1. **D**. Koristeći jednakost

$$125 = 5^3$$

dobivamo redom:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[4]{125}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \\ &= \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \\ &= 5^{\frac{-3}{4}}.\end{aligned}$$

2. **C**. Imamo redom:

$$\begin{aligned}(1-2\cdot y)^2 &= ((-1)\cdot(2\cdot y-1))^2 = \\ &= (-1)^2\cdot(2\cdot y-1)^2 = \\ &= 1\cdot(2\cdot y-1)^2 = \\ &= (2\cdot y-1)^2.\end{aligned}$$

3. **B**. Neka je C početna cijena ulaznice. Tada je cijena ulaznice nakon povećanja od 25% jednaka

$$\begin{aligned}C_1 &= C + \frac{25}{100}\cdot C = \\ &= \left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot C = \\ &= (1+0.25)\cdot C = \\ &= 1.25\cdot C.\end{aligned}$$

Konačna cijena ulaznice treba biti za 15% veća u odnosu na početnu cijenu, odnosno

$$\begin{aligned}C_2 &= C + \frac{15}{100}\cdot C = \\ &= \left(1+\frac{15}{100}\right)\cdot C = \\ &= (1+0.15)\cdot C = \\ &= 1.15\cdot C.\end{aligned}$$

Zbog toga je traženi postotak smanjenja jednak:

$$\begin{aligned} p &= \frac{100 \cdot (C_1 - C_2)}{C_1} = \\ &= \frac{100 \cdot (1.25 \cdot C - 1.15 \cdot C)}{1.25 \cdot C} = \\ &= \frac{100 \cdot (1.25 - 1.15) \cdot C}{1.25 \cdot C} = \\ &= \frac{100 \cdot 0.1}{1.25} = \\ &= 8. \end{aligned}$$

4. C. Skup svih mogućih ishoda slučajnoga pokusa *bacanje kockice* je

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

On ima točno šest različitih elemenata, pa je

$$\text{card}(\Omega) = 6.$$

Skup svih povoljnih ishoda je unija skupa svih neparnih prirodnih brojeva jednakih ili manjih od 6 i skupa svih prirodnih brojeva strogo manjih od 4:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \\ &= \{1, 2, 3, 5\}. \end{aligned}$$

(**Oprez**: **Prilikom ispisivanja svih elemenata unije dvaju skupova svaki element obavezno navodimo točno jednom.**) On ima točno četiri različita elementa, pa je:

$$\text{card}(A) = 4.$$

Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \\ &= \frac{4}{6} = \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. B. Drugo rješenje tražene kvadratne jednadžbe je

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot c}}{2},$$

pa koristeći Vièteove formule dobivamo:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2} + \frac{3+\sqrt{9-4\cdot c}}{2} = \\
&= 3, \\
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right) = \\
&= \frac{\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)\cdot\left(3+\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{2\cdot 2} = \\
&= \frac{3^2-\left(\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{4} = \\
&= \frac{9-(9-4\cdot c)}{4} = \\
&= \frac{9-9+4\cdot c}{4} = \\
&= \frac{4\cdot c}{4} = \\
&= c.
\end{aligned}$$

Prema tome, tražena jednadžba je:

$$x^2 - 3\cdot x + c = 0.$$

Napomena: Zadatak se alternativno mogao riješiti i ovako. Odredimo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)^2 &= \frac{\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)^2}{2^2} = \\
&= \frac{3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{9-4\cdot c}+\left(\sqrt{9-4\cdot c}\right)^2}{4} = \\
&= \frac{9-6\cdot\sqrt{9-4\cdot c}+9-4\cdot c}{4} = \\
&= \frac{18-6\cdot\sqrt{9-4\cdot c}-4\cdot c}{4} = \\
&= \frac{6\cdot\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)-4\cdot c}{4} = \\
&= \frac{6\cdot\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{4} - \frac{4\cdot c}{4} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot \left(3 - \sqrt{9 - 4 \cdot c}\right)}{2} - c =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{9 - 4 \cdot c}}{2} \right) - c.$$

Odatle slijedi:

$$\left(\frac{3 - \sqrt{9 - 4 \cdot c}}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{9 - 4 \cdot c}}{2} \right) + c = 0,$$

pa je tražena jednadžba

$$x^2 - 3 \cdot x + c = 0.$$

6. C. Primijetimo da zadana kvadratna jednadžba ima točno jedno rješenje

$$x = -6.$$

Kvadratna jednadžba ima točno jedno rješenje ako i samo ako je njezina diskriminanta jednaka nuli. Dakle, tražena vrijednost je jednaka 0.

7. B. Graf zadane funkcije je pravac čija je jednadžba

$$y = (-2) \cdot x + 4.$$

Zapišimo tu jednadžbu u segmentnom obliku:

$$2 \cdot x + y = 4, \quad / : 4$$

$$\frac{2 \cdot x}{4} + \frac{y}{4} = 1,$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1.$$

Odatle zaključujemo da traženi pravac prolazi točkama (2, 0) i (0, 4). Jedini pravac koji ima to svojstvo prikazan je na slici B.

8. C. U $2022 - 2017 = 5$ godina godišnja proizvodnja meda se povećala za $150 - 50 = 100$ tona, odnosno za

$$\frac{100}{5} = 20$$

tona godišnje. To znači da se za godinu dana proizvodnja povećala za $1 \cdot 20$ tona, za dvije godine $2 \cdot 20$ tona, za tri godine $3 \cdot 20$ tona itd., pa zaključujemo da će se za t godina računajući od 2017. godine proizvodnja povećati za $t \cdot 20$ tona u odnosu na proizvodnju iz 2017. godine. Dakle, traženo pravilo je:

$$\begin{aligned} m(t) &= 50 + 20 \cdot t = \\ &= 20 \cdot t + 50,\ t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Napomena: Budući da t označava vrijeme proteklo od 2017. godine, vrijednosti godišnje proizvodnje meda tvore aritmetički niz čiji je nulti član 50, a peti član 150. Razlika d toga niza jednaka je

$$\begin{aligned} d &= \frac{150-50}{5} = \\ &= \frac{100}{5} = \\ &= 20, \end{aligned}$$

pa je traženo pravilo funkcije m

$$\begin{aligned} m(t) &= m(0) + t \cdot d = \\ &= 50 + t \cdot 20 = \\ &= 20 \cdot t + 50,\ t \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

9. D. Svi elementi traženoga skupa imaju svojstvo da je njihova druga koordinata jednaka a, a prva varijabilan realan broj. Zbog toga oni pripadaju pravcu $y = a$ čije točke imaju isto svojstvo (prva koordinata je varijabilan realan broj, a druga konstanta a).

10. D. Završna točka zadanoga vektora $\vec{a}$ ima koordinate (4, 2). Budući da i vektor $\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$ ima ishodište pravokutnoga sustava u ravnini kao početnu točku, odmah zaključujemo da završna točka vektora $\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$ ima koordinate

$$\left(\frac{3}{2} \cdot 4, \frac{3}{2} \cdot 2\right) = (6, 3).$$

11. C. Transformirajmo zadanu jednadžbu kružnice ovako:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 6 \cdot y + 5 = 0, \\ &\left(x^2 - 2 \cdot x\right) + \left(y^2 + 6 \cdot y\right) + 5 = 0, \\ &(x-1)^2 - 1^2 + (y+3)^2 - 3^2 + 5 = 0, \end{aligned}$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=5+1+9,$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2=15.$$

Odatle očitamo koordinate središta kružnice:

$$S=(1,-3).$$

12. D. Simetrale stranica svakoga trokuta sijeku se u središtu tom trokutu opisane kružnice.
Težište trokuta je sjecište težišnica trokuta.
Ortocentar trokuta je sjecište visina trokuta.
Središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala unutrašnjih kutova trokuta.

13. B. Omjer površine većega i površine manjega trokuta jednak je kvadratu koeficijenta sličnosti. Zbog toga je površina manjega trokuta jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \frac{80}{2^2}= \\ &= \frac{80}{4}= \\ &= 20 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

14. B. Spojimo dužinom vrhove kutova α i β. Dobivamo tetivu zadane kružnice kojoj pripadni središnji kut ima mjeru

$$360^\circ-220^\circ=140^\circ,$$

a pripadni obodni kut mjeru

$$\frac{1}{2}\cdot 140^\circ=70^\circ.$$

Sada promotrimo četverokut čiji unutrašnji kutovi imaju mjere α, β, 220° i 70°. Zbroj mjera svih unutrašnjih kutova toga četverokuta mora biti jednak 360°, pa odmah dobivamo:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+220^\circ+70^\circ &= 360^\circ, \\ \alpha+\beta &= 360^\circ-\left(220^\circ+70^\circ\right)= \\ &= 360^\circ-290^\circ= \\ &= 70^\circ. \end{aligned}$$

15. B. Najmanji kut trokuta nalazi se nasuprot najmanjoj stranici toga trokuta. U

ovom je slučaju riječ o stranici, odnosno kateti duljine 11 cm jer je hipotenuza pravokutnoga trokuta dulja od svake katete zasebno.

Označimo li traženu mjeru s α, onda iz jednadžbe

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{11}{17}$$

slijedi

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg}\left(\frac{11}{17}\right) \approx \\ &\approx 0.57430483 \text{ rad.} \approx \\ &\approx 32^\circ 54' 19''. \end{aligned}$$

16. **A**. Neka je a tražena duljina. Primjenom teorema o sinusima dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{10.3}{\sin 72^\circ} &= \frac{a}{\sin 58^\circ}, \qquad / \cdot \sin 58^\circ \\ a &= \frac{\sin 58^\circ}{\sin 72^\circ} \cdot 10.3 \approx \\ &\approx 9.18441 \approx \\ &\approx 9.18 \text{ cm.} \end{aligned}$$

17. **D**. Pravac FA siječe istaknutu ravninu u središtu kvadrata $ABFE$, pa nije paralelan s njom.
Pravac FB siječe istaknutu ravninu u točki B, pa nije paralelan s njom.
Pravac FE siječe istaknutu ravninu u točki E, pa nije paralelan s njom.
Pravac FG i istaknuta ravnina nemaju nijednu zajedničku točku. Budući da je FG paralelan s pravcima EH i BC koji pripadaju istaknutoj ravnini (jer je riječ o paralelnim stranicama kvadrata), taj je pravac paralelan i s istaknutom ravninom.

18. **C**. Neka je r traženi polumjer (iskazan u cm). Volumen kugle mora biti jednak volumenu kocke, pa imamo:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi &= 5^3, \qquad / \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \\ r^3 &= \frac{375}{4 \cdot \pi}, \qquad / \sqrt[3]{} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{375}{4 \cdot \pi}} \approx \\ &\approx 3.10175 \approx \\ &\approx 3.1. \end{aligned}$$

19. A. Točka $E(t)$ se očito nalazi u četvrtomu kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Prva koordinata svake točke koja se nalazi u tom kvadrantu, pa posebno i točke $E(t)$, neki je strogo pozitivan realan broj, dok je druga koordinata te točke neki strogo negativan realan broj. Budući da je

$$E(t) = (\cos t, \sin t),$$

zaključujemo da vrijede nejednakosti:

$$\begin{aligned} &\cos t > 0, \\ &\sin t < 0, \end{aligned}$$

iz kojih odmah slijedi:

$$\begin{aligned} &\sin t < 0 < \cos t, \\ &\text{tg } t = \frac{\sin t}{\cos t} < 0. \end{aligned}$$

20. A. Imamo redom:

$$\begin{aligned} i^{4\cdot k-5} &= i^{4\cdot k-8+3} = \\ &= i^{4\cdot k-8} \cdot i^3 = \\ &= \left(i^4\right)^{k-2} \cdot (-i) = \\ &= 1^{k-2} \cdot (-i) = \\ &= 1 \cdot (-i) = \\ &= -i. \end{aligned}$$

Napomena: Dobivena jednakost je istinita za svaki $k \in \mathbb{Z}$, pa posebno i za svaki $k \in \mathbb{N}$.

21. C. Osnovno svojstvo aritmetičkoga niza je da je svaki njegov član, osim prvoga, aritmetička sredina svojega prethodnika i svojega sljedbenika. Tako su za niz **A.** istinite jednakosti:

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{-5+1}{2}, \\ 1 &= \frac{-2+4}{2}, \end{aligned}$$

za niz **B.** istinite jednakosti

$$-2 = \frac{-3+(-1)}{2},$$

$$-1=\frac{-2+0}{2},$$

a za niz **D**. istinite jednakosti

$$1=\frac{3+(-1)}{2},$$
$$-1=\frac{1+(-3)}{2}.$$

Međutim, za niz **C**. vrijede relacije:

$$-1\neq\frac{1+1}{2},$$
$$1\neq\frac{(-1)+(-1)}{2},$$

pa taj niz nije aritmetički.

22. B. Funkcija pod **A**. definirana je kad god je $x-3\neq 0$, odnosno $x\neq 3$. Njezina je prirodna domena skup $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Funkcija pod **B**. definirana je kad god je $x-3\geq 0$, odnosno $x\geq 3$. Njezina je prirodna domena skup $[3,+\infty\rangle$.

Funkcija pod **C**. definirana je kad god je $x-3>0$, odnosno $x>3$. Njezina je prirodna domena skup $\langle 3,+\infty\rangle$.

Funkcija pod **D**. definirana je za svaki realan broj x. Njezina je prirodna domena skup $\mathbb{R}$.

23. D. Primjenom pravila za deriviranje umnoška dviju funkcija uz korištenje tablice derivacija elementarnih funkcija dobivamo:

$$f'(x)=(x)'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'=$$
$$=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x=$$
$$=\sin x+x\cdot\cos x.$$

24. A. Derivabilna funkcija f je strogo rastuća na otvorenom intervalu I ako i samo ako vrijedi nejednakost:

$$f'(x)>0,\ \forall x\in I.$$

Iz zadane slike vidimo da vrijedi nejednakost:

$$f^{'}(x) > 0,\ \forall x \in \langle -3, -2 \rangle,$$

pa zaključujemo da funkcija f (strogo) raste na intervalu $\langle -3, -2 \rangle$.

25. $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{8\cdot x-6}{5}+3\cdot(2\cdot x+1)\geq -2, \qquad /\cdot 5\\
&8\cdot x-6+15\cdot(2\cdot x+1)\geq -10,\\
&8\cdot x-6+30\cdot x+15\geq -10,\\
&38\cdot x\geq -10+6-15,\\
&38\cdot x\geq -19, \qquad /:38\\
&x\geq \frac{-1}{2},\\
&x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right\rangle.
\end{aligned}$$

26. $\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$. Pomnožimo brojnik i nazivnik zadanoga izraza nazivnikom toga izraza. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{\cdot\sqrt{1-x}}{\cdot\sqrt{1-x}} &= \frac{\sqrt{1-x}}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2} =\\
&= \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}.
\end{aligned}$$

27. $\varphi_1 \approx 88^\circ 34' 3''$, $\varphi_2 \approx 91^\circ 25' 57''$. Prisjetimo se da se dijagonale paralelograma raspolavljaju. Ako paralelogram nije romb, one zatvaraju dva različita kuta. Jedan od njih je šiljast, a drugi tup. Zbog toga zadatak ima točno dva različita rješenja.

Promotrimo trokut kojemu su stranice zadana stranica paralelograma te polovice dijagonala paralelograma. Označimo li traženi kut s φ_1, primjenom teorema o kosinusu dobivamo:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 20\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot 28\right)^2-17^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 20\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 28\right)} =$$

$$=\frac{10^2+14^2-17^2}{2\cdot 10\cdot 14}=$$
$$=\frac{100+196-289}{280}=$$
$$=\frac{7}{280}=$$
$$=\frac{1}{40},$$
$$\varphi_1=\arccos\left(\frac{1}{40}\right)\approx$$
$$\approx 1.54579\text{ rad.}\approx$$
$$\approx 88^\circ 34' 3''.$$

Kako vidimo, dobili smo šiljasti kut između dijagonala, pa preostaje odrediti njemu suplementarni kut (koji je drugo rješenje zadatka):

$$\varphi_2=180^\circ-\varphi_1\approx$$
$$\approx 180^\circ-88^\circ 34' 3''=$$
$$=91^\circ 25' 57''.$$

Napomena: Da službeno rješenje zadatka bude ispravno, formulaciju pitanja treba izmijeniti u: „Koliko iznosi mjera šiljastoga kuta između dijagonala toga paralelograma?“.

28. $z=4\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$. Broj $z=-4$ ima realni dio jednak $-4,$ a imaginarni dio jednak 0. Zbog toga je njemu pridružena točka Gaussove ravnine $Z=(-4,0)$.

Duljina spojnice točke Z i ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini je očito jednaka 4. Prema geometrijskoj interpretaciji modula kompleksnoga broja zaključujemo da je

$$|z|=4.$$

Kut kojega ta spojnica zatvara s pozitivnim dijelom realne osi pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini ima mjeru $180^\circ=\pi$ rad. Prema definiciji glavnoga argumenta kompleksnoga broja zaključujemo da je

$$\operatorname{Arg}(z)=\pi\text{ rad.}$$

Tako slijedi da je traženi zapis kompleksnoga broja:

$$z=4\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi).$$

29.

1.) a^3+8 **ili** $8+a^3$. Primjenom formule za zbroj kubova odmah dobivamo:

$$\begin{aligned}\left(4-2\cdot a+a^2\right)\cdot(a+2)&=\left(2^2-2\cdot a+a^2\right)\cdot(a+2)=\\&=2^3+a^3=\\&=8+a^3=\\&=a^3+8.\end{aligned}$$

2.) $\frac{b^2}{2}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}\frac{b^2-3\cdot b}{2}:\frac{b-3}{b}&=\frac{b\cdot(b-3)}{2}\cdot\frac{b}{b-3}\\&=\frac{b\cdot b}{2}=\\&=\frac{b^2}{2}.\end{aligned}$$

30. 1.) y^{18}. Koristeći pravila za računanje s potencijama dobivamo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{y^0\cdot y^4}{y^{-5}}\right)^2&=\left(1\cdot y^4\cdot y^5\right)^2=\\&=\left(y^{4+5}\right)^2=\\&=\left(y^9\right)^2=\\&=y^{9\cdot 2}=\\&=y^{18}.\end{aligned}$$

2.) **4**. Posljednja znamenka broja $3^1=3$ jednaka je 3. Posljednja znamenka broja $3^2=9$ jednaka je 9. Posljednja znamenka broja $3^3=27$ jednaka je 7. Posljednja znamenka broja $3^4=81$ jednaka je 1. Posljednja znamenka broja $3^5=243$ jednaka je 3 itd. Uočavamo sljedeće pravilo:

- ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta n s 4 jednak 1, posljednja znamenka broja 3^n jednaka je 3;
- ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta n s 4 jednak 2, posljednja znamenka broja 3^n jednaka je 9;
- ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta n s 4 jednak 3, posljednja znamenka broja 3^n jednaka je 7;
- ako je eksponent n djeljiv s 4, posljednja znamenka broja 3^n jednaka je 1.

Budući da je broj 20 djeljiv s 4, posljednja znamenka broja 3^{20} jednaka je 1.
Budući da broj 21 pri dijeljenju s 4 daje količnik 5 i ostatak 1, posljednja znamenka broja 3^{21} jednaka je 3.
Prema tome, posljednja znamenka zbroja $3^{20}+3^{21}$ jednaka je $1+3=4$.

31. 1.) 15%. Traženi je postotak jednak:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1000-850}{1000} = \\ &= \frac{150}{1000} = \\ &= \frac{15}{100} = \\ &= 15\%. \end{aligned}$$

2.) **Povećala se za 43 centa ili 0.43 €.** Koristeći jednostavno pravilo trojno postavimo sljedeću shemu:

$$\begin{array}{c|rr|c} \uparrow & 850 \text{ g} & 2.45 \text{ €} & \uparrow \\ & 1000 \text{ g} & x \text{ €} & \end{array}$$

Veličine *masa pakiranja* i *cijena pakiranja* su upravno razmjerne, pa iz gornje sheme slijedi razmjer:

$$x:1000 = 2.45:850.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$\begin{aligned} & x \cdot 850 = 1000 \cdot 2.45, \\ & 850 \cdot x = 2450, \quad /:850 \\ & x = \frac{49}{17} \approx 2.88. \end{aligned}$$

Dakle, cijena jednoga kilograma keksa se povećala za

$$2.88 - 2.45 = 0.43 \text{ €}.$$

32. 1.) 56 500 tona. Tražena prosječna mjesečna proizvodnja u promatranoj godini jednaka je aritmetičkoj sredini 12 mjesečnih proizvodnji. Ta sredina iznosi:

$$\begin{aligned} A &= \frac{55+54+56+57+59+57+59+58+54+57+55+57}{12} = \\ &= \frac{2\cdot 54 + 2\cdot 55 + 56 + 4\cdot 57 + 58 + 2\cdot 59}{12} = \end{aligned}$$

$$= \frac{678}{12} =$$
$$= 56.5.$$

Dakle, prosječna mjesečna proizvodnja iznosi 56 500 tona.

2.) **57 000 tona**. Najprije uzlazno sortirajmo niz mjesečnih proizvodnji. Dobivamo sljedeći niz:

54, 54, 55, 55, 56, 57, 57, 57, 57, 58, 59, 59.

Ukupan broj podataka jednak je 12 i on je djeljiv s 4. Zbog toga je traženi medijan jednak:

$$\begin{aligned} Me &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{12}{2}} + x_{\frac{12}{2}+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x_6 + x_7) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (57 + 57) = \\ &= 57. \end{aligned}$$

33. 1.) 180. Duljina hipotenuze zadanoga trokuta iznosi

$$\begin{aligned} c &= 27 + 48 = \\ &= 75 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Duljine kateta računamo koristeći Euklidov teorem:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{27 \cdot 75} = \\ &= \sqrt{3^3 \cdot 5^2 \cdot 3} = \\ &= \sqrt{3^4 \cdot 5^2} = \\ &= 3^2 \cdot 5 = \\ &= 45 \text{ cm,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{48 \cdot 75} = \\ &= \sqrt{4^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 3} = \\ &= \sqrt{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} = \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 5 = \\ &= 60 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Tako je traženi opseg jednak:

$$\begin{aligned} O &= a+b+c= \\ &= 45+60+75= \\ &= 180 \text{ cm.} \end{aligned}$$

2.) 12. Neka su $x := \left|\overline{AD}\right|$ i $y := \left|\overline{BD}\right|$. Zbroj tih dviju duljina mora biti jednak duljini stranice $\overline{AB}$, a ona iznosi 30 cm. Dakle, vrijedi jednakost:

$$x + y = 30.$$

Nadalje, trokutovi ABC i BDE su slični prema teoremu $K-K$ (zajednički kut kod vrha B i sukladni kutovi kod vrhova A i D kao posljedica paralelnosti pravaca AC i DE). Primjenom Talesova teorema dobivamo razmjer:

$$y:15 = 30:25.$$

Iz toga razmjera slijedi:

$$\begin{aligned} &y \cdot 25 = 15 \cdot 30, \\ &25 \cdot y = 450, \quad /:25 \\ &y = 18. \end{aligned}$$

Tako je konačno

$$\begin{aligned} x &= 30-y= \\ &= 30-18= \\ &= 12 \text{ cm.} \end{aligned}$$

34. 1.) 9.6. Tražena je vrijednost (izražena u metrima) jednaka najvećoj vrijednosti funkcije h. Prvi pribrojnik u pravilu te funkcije je nepozitivan realan broj (jednak ili manji od nule). Njegova je najveća vrijednost jednaka 0 i postiže se za $x = 8$. Tako zaključujemo da je tražena vrijednost jednaka

$$\begin{aligned} h_{\max} &= 0+9.6= \\ &= 9.6. \end{aligned}$$

2.) 16. Tražena je vrijednost jednaka strogo pozitivnom rješenju jednadžbe

$$h(x) = 0.$$

Naime, za $x = 0$ lopta se nalazi na tlu jer je ispucana s tla. Zbog toga će $x = 0$ sigurno biti jedno rješenje jednadžbe $h(x) = 0$. Međutim, to rješenje ćemo zanemariti i potražiti rješenje koje je strogo veće od nule, odnosno strogo pozitivno rješenje.

Prilikom rješavanja jednadžbe koristit ćemo jednakost

$$\sqrt{a^2}=|a|,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&-0.15\cdot(x-8)^2+9.6=0,\\
&-0.15\cdot(x-8)^2=-9.6, \quad /:(-0.15)\\
&(x-8)^2=64, \quad /\sqrt{\ }\\
&|x-8|=\sqrt{64},\\
&|x-8|=8,\\
&x-8=8 \text{ ili } x-8=-8,\\
&x=8+8 \text{ ili } x=-8+8,\\
&x=16 \text{ ili } x=0.
\end{aligned}$$

Kako smo i rekli, rješenje $x=0$ zanemarujemo, pa preostaje $x=16.$ Dakle, tražena je udaljenost jednaka 16 metara.

35. 1.) $\langle -1,+\infty\rangle$. Slika eksponencijalne funkcije $f_1(x)=7^x$ je interval $\langle 0,+\infty\rangle$. Da dobijemo traženi skup, svaki element intervala $\langle 0,+\infty\rangle$ smanjimo za 1. To praktično znači da se gornja granica $(+\infty)$ toga intervala ne mijenja, dok se donja granica (0) smanji za 1. Tako dobijemo interval $\langle 0-1,+\infty\rangle=\langle -1,+\infty\rangle$.

2.) $\log_7(x+1)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&y=7^x-1,\\
&7^x=y+1, \quad /\log_7\\
&x=\log_7(y+1).
\end{aligned}$$

Promjenom oznaka nezavisne, odnosno zavisne varijable dobijemo:

$$f^{-1}(x)=\log_7(x+1).$$

36. 1.) **58 bodova**. Riješimo jednadžbu $B(15)=50$ po nepoznanici b. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&4\cdot\log_{0.25}(15+1)+b=50,\\
&b=50-4\cdot\log_{0.25}16=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 50 - 4 \cdot \log_{0.25}\left(0.25^{-2}\right) = \\
&= 50 - 4 \cdot (-2) = \\
&= 50 + 8 = \\
&= 58.
\end{aligned}
$$

Dakle, traženi broj bodova jednak je 58.

2.) **7 mjeseci.** Riješimo jednadžbu $B(t) = 54$ po nepoznanici t uvrštavajući $b = 60$. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&4 \cdot \log_{0.25}(t+1) + 60 = 54, \\
&4 \cdot \log_{0.25}(t+1) = 54 - 60, \\
&4 \cdot \log_{0.25}(t+1) = -6, \quad / : 4 \\
&\log_{0.25}(t+1) = \frac{-3}{2}, \\
&t + 1 = 0.25^{\frac{-3}{2}}, \\
&t + 1 = 8, \\
&t = 8 - 1 = 7.
\end{aligned}
$$

Dakle, traženo je vrijeme 7 mjeseci.

37. Koristeći osnovna pravila za deriviranje i derivaciju potencije x^n odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \cdot \left(x^3\right)' - 15 \cdot \left(x^2\right)' = \\
&= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 15 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = \\
&= 6 \cdot x^2 - 30 \cdot x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 6 \cdot \left(x^2\right)' - 30 \cdot (x)' = \\
&= 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 30 \cdot 1 = \\
&= 12 \cdot x - 30.
\end{aligned}
$$

1.) $x = 5$. Odredimo najprije stacionarne točke zadane funkcije. Budući da je f polinom čija je prirodna domena skup $\mathbb{R}$ i koji je derivabilan (ima derivaciju) u svakoj točki toga skupa, stacionarne su točke ujedno sva realna rješenja jednadžbe

$$f'(x) = 0.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&f'(x)=0,\\
&6\cdot x^2-30\cdot x=0, \quad /:6\\
&x^2-5\cdot x=0,\\
&x\cdot(x-5)=0,\\
&x_1=0,\ x_2=5.
\end{aligned}$$

Potom izračunamo:

$$\begin{aligned}
f''(x_1)=f''(0)&=\\
&=12\cdot 0-30=\\
&=-30,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x_2)=f''(5)&=\\
&=12\cdot 5-30=\\
&=30.
\end{aligned}$$

Budući da je $f''(5)>0$, primjenom f''- testa zaključujemo da za $x=5$ zadana funkcija ima lokalni minimum $f(5)=2\cdot 5^3-15\cdot 5^2=-125$. (Za $x=0$ zadana funkcija ima lokalni maksimum $f(0)=0$.)

2.) 36. Traženi je nagib jednak koeficijentu smjera navedene tangente, a ovaj je pak jednak vrijednosti prve derivacije zadane funkcije u točki $x=-1$. Tako zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
k=f'(-1)&=\\
&=6\cdot(-1)^2-30\cdot(-1)=\\
&=6\cdot 1+30=\\
&=36.
\end{aligned}$$

38. 1.) $\mathbf{\frac{17}{10}\cdot\sqrt{10}}$ **jed. duljine.** Površina zadanoga trokuta jednaka je:

$$\begin{aligned}
P&=\frac{1}{2}\cdot|7\cdot(8-(-4))+(-1)\cdot(-4-1)+3\cdot(1-8)|=\\
&=\frac{1}{2}\cdot|7\cdot 12+(-1)\cdot(-5)+3\cdot(-7)|=\\
&=\frac{1}{2}\cdot|84+5-21|=
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 68=$$
$$=34 \text{ kv. jed.}$$

Duljina stranice $a=\left|\overline{BC}\right|$ jednaka je udaljenosti točaka B i C u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Izračunajmo tu udaljenost:

$$\begin{aligned}
a&=\left|\overline{BC}\right|=\\
&=\sqrt{(3-(-1))^2+(-4-8)^2}=\\
&=\sqrt{(3+1)^2+(-12)^2}=\\
&=\sqrt{4^2+12^2}=\\
&=\sqrt{16+144}=\\
&=\sqrt{16\cdot(1+9)}=\\
&=4\cdot\sqrt{10} \text{ jed. duljine.}
\end{aligned}$$

Tako je tražena duljina visine povučene iz vrha A jednaka:

$$\begin{aligned}
v_a&=\frac{2\cdot P}{a}=\\
&=\frac{2\cdot 34}{4\cdot\sqrt{10}}=\\
&=\frac{17}{\sqrt{10}}=\\
&=\frac{17}{\sqrt{10}}\frac{\cdot\sqrt{10}}{\cdot\sqrt{10}}=\\
&=\frac{17}{10}\cdot\sqrt{10} \text{ jed. duljine.}
\end{aligned}$$

2.) 13. Računamo redom:

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{v}&=-8\cdot\vec{i}+15\cdot\vec{j}+k\cdot\vec{i}+(k-2)\cdot\vec{j}=\\
&=(k-8)\cdot\vec{i}+(k-2+15)\cdot\vec{j}=\\
&=(k-8)\cdot\vec{i}+(k+13)\cdot\vec{j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{v}\right)&=\left(-8\cdot\vec{i}+15\cdot\vec{j}\right)\cdot\left((k-8)\cdot\vec{i}+(k+13)\cdot\vec{j}\right)=\\
&=(-8)\cdot(k-8)+15\cdot(k+13)=\\
&=(-8)\cdot k+64+15\cdot k+195=\\
&=7\cdot k+259.
\end{aligned}$$

Preostaje riješiti jednadžbu

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{v}\right)=350,$$

odnosno jednadžbu

$$7\cdot k+259=350$$

po nepoznanici k. Odmah imamo:

$$\begin{aligned}
&7\cdot k=350-259,\\
&7\cdot k=91, \quad /:7\\
&k=13.
\end{aligned}$$

39. 1.) 20. Neka je d razlika aritmetičkoga niza. Prema zahtjevu zadatka, aritmetički niz je padajući, pa je $d<0$. Prvi član toga niza jednak je 24, pa su 19. i 31. član toga niza redom jednaki:

$$\begin{aligned}
a_{19}&=24+(19-1)\cdot d=\\
&=24+18\cdot d,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31}&=24+(31-1)\cdot d=\\
&=24+30\cdot d.
\end{aligned}$$

Brojevi 24, $24+18\cdot d$ i $24+30\cdot d$ u danom poretku tvore tri uzastopna člana geometrijskoga niza. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$(24+18\cdot d)^2=24\cdot(24+30\cdot d).$$

Odredimo strogo negativno rješenje te kvadratne jednadžbe (ako postoji). Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(6\cdot(4+3\cdot d))^2=24\cdot 6\cdot(4+5\cdot d),\\
&6^2\cdot(4+3\cdot d)^2=24\cdot 6\cdot(4+5\cdot d), \quad /:6^2\\
&(4+3\cdot d)^2=4\cdot(4+5\cdot d),\\
&16+24\cdot d+9\cdot d^2=16+20\cdot d,\\
&9\cdot d^2+24\cdot d-20\cdot d=0, \quad /:d<0\\
&9\cdot d+4=0,\\
&9\cdot d=-4, \quad /:9\\
&d=\frac{-4}{9}.
\end{aligned}$$

Tako konačno računamo traženi deseti član aritmetičkoga niza:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 24+(10-1)\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)= \\ &= 24+9\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)= \\ &= 24-4= \\ &= 20. \end{aligned}$$

2.) $N(f)=\left\{\frac{\pi}{9}+k\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{9}+k\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$. Sa slike očitamo da je najmanja vrijednost promatrane funkcije jednaka -6. Najmanja vrijednost funkcije $f(x)=A\cdot\cos(B\cdot x)+D$ jednaka je $-A+D$, pa mora vrijediti jednakost:

$$-A+D=-6.$$

Nadalje, sa slike očitamo da je najveća vrijednost promatrane funkcije jednaka 2. Najveća vrijednost funkcije $f(x)=A\cdot\cos(B\cdot x)+D$ jednaka je $A+D$, pa mora vrijediti jednakost:

$$A+D=2.$$

Tako iz sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} -A+D=-6, \\ A+D=2 \end{cases}$$

zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$2\cdot D=-4,$$

otkuda je

$$D=-2\,.$$

Oduzimanjem tih dviju jednadžbi (npr. druge jednadžbe od prve jednadžbe) dobivamo

$$2\cdot A=8,$$

otkuda je

$$A=4.$$

Sa slike vidimo i da je „mjerna jedinica“ na osi apscisa jednaka $\frac{\pi}{3}$. Ta je vrijednost ujedno i polovica temeljnoga perioda P promatrane funkcije. S druge je strane taj temeljni period jednak

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{B}.$$

Iz tih razmatranja dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{B} = \frac{\pi}{3}$$

iz koje odmah slijedi

$$B = 3.$$

Tako smo dobili pravilo funkcije f:

$$f(x) = 4 \cdot \cos(3 \cdot x) - 2.$$

Nultočke te funkcije dobivamo rješavanjem jednadžbe

$$f(x) = 0.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&4 \cdot \cos(3 \cdot x) - 2 = 0, \\
&4 \cdot \cos(3 \cdot x) = 2, \quad /:4 \\
&\cos(3 \cdot x) = \frac{1}{2}, \\
&3 \cdot x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi, \\
&3 \cdot x = \pm \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi, \\
&x = \pm \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Sve dobivene nultočke pregledno je zapisati u obliku skupa:

$$N(f) = \left\{\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

40. ≈ **225.54 cm³**. Prisjetimo se da je u jednakokračnom trokutu visina povučena na osnovicu toga trokuta ujedno i težišnica povučena na osnovicu iz vrha nasuprot osnovici. Povucimo tu visinu.

Težišnica povučena na krak trokuta siječe povučenu visinu u težištu trokuta. Uočimo pravokutan trokut kojemu su vrhovi težište trokuta, nožište visine povučene na osnovicu i jedan vrh osnovice. Prema teoremu o težištu trokuta, u tom je trokutu:

- udaljenost od težišta trokuta do nožišta visine povučene na osnovicu trokuta jednaka trećini duljine visine povučene na osnovicu trokuta;
- udaljenost od težišta trokuta do uočenoga vrha osnovice trokuta jednaka dvije trećine duljine težišnice povučene na krak trokuta;
- udaljenost nožišta visine povučene na osnovicu trokuta i uočenoga vrha osnovice trokuta jednaka polovici duljine osnovice trokuta (jer je trokut jednakokračan).

Uz standardne oznake u trokutu, prema Pitagorinu teoremu dobivamo:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\cdot v_a\right)^2=\left(\frac{2}{3}\cdot t_b\right)^2.$$

Uvrštavanjem zadanih numeričkih podataka slijedi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\cdot v_a\right)^2=\left(\frac{2}{3}\cdot 12\right)^2,\\
&5^2+\frac{1}{9}\cdot v_a^2=8^2, \qquad /\cdot 9\\
&v_a^2=9\cdot\left(8^2-5^2\right)=\\
&\quad=9\cdot 39,\\
&v_a=3\cdot\sqrt{39}\text{ cm.}
\end{aligned}$$

Također prema Pitagorinu teoremu, duljina kraka osnovke jednaka je

$$\begin{aligned}
b&=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+v_a^2}=\\
&=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+9\cdot 39}=\\
&=\sqrt{25+351}=\\
&=\sqrt{376}\text{ cm.}
\end{aligned}$$

Površina trokuta jednaka je:

$$B=\frac{1}{2}\cdot a\cdot v_a=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3\cdot\sqrt{39}=$$
$$=15\cdot\sqrt{39}\text{ cm}^2.$$

Polumjer trokutu upisane kružnice jednak je:

$$\rho=\frac{B}{s}=$$
$$=\frac{B}{\frac{a+2\cdot b}{2}}=$$
$$=\frac{2\cdot B}{a+2\cdot b}=$$
$$=\frac{2\cdot 15\cdot\sqrt{39}}{10+2\cdot\sqrt{376}}=$$
$$=\frac{15\cdot\sqrt{39}}{5+\sqrt{376}}\text{ cm}.$$

Preostaje uočiti pravokutan trokut kojemu je jedna kateta jednaka visini piramide (označimo je s h), a druga kateta jednaka polumjeru kružnice upisane osnovki piramide. Kut između druge katete (tj. polumjera kružnice upisane osnovki piramide) i hipotenuze jednak je kutu kojega bočna strana piramide zatvara s osnovkom piramide. Označimo li taj kut s α, vrijedi jednakost:

$$\text{tg }\alpha=\frac{h}{\rho}.$$

Odavde je

$$h=\rho\cdot\text{tg }\alpha.$$

Uvrštavanjem zadanih i dobivenih podataka slijedi:

$$h=\frac{15\cdot\sqrt{39}}{5+\sqrt{376}}\cdot\text{tg }62^\circ\text{ cm}.$$

Tako je traženi volumen piramide jednak:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \\
&= \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot \sqrt{39} \cdot \frac{15 \cdot \sqrt{39}}{5 + \sqrt{376}} \cdot \operatorname{tg} 62^\circ = \\
&= \frac{2925}{5 + \sqrt{376}} \cdot \operatorname{tg} 62^\circ = \\
&= \frac{2925}{376 - 25} \cdot \left(\sqrt{376} - 5\right) \cdot \operatorname{tg} 62^\circ = \\
&= \frac{25}{3} \cdot \left(\sqrt{376} - 5\right) \cdot \operatorname{tg} 62^\circ \approx \\
&\approx 225.54172405621 \approx \\
&\approx 225.54 \text{ cm}^3.
\end{aligned}
$$