti su svi realni brojevi iz segmenta omeđenoga nultočkama funkcije *f*. Taj će segment ujedno biti i rješenje zadatka.

Iz jednadžbe $x^2 - 676 = 0$ lagano slijedi $x_1 = -26,\ x_2 = 26$. Dakle, rješenje zadatka je segment $[-26, 26]$.

18. 1.) 82.95. Cijena 1 kg banana iznosi $\frac{43.96}{4} = 10.99$ kn. Cijena 1 kg borovnica iznosi $\frac{124.95}{5} = 24.99$ kn. Za 3 kg banana i 2 kg borovnica Katarina treba izdvojiti ukupno $3 \cdot 10.99 + 2 \cdot 24.99 = 32.97 + 49.98 = 82.95$ kn.

2.) 1086. *Svi* prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 35 daju ostatak 1 imaju oblik $35 \cdot k + 1$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Taj izraz zapišimo ovako:

$$35 \cdot k + 1 = (36 \cdot k - k) + 1 = 36 \cdot k - k + 1 = 36 \cdot k - (k - 1).$$

Taj izraz će biti djeljiv s 3 ako i samo ako broj $k - 1$ bude djeljiv s 3.

Podijelimo li 1000 (najmanji četveroznamenkasti prirodan broj) s 35, dobit ćemo 28 i ostatak 20. Podijelimo li 9999 (najveći četveroznamenkasti prirodan broj) s 35, dobit ćemo 285 i ostatak 24. Odatle zaključujemo da će broj $35 \cdot k + 1$ biti četveroznamenkasti prirodan broj ako i samo ako je *k* prirodan broj iz segmenta $[29, 285]$.

Najmanji prirodan broj *k* iz segmenta $[29, 285]$ takav da je broj $k - 1$ djeljiv s 3 je očito $k = 31$. (Tada je $k - 1 = 31 - 1 = 30$ i taj je broj djeljiv s 3.) Zbog toga je traženi broj jednak $35 \cdot 31 + 1 = 1086$.

19. 1.) $2^8 = 256$. Imamo redom:

$$\sqrt[4]{a^3}=2 \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}}=2 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^8=2^8 \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}\cdot 8}=2^8 \Leftrightarrow a^6=256.$$

2.) $\frac{3}{x-3}$. Koristeći formulu za razliku kvadrata imamo redom:

$$\left(3+\frac{3}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{x^2-9}=\left(\frac{3\cdot(x+2)+3}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{x^2-3^2}=\left(\frac{3\cdot x+6+3}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$
$$=\left(\frac{3\cdot x+9}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{3\cdot(x+3)}{x+2}\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{3}{x-3}.$$

20. 1.) $4\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}$. Iz zahtjeva $\vec{c}+\vec{v}=\vec{0}$ slijedi $\vec{v}=-\vec{c}$. Dakle, $\vec{v}$ je vektor suprotan nacrtanom vektoru. Njegova početna točka je $(-1,1)$, a krajnja $(3,-1)$, pa slijedi:

$$\vec{v}=(3-(-1))\cdot\vec{i}+(-1-1)\cdot\vec{j}=4\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}.$$

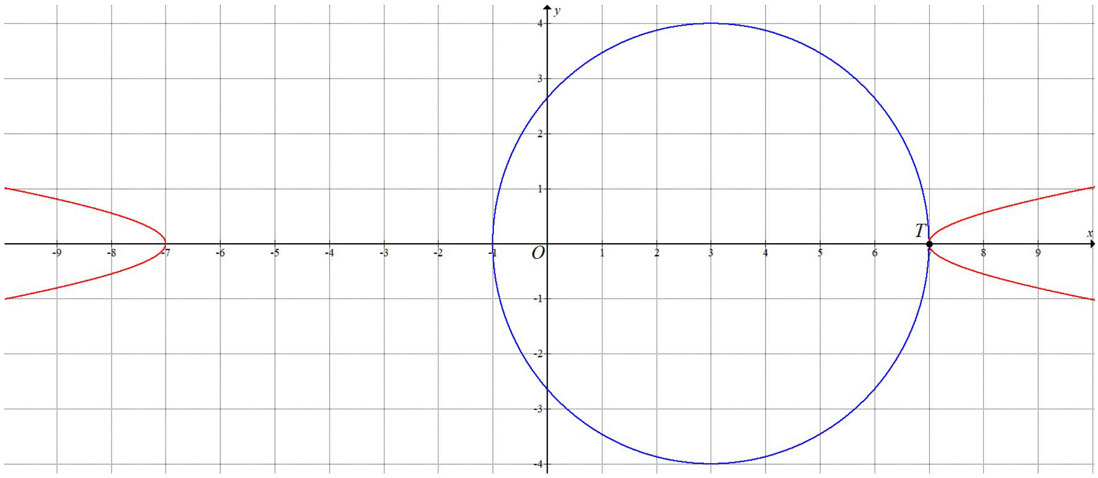
2.) **Jednu. 1. (analitičko) rješenje**: Zbrajanjem obiju zadanih jednadžbi (zasebno zbrojimo lijeve strane, a zasebno desne) dobivamo:

$$(x-3)^2+\frac{x^2}{49}=17 \Leftrightarrow x^2-6\cdot x+9+\frac{x^2}{49}-17=0 \Leftrightarrow \frac{50}{49}\cdot x^2-6\cdot x-8=0 \Leftrightarrow$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot\frac{50}{49}\cdot(-8)}}{2\cdot\frac{50}{49}}=\frac{6\pm\sqrt{36+\frac{1600}{49}}}{\frac{100}{49}}=\frac{6\pm\sqrt{\frac{36\cdot 49+1600}{49}}}{\frac{100}{49}}=\frac{6\pm\sqrt{\frac{1764+1600}{49}}}{\frac{100}{49}}=$$
$$=\frac{6\pm\sqrt{\frac{3364}{49}}}{\frac{100}{49}}=\frac{6\pm\frac{58}{7}}{\frac{100}{49}}=\frac{\frac{42\pm 58}{7}}{\frac{100}{49}}=\frac{7\cdot(42\pm 58)}{100}\Rightarrow$$
$$x_1=\frac{7\cdot(42+58)}{100}=\frac{7\cdot 100}{100}=7,\ x_2=\frac{7\cdot(42-58)}{100}=\frac{7\cdot(-16)}{100}=\frac{-28}{25}.$$

Ako je $x=\frac{-28}{25}$, onda je $y^2=\frac{x^2}{49}-1=\frac{\left(\frac{-28}{25}\right)^2}{49}-1=\frac{\frac{784}{625}}{49}-1=\frac{16}{625}-1<0,$ što je nemoguće (y mora biti realan broj). Zbog toga rješenje x_2 odbacujemo.

Ako je $x=7$, onda je $y^2=\frac{x_1^2}{49}-1=\frac{7^2}{49}-1=\frac{49}{49}-1=1-1=0,$ a ta jednadžba ima točno jedno realno rješenje $y=0$. Dakle, zadane krivulje imaju točno jednu zajedničku točku i ta točka je $(7,0)$.

2. (grafičko) rješenje: Nacrtajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Prva krivulja je kružnica čije je središte u točki $S = (3,0)$, a polumjer $r = \sqrt{16} = 4$. Druga krivulja je hiperbola čija je realna poluos $a = \sqrt{49} = 7$, a mala poluos $b = \sqrt{1} = 1$. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Iz dobivene slike vidimo da se zadane krivulje sijeku u točno jednoj točki. Ta točka je $T = (7,0)$.

3. (geometrijsko) rješenje: Kao u prethodnom rješenju zaključujemo da su središte i polumjer zadane kružnice redom $S = (3,0)$ i $r = 4$. To znači da apscise svih točaka te kružnice pripadaju segmentu $[3-4, 3+4] = [-1, 7]$. Nadalje, duljina realne poluosi hiperbole je $a = 7$, što znači da apscise svih točaka hiperbole pripadaju skupu $\mathbb{R} \setminus \langle -7, 7 \rangle$. Tako zaključujemo da apscise zajedničkih točaka zadanih krivulja moraju pripadati skupu $[-1,7] \cap (\mathbb{R} \setminus \langle -7,7 \rangle) = \{7\}$. Taj skup je jednočlan, pa slijedi da zadane krivulje imaju točno jednu zajedničku točku. Kao i u prethodnim dvama rješenjima zaključujemo da je ta točka $T = (7,0)$.

21. 1.) 12 jed. duljine. Tjeme *bilo koje* parabole čija jednadžba ima oblik $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$, pri čemu je $p > 0$, je točka $O = (0,0)$. Ravnalica te parabole je pravac $x = \frac{-p}{2}$. Njegova je udaljenost od ishodišta jednaka $\frac{p}{2}$. Iz $2 \cdot p = 48$ dijeljenjem s 4 slijedi $\frac{p}{2} = 12$. Dakle, tražena je udaljenost jednaka 12 jedinica duljine.

2.) $\sqrt{17}$. Iz podatka o koordinatama žarišta elipse zaključujemo da je $e = \left|-2 \cdot \sqrt{2}\right| = 2 \cdot \sqrt{2}$, odnosno $e^2 = \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$. Uvrštavanjem $e^2 = 8$ i $a^2 = 25$

u jednakost $e^2 = a^2 - b^2$ dobivamo jednadžbu $25 - b^2 = 8$ iz koje je $b^2 = 17$, odnosno $b = \sqrt{17}$.

22. 1.) $\langle -\infty, 10 \rangle$. **1. rješenje:** Vodeći koeficijent zadane funkcije je strogo negativan i jednak –1. Zbog toga zadana funkcija raste na intervalu kojemu je gornja granica prva koordinata tjemena pripadne parabole, tj. na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{-20}{2 \cdot (-1)} \right\rangle = \langle -\infty, 10 \rangle$.

2. rješenje: Prva derivacija zadane funkcije je:

$$f'(x) = -2 \cdot x + 20.$$

Traženi je interval jednak skupu svih realnih rješenja nejednadžbe $f'(x) > 0$. Tako redom imamo:

$$\begin{aligned}
&-2 \cdot x + 20 > 0, \\
&-2 \cdot x > -20, \quad / : (-2) \\
&x < 10.
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je interval $\langle -\infty, 10 \rangle$.

Napomena: **Službeno rješenje zadatka je poluzatvoreni interval** $\langle -\infty, 10]$. **Međutim, to rješenje nije moguće dobiti na drugi gore opisani način jer je pojam derivacije funkcije u točki – korišten u 2. rješenju - definiran isključivo za funkcije definirane na otvorenom intervalu. Zbog toga je ispravno rješenje zadatka** $\langle -\infty, 10 \rangle$.

2.) $x = \frac{1}{5}$. Jedan mogući način rješavanja bio bi odrediti pravilo funkcije *f*, pa potom riješiti jednadžbu $f(x) = 0$. Međutim, postoji bitno brži i jednostavniji način. Koji god način odabrali, svakako trebamo promatrati jednadžbu $f(x) = 0$. Zbog toga pogledajmo za koje je vrijednosti varijable x desna strana zadanoga izraza jednaka nuli. Iz jednadžbe $x - 3 = 0$ slijedi $x = 3$. Dakle, vrijedi:

$$f\left(\frac{1}{3+2}\right) = 3 - 3 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = 0.$$

Odatle „očitamo“ da zadana funkcija ima jedinstvenu nultočku $x = \frac{1}{5}$.

23. 1.) 1.2. Osnovno svojstvo *bilo kojega* geometrijskoga niza je da je svaki njegov član, osim prvoga, jednak geometrijskoj sredini dvaju njemu neposredno susjednih članova. Konkretno, traženi drugi član niza jednak je geometrijskoj sredini prvoga i trećega člana, a ona je jednaka drugom korijenu iz umnoška prvoga i trećega člana niza. Tako konačno imamo:

$$g_2 = \sqrt{g_1 \cdot g_3} = \sqrt{1.44} = 1.2.$$

2.) 40. Označimo sa d razliku zadanoga niza. Prema podacima u zadatku, vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} a_1 = 13, \\ 37 = a_9 = a_1 + (9-1) \cdot d = a_1 + 8 \cdot d. \end{cases}$$

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu dobivamo:

$$37 = 13 + 8 \cdot d \Leftrightarrow 8 \cdot d = 24 \Leftrightarrow d = 3.$$

Prema tome, traženi deseti član niza je jednak

$$a_{10} = a_9 + d = 37 + 3 = 40.$$

24. 1.) $78 \cdot \pi$. Rotacijom zadanoga trokuta oko njegove kraće katete nastaje stožac kojemu je duljina polumjera osnovke $r = 6$ cm, a duljina izvodnice $s = 7$ cm. Zbog toga je traženo oplošje jednako:

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s) = 6 \cdot \pi \cdot (6 + 7) = 6 \cdot \pi \cdot 13 = 78 \cdot \pi \text{ cm}^2.$$

2.) $\approx$ **3.15**. Mjera trećega kuta trokuta jednaka je $180^\circ - \left(28^\circ + 46^\circ\right) = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$.

Zbog toga se najkraća stranica trokuta nalazi nasuprot kuta najmanje mjere, tj. nasuprot kuta čija je mjera 28°. Njezinu duljinu izračunamo koristeći sinusov poučak:

$$\frac{a}{\sin 28^\circ} = \frac{6.45}{\sin 106^\circ} \Leftrightarrow a = \frac{\sin 28^\circ}{\sin 106^\circ} \cdot 6.45 \approx 3.15012196 \approx 3.15 \text{ cm}.$$

25. 1.) $y = x^2 - 4 \cdot x$. Iz slike vidimo da zadana parabola siječe os apscisa u ishodištu i točki $(4,0)$. Zbog toga njezina jednadžba ima oblik $y = a \cdot (x-0) \cdot (x-4) = a \cdot x \cdot (x-4)$, za neki $a \neq 0$. Također, sa slike vidimo da parabola prolazi točkom $T = (1,-3)$, pa uvrštavanjem $x = 1$, $y = -3$ u izraz $y = a \cdot x \cdot (x-4)$ dobivamo:

$$-3=a\cdot 1\cdot(1-4)\Leftrightarrow -3=(-3)\cdot a\Leftrightarrow a=1.$$

Dakle, tražena jednadžba je $y=x\cdot(x-4)$, odnosno $y=x^2-4\cdot x.$

2.) 1. Zadana funkcija će poprimiti najveću vrijednost onda i samo onda kad izraz $\sqrt{x-2}$ bude poprimio najmanju vrijednost. Slika funkcije $f_1(x)=\sqrt{x-2}$ je interval $[0,+\infty\rangle$, pa je najmanja vrijednost izraza $\sqrt{x-2}$ jednaka nuli. To znači da je tražena najveća vrijednost zadane funkcije jednaka $1-0=1$ (i postiže se onda i samo onda kad je $x-2=0$, odnosno za $x=2.$)

3.) $2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin(2\cdot x)$. Koristeći pravilo za deriviranje složene funkcije i tablicu derivacija elementarnih funkcija dobivamo:

$$h'(x)=(19)'+\left(\sin^2 x\right)'=0+2\cdot\sin x\cdot(\sin x)'=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin(2\cdot x).$$

26. 1.) $2\cdot x.$ Koristimo jednakost: $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, $\forall a\geq 0.$ Imamo redom:

$$\log_{\sqrt{a}}\left(a^x\right)=\log_{\sqrt{a}}\left(\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)^x\right)=\log_{\sqrt{a}}\left(\left(\sqrt{a}\right)^{2\cdot x}\right)=2\cdot x.$$

2.) 2. Koristeći svojstva eksponencijalne funkcije imamo redom:

$$\begin{aligned}&3^x\cdot 5^x\cdot 5^2=5625,\\&(3\cdot 5)^x\cdot 25=5625,\quad /:25\\&15^x=225,\\&15^x=15^2,\\&x=2.\end{aligned}$$

3.) $x=-3.$ Uz uvjet $\frac{x-45}{x}\geq 0$ kvadriranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}&\frac{x-45}{x}=4^2,\\&\frac{x-45}{x}=16,\quad /\cdot x\\&x-45=16\cdot x,\\&x-16\cdot x=45,\\&(-15)\cdot x=45,\quad /:(-15)\\&x=-3.\end{aligned}$$

Za $x=-3$ vrijedi nejednakost $\frac{-3-45}{-3}=\frac{-48}{-3}=16\geq 0$, pa je taj broj ujedno i jedino rješenje zadane jednadžbe.

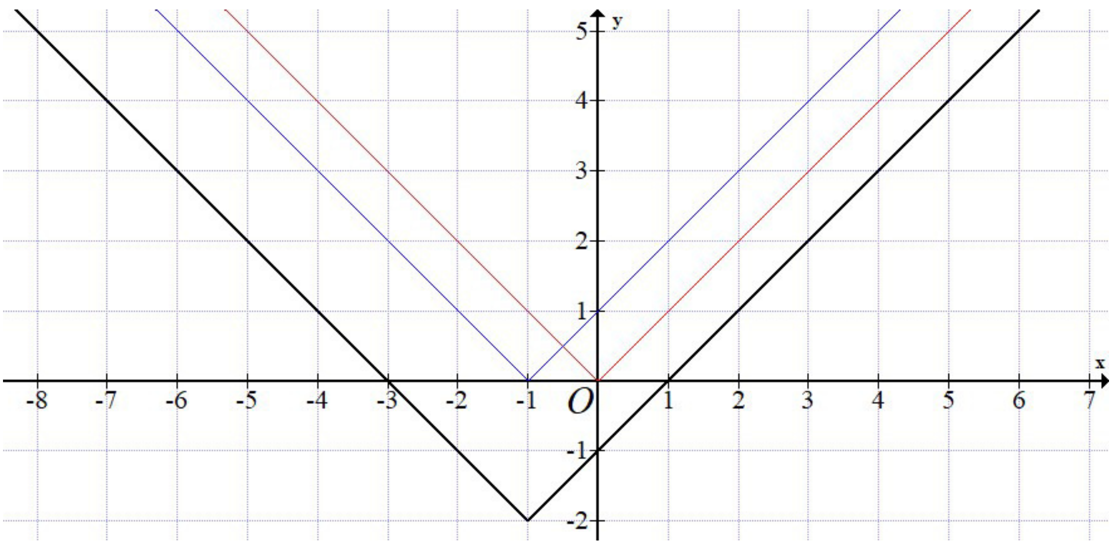
27. 1.) $\mathbb{R}$. Za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $2^x>0$. Zbog toga je $2^x+2>0+2=2$. Dakle, nazivnik zadane funkcije je uvijek strogo veći od 2 i ne može biti jednak nuli. To znači da je zadana funkcija definirana za svaki $x\in\mathbb{R}$ (ne bi bila definirana za one $x\in\mathbb{R}$ za koje je njezin nazivnik jednak nuli). Odatle zaključujemo da je prirodna domena zadane funkcije skup $\mathbb{R}$.

2.) $[3,5]$. Argument funkcije sinus je polinom 1. stupnja i definiran je za svaki $x\in\mathbb{R}$. Zbog toga za svaki $x\in\mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{aligned}
&-1\leq \sin(5\cdot x+3)\leq 1, \quad /+4\\
&-1+4\leq \sin(5\cdot x+3)+4\leq 1+4,\\
&3\leq g(x)\leq 5.
\end{aligned}$$

Odatle „očitamo“ da je tražena slika segment $[3,5]$.

3.) Vidjeti sliku 2. Najprije nacrtamo graf funkcije $h_1(x)=|x|$ (na slici prikazan crvenom bojom). Potom svaku točku toga grafa pomaknemo za jednu jedinicu duljine ulijevo. Tako dobijemo graf funkcije $h_2(x)=|x+1|$ (na slici prikazan plavom bojom). Naposljetku, svaku točku dobivenoga grafa pomaknemo za dvije jedinice duljine prema dolje. Tako dobijemo traženi graf prikazan na slici crnom bojom.



Slika 2.

28. (4, −32). 1. **rješenje:** Odredimo najprije prvu derivaciju zadane funkcije koristeći osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija. Imamo redom:

$$f'(x)=\left(x^4\right)'-7\cdot\left(x^3\right)'+10\cdot\left(x^2\right)'=4\cdot x^{4-1}-7\cdot 3\cdot x^{3-1}+10\cdot 2\cdot x^{2-1}=$$
$$=4\cdot x^3-21\cdot x^2+20\cdot x.$$

Odredimo nultočke dobivene prve derivacije zadane funkcije. Imamo redom:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4\cdot x^3-21\cdot x^2+20\cdot x=0\Leftrightarrow x\cdot\left(4\cdot x^2-21\cdot x+20\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left(x_1=0\right)\vee\left(4\cdot x^2-21\cdot x+20=0\right)\Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{5}{4},\ x_3=4.$$

Na intervalu $\left\langle -\infty,0\right\rangle$ funkcija f je strogo padajuća jer je npr. $f'(-1)=-45<0.$

Na intervalu $\left\langle 0,\frac{5}{4}\right\rangle$ funkcija f je strogo rastuća jer je npr. $f'(1)=3>0.$

Na intervalu $\left\langle \frac{5}{4},4\right\rangle$ funkcija f je strogo padajuća jer je npr. $f'(2)=-12<0.$

Na intervalu $\left\langle 4,+\infty\right\rangle$ funkcija f je strogo rastuća jer je npr. $f'(5)=75>0.$

Iz te analize zaključujemo da funkcija f ima dvije točke lokalnih minimuma. Prva od njih je $T_1=(0,f(0))=(0,0)$, a druga $T_2=(4,f(4))=(4,-32)$. Točka T_1 očito nije globalni minimum zadane funkcije jer je npr. $f(4)=-32<0=f(0)$. Pokažimo da je točka T_2 tražena točka.

Primijetimo najprije da vrijedi jednakost $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$ (pri izvođenju ove jednakosti gledamo samo član x^4). To znači da se graf funkcije iz plus beskonačnosti „spušta“ do točke T_1, potom se „zaokreće“ i „penje“ do točke $T=\left(\frac{5}{4},f\left(\frac{5}{4}\right)\right)=\left(\frac{5}{4},\frac{1125}{256}\right)$, pa potom ponovno „zaokreće“ i „spušta“ do točke T_2, te naposljetku „zaokreće“ i „penje“ prema plus beskonačnosti. Već smo utvrdili da je $f(4)=-32<0=f(0)$, što znači da se graf funkcije ne „spušta“ ispod pravca $y=-32$. Zbog toga je točka T_2 tražena točka globalnoga minimuma.

Napomena: U zadatku nije eksplicitno navedeno na koji se minimum (lokalni ili globalni) misli, pa je u gornjem rješenju pretpostavljeno da se radi o globalnom

minimumu zadane funkcije. Da se radilo o lokalnom minimumu, zadatak bi imao točno dva različita rješenja: točke T_1 i T_2. Iz gornjega postupka slijedi i da zadana funkcija nema točku globalnoga maksimuma (jer vrijedi jednakost $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$), ali ima točku lokalnoga maksimuma $T = \left(\frac{5}{4}, \frac{1125}{256}\right)$.

29. 1.) 1; 3. Zapišimo lijevu stranu zadane jednakosti u algebarskom obliku. Imamo redom:

$$\frac{a+b\cdot i-2\cdot i}{i}+b-a\cdot i=\frac{a}{i}+\frac{b\cdot i}{i}-\frac{2\cdot i}{i}+b-a\cdot i=\frac{a\cdot i}{i\cdot i}+b-2+b-a\cdot i=$$
$$=\frac{a\cdot i}{i^2}+2\cdot b-2-a\cdot i=\frac{a\cdot i}{-1}+2\cdot b-2-a\cdot i=-a\cdot i+2\cdot b-2-a\cdot i=$$
$$=(2\cdot b-2)-2\cdot a\cdot i.$$

Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova na lijevoj i desnoj strani zadane jednakosti dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom:

$$\begin{cases}2\cdot b-2=4,\\ -2\cdot a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot b=4+2,\\ a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot b=6,\\ a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3,\\ a=1.\end{cases}$$

Dakle, traženi brojevi su $a=1$ i $b=3$.

2.) $\left(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\right)=(6.5,1.5)$. Zapišimo najprije prvu jednadžbu bez logaritama. Koristeći osnovna svojstva logaritma imamo redom:

$$\log\left(x^2-y^2\right)=\log 10+\log 4,$$
$$\log\left(x^2-y^2\right)=\log(10\cdot 4),$$
$$x^2-y^2=40,$$
$$(x-y)\cdot(x+y)=40.$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe sustava u posljednju jednakost dobivamo:

$$(x-y)\cdot 8=40\Leftrightarrow x+y=5.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}x+y=8,\\ x-y=5.\end{cases}$$

Zbrajanjem dobivenih jednadžbi dobivamo $2 \cdot x = 13$, otkuda je $x = \frac{13}{2}$.

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo $2 \cdot y = 3$, otkuda je $y = \frac{3}{2}$.

Dakle, rješenje zadatka je $(x, y) = \left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right) = (6.5, 1.5)$.

3.) $\frac{75}{4} \cdot \left(4 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}\right) \approx 138.19$. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu nad istom tetivom kružnice, mjera pripadnoga središnjega kuta promatrane tetive iznosi $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Traženu površinu dobit ćemo tako da od površine kružnoga isječka kojemu je mjera središnjega kuta 120° oduzmemo površinu jednakokračnoga trokuta kojemu su duljine krakova jednake duljini polumjera zadane kružnice, a mjera kuta između tih krakova 120°. Tako odmah dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{15^2 \cdot \pi \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \sin 120^\circ = \frac{225 \cdot \pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 225 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= 225 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{12} \cdot 225 = \frac{4 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 75 = \\
&= \frac{75}{4} \cdot \left(4 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}\right) \approx 138.19159109 \approx 138.19 \text{ cm}^2.
\end{aligned}
$$

4.) $C' = (8, -3)$. Odredimo najprije jednadžbu pravca koji prolazi točkom C i okomit je na zadani pravac. Njegov koeficijent smjera je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera zadanoga pravca. Koeficijent smjera zadanoga pravca je $k = \frac{1}{2}$, pa je koeficijent smjera pravca čiju jednadžbu želimo odrediti

$$
k_1 = \frac{-1}{k} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.
$$

Jednadžba toga pravca zapisana u eksplicitnom obliku glasi:

$$
\begin{aligned}
y &= (-2) \cdot (x - 2) + 9, \\
y &= (-2) \cdot x + 4 + 9, \\
y &= (-2) \cdot x + 13.
\end{aligned}
$$

Odredimo sjecište S dobivenoga pravca i zadanoga pravca. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}, \\ y = (-2) \cdot x + 13. \end{cases}$$

Metodom komparacije dobivamo:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} = (-2) \cdot x + 13, \\ &\frac{1}{2} \cdot x + 2 \cdot x = 13 - \frac{1}{2}, \\ &\frac{5}{2} \cdot x = \frac{25}{2}, \quad / : \frac{5}{2} \\ &x = 5. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti npr. u drugu jednadžbu polaznoga sustava dobivamo $y = (-2) \cdot 5 + 13 = -10 + 13 = 3.$ Dakle, $S = (5, 3).$

Neka je $C^{'} = (x_{C^{'}}, y_{C^{'}})$ tražena točka. Točka S je polovište dužine $\overline{CC^{'}}$, pa mora vrijediti jednakost:

$$\left(\frac{2 + x_{C^{'}}}{2}, \frac{9 + y_{C^{'}}}{2} \right) = (5, 3).$$

Odatle slijedi:

$$\begin{cases} \frac{2 + x_{C^{'}}}{2} = 5, \\ \frac{9 + y_{C^{'}}}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x_{C^{'}} = 10, \\ 9 + y_{C^{'}} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C^{'}} = 10 - 2 = 8, \\ y_{C^{'}} = 6 - 9 = -3. \end{cases}$$

Dakle, tražena točka je $C^{'} = (8, -3)$.

5.) $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{3} \cdot \sqrt{3} \right) + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ Koristeći adicijski poučak za funkciju sinus imamo redom:

$$4 \cdot \cos x = \sin\left(\frac{5}{6} \cdot \pi \right) \cdot \cos x + \cos\left(\frac{5}{6} \cdot \pi \right) \cdot \sin x,$$

$$4\cdot\cos x=\frac{1}{2}\cdot\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x,$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x=\frac{1}{2}\cdot\cos x-4\cdot\cos x,$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x=\left(\frac{-7}{2}\right)\cdot\cos x,\quad /\cdot 2$$
$$\sqrt{3}\cdot\sin x=-7\cdot\cos x.$$

Ako bi bilo $\cos x=0$, onda je nužno $|\sin x|=1$, pa bismo uvrštavanjem tih dviju jednakosti u posljednju jednakost dobili $\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot|1|=\sqrt{3}\cdot|\sin x|=|-7\cdot\cos x|=$ $=|-7\cdot 0|=|0|=0$, tj. $\sqrt{3}=0$, što je nemoguće. Zbog toga mora vrijediti relacija $\cos x\neq 0,$ pa posljednju jednakost smijemo podijeliti s $\cos x$. Tako dalje slijedi:

$$\sqrt{3}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-7,\quad /:\sqrt{3}$$
$$\operatorname{tg} x=\frac{-7}{\sqrt{3}},$$
$$x=\operatorname{arctg}\left(\frac{-7}{\sqrt{3}}\right)+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$
$$x\approx 283^\circ 9'+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

30. **142 mjeseca.** Prema podacima u zadatku, vrijednost automobila dva mjeseca nakon što je kupljen iznosi 105 000 kn. Do punih pet godina nakon što je kupljen preostaju još $5\cdot 12-2=60-2=58$ mjeseci, odnosno $58\cdot 30=1740$ dana. Vrijednost automobila nakon tih 1740 dana bit će jednaka:

$$C_1=105000\cdot(1-0.04\%)^{1740}=105000\cdot(1-0.0004)^{1740}=105000\cdot 0.9996^{1740}\ \text{kn}.$$

Ova se vrijednost smanjuje za 2% mjesečno. Ako s n označimo broj mjeseci (računajući od kraja pete godine) za koje će vrijednost automobila prvi put biti manja od 10 000 kn, onda vrijedi nejednakost:

$$105000\cdot 0.9996^{1740}\cdot(1-2\%)^n<10000.$$

Riješimo ovu eksponencijalnu nejednadžbu na uobičajen način:

$$105000\cdot 0.9996^{1740}\cdot(1-0.02)^n<10000,\quad /:5000$$
$$21\cdot 0.9996^{1740}\cdot 0.98^n<2,$$

$$0.98^n < \frac{2}{21 \cdot 0.9996^{1740}}, \quad / \log$$
$$\log\left(0.98^n\right) < \log\left(\frac{2}{21 \cdot 0.9996^{1740}}\right),$$
$$n \cdot \log 0.98 < \log 2 - \log(21) - \log\left(0.9996^{1740}\right).$$

Posljednju nejednadžbu moramo podijeliti s log 0.98. Taj je broj strogo negativan, pa se pri dijeljenju mijenja znak nejednakosti. Tako dobivamo:

$$n > \frac{\log 2 - \log(21) - 1740 \cdot \log(0.9996)}{\log 0.98} \approx 81.9.$$

Najmanji prirodan broj koji zadovoljava gornju nejednakost jednak je 82. Zbog toga je traženo vrijeme (iskazano u mjesecima) jednako

$$t = 5 \text{ godina} + 82 \text{ mjeseca} = 60 \text{ mjeseci} + 82 \text{ mjeseca} = 142 \text{ mjeseca}.$$

pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač