1. **C**. Interval *A* tvore svi realni brojevi koji su jednaki ili veći od –3 i strogo manji od 7. Interval *B* tvore svi realni brojevi koji su strogo veći od 1 i jednaki ili veći od 15. Presjek tih intervala tvore realni brojevi koji imaju sva četiri navedena svojstva. Lako vidimo da se ta četiri svojstva mogu „sažeti“ u dva, tj. da presjek tvore svi realni brojevi koji su strogo veći od 1 i strogo manji od 7. Zbog toga je rješenje zadatka skup $\langle 1,7\rangle$.

2. **B.** Primijetimo najprije da je nužno $x \neq 0$. Znamo da vrijedi ekvivalencija: $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a) \vee (x \leq -a)$. Stoga moramo riješiti dvije nejednadžbe:

I. $$\frac{36}{x} \geq 17 \Leftrightarrow \frac{36}{x} - 17 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{36 - 17 \cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (36 - 17 \cdot x \geq 0) \wedge (x > 0) \\ (36 - 17 \cdot x \leq 0) \wedge (x < 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-17 \cdot x \geq -36) \wedge (x > 0) \\ (-17 \cdot x \leq -36) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x \leq \dfrac{36}{17}\right) \wedge (x > 0) \\ \left(x \leq \dfrac{36}{17}\right) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{36}{17}\right) \wedge (x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{36}{17}\right].$$

II. $$\frac{36}{x} \leq -17 \Leftrightarrow \frac{36}{x} + 17 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{36 + 17 \cdot x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (36 + 17 \cdot x \leq 0) \wedge (x > 0) \\ (36 + 17 \cdot x \geq 0) \wedge (x < 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (17 \cdot x \leq -36) \wedge (x > 0) \\ (17 \cdot x \geq -36) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x \leq -\dfrac{36}{17}\right) \wedge (x > 0) \\ \left(x \geq -\dfrac{36}{17}\right) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \geq -\frac{36}{17}\right) \wedge (x < 0)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{36}{17},\ 0\right).$$

Stoga svi realni brojevi zadovoljavaju zadanu nejednakost tvore skup $\left[-\frac{36}{17},\ 0\right) \cup \left(0,\ \frac{36}{17}\right] = \left[-\frac{36}{17},\ \frac{36}{17}\right] \setminus \{0\}$. Budući da je $\frac{36}{17} = 2\frac{2}{17}$, u navedenom se skupu nalazi točno četiri cijela broja: –2, –1, 1 i 2.

3. **B**. Izrazimo najprije udaljenost od Zagreba do Kutine u centimetrima:

$$72 \text{ km} = 72000 \text{ m} = 7\ 200\ 000 \text{ cm}.$$

1 cm na karti odgovara 4 800 000 cm u prirodi, pa udaljenosti od 7 200 000 cm u prirodi odgovara udaljenosti od $\frac{7\ 200\ 000}{4\ 800\ 000} = 1.5$ cm na karti.

4. **B.** Imamo redom:

$$S = 100 \cdot (S + P) \Leftrightarrow S = 100 \cdot S + 100 \cdot P \Leftrightarrow S - 100 \cdot S = 100 \cdot P \Leftrightarrow -99 \cdot S = 100 \cdot P \Leftrightarrow P = -\frac{99}{100} \cdot S.$$

5. **A**. Sredimo zadani izraz primjenom formule za kvadrat binoma:

$$b^2 \cdot (2 \cdot a - 1)^2 + a \cdot (b^2 + 4) = b^2 \cdot (4 \cdot a^2 - 4 \cdot a + 1) + a \cdot (b^2 + 4) =$$
$$4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^2 + b^2 + a \cdot b^2 + 4 \cdot a = 4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 3 \cdot a \cdot b^2 + b^2 + 4 \cdot a.$$

Dakle, sređeni izraz sadrži član $-3 \cdot a \cdot b^2$.

6. **C.** Obujam kugle i obujam kocke moraju biti jednaki. Označimo li s a duljinu brida kocke, onda imamo redom:

$$a^3 = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot \pi, \quad / \sqrt[3]{\ }$$
$$a = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi} = 16.11991954 \approx 16.12 \text{ cm}.$$

7. **D**. Imamo redom:

$$(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left[g\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = f\left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7\right] = f(-1-7) = f(-8) =$$
$$= (-8)^2 + 1 = 64 + 1 = 65.$$

8. **D.** Zapišimo najprije broj $w = 8 \cdot i$ u trigonometrijskom obliku. Tom broju pridružena je točka $W = (0,8)$ Gaussove ravnine. Spojnica ishodišta Gaussove ravnine i točke W ima duljinu 8, a s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut čija je mjera $\frac{\pi}{2}$ radijana. Zbog toga je $w = 8 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Preostaje primijeniti de Moivrèovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi + 4 \cdot k \cdot \pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot k + 1}{6} \cdot \pi\right), k = 0,1,2 \Rightarrow$$

$$z_0 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 0 + 1}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 1 + 1}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right)\right] = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 2 + 1}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right)\right] = 2 \cdot (0 - i) = -2 \cdot i.$$

Dobivenim rješenjima pridružene su redom točke $Z_0 = \left(\sqrt{3}, 1\right)$, $Z_1 = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ i $Z_2 = (0, -2)$.

Iz slike vidimo da se točka Z_2 podudara s točkom pridruženom kompleksnom broju z_4.

9. **D**. Neka je $ABCD$ zadani trapez, pri čemu su $\overline{AB}$ dulja osnovica, $\overline{CD}$ kraća osnovica, a $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ krakovi trapeza. Prema podacima u zadatku, vrijedi jednakost: $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AD}\right|$.

Povucimo dijagonalu $\overline{BD}$. Označimo: $y := \angle BDC$, $\gamma := \angle BCD$. Neka je α tražena mjera kuta $\angle BAD$. Kutovi $\angle ABD$ i $\angle BDC$ su kutovi uz priječnicu (transverzalu), pa imaju iste mjere. Zbog toga je $\angle ABD = \angle BDC = y$. Trokut ΔBCD je jednakokračan jer je $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ i kutovi $\angle BDC$ i $\angle DBC$ su kutovi uz osnovicu $\overline{BD}$ toga trokuta. Zbog toga je $\angle DBC = \angle BDC = y$, pa je $\alpha = \angle BAD = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = y + y = 2 \cdot y$. Preostaje iskoristiti činjenicu da je zbroj mjera kutova u svakom trokutu, pa posebno i u trokutu ΔABD, jednak 180°:

$$\begin{aligned}
&\angle ABD + \angle BAD + \angle BDA = 180^\circ,\\
&y + 2 \cdot y + 105^\circ = 180^\circ,\\
&3 \cdot y = 180^\circ - 105^\circ,\\
&3 \cdot y = 75^\circ, \quad / : 3\\
&y = 25^\circ.
\end{aligned}$$

Dakle, tražena mjera je $\alpha = 2 \cdot y = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$.

10. **A.** Znamo da u svakom trokutu vrijedi nejednakost $|a - b| < c < a + b$. Budući da je $a = 2 \cdot b$, to znači da mora vrijediti nejednakost $|2 \cdot b - b| < c < 2 \cdot b + b$, odnosno, zbog $b > 0$, nejednakost $b < c < 3 \cdot b$. Dakle, pretpostavka $a = 2 \cdot b$ povlači nejednakost $b < c$. Nasuprot veće stranice trokuta nalazi se i veći kut trokuta, pa iz posljednje nejednakosti izravno slijedi $\beta < \gamma$, odnosno, ekvivalentno, $\gamma > \beta$.

11. **D**. Odredimo najprije vrijednost x tako da zadani vektori budu okomiti. Zadani vektori će biti okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Zbog toga imamo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 3 \cdot x + (-4) \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x - 36 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x = 36 \Leftrightarrow x = 12.$$

Zbog toga je $\vec{b} = 12 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j}$. Preostaje izračunati omjer duljina vektora $\vec{b}$ i vektora $\vec{a}$:

$$\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\sqrt{12^2 + 9^2}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{144 + 81}}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

12. **B**. Odredimo najprije vrijednost m za koju je točna tvrdnja u zadatku. Prema Vièteovim formulama, za rješenja x_1 i x_2 zadane jednadžbe vrijede jednakosti $x_1 + x_2 = -m$ i $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot m + 3$. Tako imamo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-m}{2 \cdot m + 3}.$$

Prema uvjetu zadatka, taj zbroj mora biti jednak 10, pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{-m}{2\cdot m+3}=10, \quad / \cdot(2\cdot m+3)\\
&-m=10\cdot(2\cdot m+3),\\
&-m=20\cdot m+30,\\
&-m-20\cdot m=30,\\
&-21\cdot m=30, \quad /:(-21)\\
&m=-\frac{30}{21}=-\frac{10}{7}=-1\frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

Lako vidimo da je dobivena vrijednost m strogo veća od –2 i strogo manja od 0, pa ona pripada intervalu $\langle -2,0\rangle$.

13. B. Primjenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata imamo redom:

$$\left(\frac{a+1}{5\cdot a-a^2}+\frac{2\cdot a+2}{a^2-25}\right):\frac{a+1}{a^2+10\cdot a+25}=\left[\frac{a+1}{a\cdot(5-a)}+\frac{2\cdot(a+1)}{a^2-5^2}\right]:\frac{a+1}{a^2+2\cdot 5\cdot a+5^2}=$$

$$=\left[\frac{a+1}{a\cdot(5-a)}+\frac{2\cdot(a+1)}{(a-5)\cdot(a+5)}\right]:\frac{a+1}{(a+5)^2}=\left[\frac{-(a+1)\cdot(a+5)+2\cdot a\cdot(a+1)}{a\cdot(a-5)\cdot(a+5)}\right]\cdot\frac{(a+5)^2}{a+1}=$$

$$=\left[\frac{(a+1)\cdot(-a-5+2\cdot a)}{a\cdot(a-5)\cdot(a+5)}\right]\cdot\frac{(a+5)^2}{a+1}=\frac{(a+1)\cdot(a-5)}{a\cdot(a-5)\cdot(a+5)}\cdot\frac{(a+5)^2}{a+1}=\frac{a+5}{a}.$$

14. C. Ako 1 mL insekticida treba pomiješati s 2 L = 2000 mL vode, onda se 750 mL insekticida miješa s ukupno $\frac{750}{1.5}\cdot 2000=1\,000\,000$ mL vode. Tako se dobiva otopina čiji je ukupni obujam 1 000 000 + 750 = 1 000 750 mL. Stoga je tražena površina jednaka $P=\frac{1000750}{250}=4003\ \text{m}^2$.

15. A. Iz Slike 1. razabiremo da je $g(x)<0$ za $x\in\langle\approx-1.9,\approx 1.1\rangle$, što znači da tražena funkcija *f* strogo pada na tom intervalu. (Znamo: f strogo pada na $I \iff f^{'}=g<0$ na I .) To ujedno znači i da funkcija *f* strogo raste na intervalima $\langle-\infty,\approx-1.9\rangle$ i $\langle\approx 1.1,+\infty\rangle$. Jedini graf koji ima sva navedena svojstva prikazan je na Slici **A**. (Primijetimo da graf na Slici **B**. ima „suprotna“ svojstva, tj. da pripadna funkcija strogo pada na intervalima $\langle-\infty,\approx-1.9\rangle$ i $\langle\approx 1.1,+\infty\rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle\approx-1.9,\approx 1.1\rangle$.)

16. ≈ 2.813657169. Imamo redom:

$$\frac{\sqrt{11+\frac{2}{5}}}{3\cdot 0.4}=\frac{\sqrt{\frac{11\cdot 5+2}{5}}}{1.2}=\frac{\sqrt{\frac{55+2}{5}}}{\frac{12}{10}}=\frac{\sqrt{\frac{57}{5}}}{\frac{6}{5}}=\sqrt{\frac{\frac{57}{5}}{\left(\frac{6}{5}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\frac{57}{5}}{\frac{36}{25}}}=\sqrt{\frac{\frac{19}{1}}{\frac{12}{5}}}=\sqrt{\frac{19\cdot 5}{12\cdot 1}}=\sqrt{\frac{95}{12}}\approx 2.813657169.$$

17. ≈ 125 otkucaja u minuti. Traženi puls jednak je $P(2)$. Izračunajmo tu vrijednost:

$$P(2)=150\cdot 2^{-0.13\cdot 2}=150\cdot 2^{-0.26}=125.26318791\approx 125.$$

18. 1.) $x \geq -\frac{9}{7}$ **ili** $x \in \left(-\frac{9}{7}, +\infty\right]$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot (x-3) + 5 \cdot x^2 \leq 5 \cdot x \cdot (x+2), \\
&3 \cdot x - 9 + 5 \cdot x^2 \leq 5 \cdot x^2 + 10 \cdot x, \\
&3 \cdot x + 5 \cdot x^2 - 5 \cdot x^2 - 10 \cdot x \leq 9, \\
&(-7) \cdot x \leq 9, \quad / : (-7) \\
&x \geq -\frac{9}{7}.
\end{aligned}$$

2.) (–2, –1). Zapišimo najprije zadani sustav u standardnom obliku. Imamo:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} - 2 \cdot x = 3, \\ y - x = \frac{1}{2} \cdot x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6 \cdot x = 9, \\ 2 \cdot y - 2 \cdot x = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot x + y = 9, \\ 2 \cdot y - 2 \cdot x - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot x + y = 9, \\ -3 \cdot x + 2 \cdot y = 4. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe izrazimo nepoznanicu y:

$$y = 5 \cdot x + 9.$$

Uvrštavanjem ovoga izraza u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}
&-3 \cdot x + 2 \cdot (5 \cdot x + 9) = 4, \\
&-3 \cdot x + 10 \cdot x + 18 = 4, \\
&7 \cdot x = 4 - 18, \\
&7 \cdot x = -14, \quad / : 7 \\
&x = -2.
\end{aligned}$$

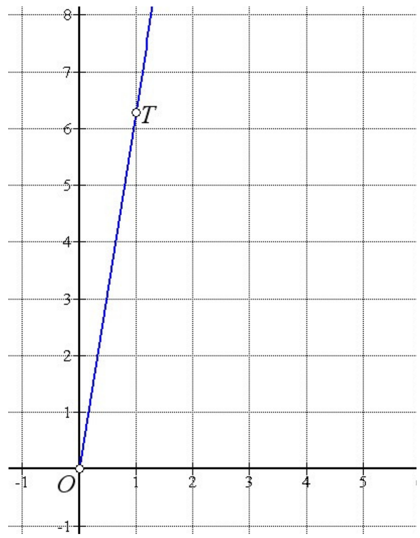
Tako sada lagano izračunamo:

$$y = 5 \cdot (-2) + 9 = -10 + 9 = -1.$$

19. 1.) $\sqrt{10}$ **jed. duljine**. Koristeći formulu za udaljenost točaka u ravnini dobivamo:

$$d(P, R) = \sqrt{(5-2)^2 + \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

2.) Vidjeti Sliku 1. Crtamo graf funkcije $O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$. Ta funkcija je linearna funkcija čija je domena $[0, +\infty\rangle$. Njezin je graf polupravac čija je početna točka (0, O(0)) = (0, 0), tj. ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Za crtanje toga polupravca dovoljno je zadati još jednu njegovu točku. Očito je $O(1) = 2 \cdot \pi$, pa u koordinatni sustav ucrtamo točku $T = (1,\ 2 \cdot \pi)$ i polupravcem je spojimo s ishodištem. Dobivamo Sliku 1.



Slika 1.

20. 1.) $3^{-2\cdot a-4}$. Budući da su $81=3^4$ i $27=3^3$, imamo redom:

$$\frac{3^{2\cdot a-1}}{81^a}\cdot 27^{-1}=\frac{3^{2\cdot a-1}}{(3^4)^a}\cdot(3^3)^{-1}=\frac{3^{2\cdot a-1}}{3^{4\cdot a}}\cdot 3^{3\cdot(-1)}=\frac{3^{2\cdot a-1}}{3^{4\cdot a}}\cdot 3^{-3}=3^{2\cdot a-1-4\cdot a-3}=3^{-2\cdot a-4}$$

2.) $1+i$. Primijetimo da za svaki $k\in\mathbb{Z}$ vrijedi jednakost $i^{4\cdot k}+i^{4\cdot k+1}+i^{4\cdot k+2}+i^{4\cdot k+3}=0.$ Naime,

$$i^{4\cdot k}+i^{4\cdot k+1}+i^{4\cdot k+2}+i^{4\cdot k+3}=i^{4\cdot k}\cdot(1+i+i^2+i^3)=i^{4\cdot k}\cdot(1+i+(-1)+(-i))=i^{4\cdot k}\cdot 0=0.$$

Posebno, za $k=0$ dobivamo $i^0+i^{4\cdot 0+1}+i^{4\cdot 0+2}+i^{4\cdot 0+3}=1+i+i^2+i^3=0,$ dok za $k=1$ imamo $i^{4\cdot 1}+i^{4\cdot 1+1}+i^{4\cdot 1+2}+i^{4\cdot 1+3}=i^4+i^5+i^6+i^7=0.$ Zbog toga su zbroj prvih četiriju pribrojnika i zbroj drugih četiriju pribrojnika jednaki nuli, pa preostaje:

$$S=0+0+i^8+i^9=i^8+i^9=(i^4)^2+(i^4)^2\cdot i=1^2+1^2\cdot i=1+1\cdot i=1+i.$$

21. 1.) –3. Očitamo: $a=0.48,\ b=-2.4,\ c=0$. Tražena vrijednost jednaka je drugoj koordinati tjemena grafa pripadne parabole:

$$f_{\min}=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=\frac{4\cdot 0.48\cdot 0-2.4^2}{4\cdot 0.48}=\frac{0-5.76}{1.92}=-\frac{5.76}{1.92}=-\frac{576}{192}=-3\ .$$

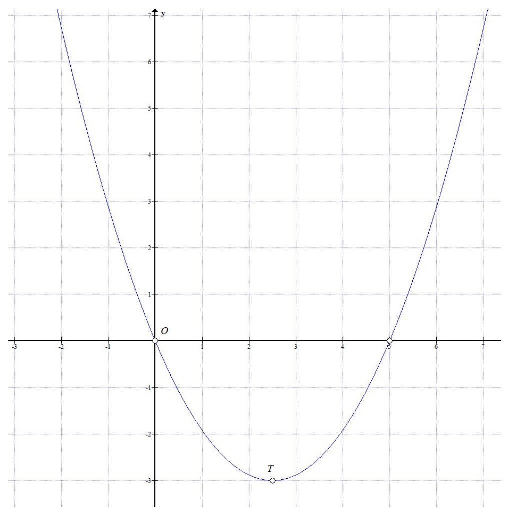
2.) Vidjeti Sliku 2. Za crtanje grafa zadane kvadratne funkcije potrebne su nam njezine nultočke i koordinate njezina tjemena. Odredimo najprije nultočke. U tu svrhu riješimo jednadžbu $f(x)=0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&0.48\cdot x^2-2.4\cdot x=0,\quad /:0.48\\&x^2-5\cdot x=0,\\&x\cdot(x-5)=0,\\&x=0\text{ ili }x-5=0,\\&x_1=0,\ x_2=5.\end{aligned}$$

Dakle, graf zadane funkcije siječe os apscisa u točkama (0, 0) (riječ je o ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini) i (5, 0). Preostaje odrediti tjeme parabole. Drugu koordinatu toga tjemena izračunali smo u **1.)** i ona iznosi –3. Stoga odredimo prvu koordinatu:

$$x_T = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{-2.4}{2\cdot 0.48} = \frac{2.4}{0.96} = \frac{240}{96} = \frac{5}{2}.$$

Stoga je tjeme parabole točka $T = \left(\frac{5}{2}, -3\right)$. Preostaje ucrtati dobivene točke u pravokutni koordinatni sustav i spojiti ih parabolom. Tako dobivamo Sliku 2.



Slika 2.

22. 1.) 6:42 ili 6 sati i 42 minute. Odredimo najprije vrijeme između 7:00 i 8:00 sati u kojemu je broj minuta proteklih od 7:00 sati četiri puta manji od broja minuta preostalih do 8:00 sati. Neka je x broj minuta proteklih od 7:00 sati. Tada je $60 - x$ broj minuta preostalih do 8:00 sati. Mora vrijediti jednakost: $4\cdot x = 60 - x$, a odatle slijedi $5\cdot x = 60$, odnosno $x = 12$. Dakle, u 7:12 sati vrijeme proteklo od 7 sati (12 minuta) bit će četiri puta manje od vremena preostaloga do 8:00 sati (to je 8:00 – 7:12 = 48 minuta). Prema uvjetu zadatka, to vrijeme nastupa za pola sata, pa je traženo vrijeme jednako:

(7 sati i 12 minuta) – 30 minuta = (7 sati i 0 minuta) – 18 minuta = (6 sati i 60 minuta) – – 18 minuta = 6 sati i 42 minute = 6:42.

2.) ≈3.5%. Neka je p traženi postotak. Broj stanovnika na kraju prve godine jednak je $S_1 = 1\,635\,000 + \frac{p}{100}\cdot 1\,635\,000 = 1\,635\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Broj stanovnika na kraju druge godine jednak je

$$S_2 = 1\,635\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) + \frac{p}{100}\cdot 1\,635\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) =$$

$$= 1\,635\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) = 1\,635\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Indukcijom lako slijedi da je broj stanovnika na kraju n-te godine jednak $S_n = 1\ 635\ 000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Prema uvjetu zadatka je $S_6 = 2\ 010\ 000$, pa dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$1\ 635\ 000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^6 = 2\ 010\ 000 .$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$1\ 635\ 000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^6 = 2\ 010\ 000, \quad / : 1\ 635\ 000$$

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109}, \quad / \sqrt[6]{\ }$$

$$1+\frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}},$$

$$\frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1,$$

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1\right) = 3.501437925445 \approx 3.5.$$

23. 1.) $x = 1$. Lijeva strana jednadžbe definirana je kad god je $x+8 \ge 0$, tj. kad god je $x \ge -8$. Nadalje, zapišemo li jednadžbu u obliku $\sqrt{x+8} = x+2$, vidimo da je lijeva strana dobivene jednadžbe nenegativan realan broj, pa takva mora biti i njezina desna strana. Odatle dobivamo uvjet $x+2 \ge 0$, odnosno $x \ge -2$. Uvjeti $x \ge -8$ i $x \ge -2$ zajedno daju uvjet $x \ge -2$. Stoga u nastavku rješavamo zadanu jednadžbu uvažavajući taj uvjet. Imamo redom:

$$\sqrt{x+8} = x+2, \quad /^2$$

$$x+8 = (x+2)^2,$$

$$x+8 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2,$$

$$x^2 + 4\cdot x + 4 - x - 8 = 0,$$

$$x^2 + 3\cdot x - 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1,\ x_2 = \frac{-3-5}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Zbog uvjeta $x \ge -2$ rješenje $x_2 = -4$ ne dolazi u obzir. Stoga je jedino rješenje zadatka $x = x_1 = 1$.

2.) $x = 13$. Jednadžba ima smisla kad god su $x - 5 > 0$ i $\log_2(x-5) > 0$. Iz prve nejednakosti slijedi $x > 5$, a iz druge $x - 5 > 2^0$, odnosno $x - 5 > 1$, odnosno $x > 6$. Uvjeti $x > 5$ i $x > 6$ zajedno daju uvjet $x > 6$, pa zadanu jednadžbu rješavamo uvažavajući taj uvjet. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\log_3 \log_2(x-5) = 1, \quad / 3^{\wedge} \\
&\log_2(x-5) = 3^1, \\
&\log_2(x-5) = 3, \quad / 2^{\wedge} \\
&x - 5 = 2^3, \\
&x - 5 = 8, \\
&x = 13.
\end{aligned}$$

Dobiveno rješenje zadovoljava uvjet $x > 6$, pa je $x = 13$ jedino rješenje zadane jednadžbe.

24. 1.) $\langle -\infty, 2]$**.** Znamo da za svaki $x \geq 0$ vrijedi nejednakost $\sqrt{x} \geq 0$. Stoga imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x} \geq 0, \quad / \cdot(-1) \\
&-\sqrt{x} \leq 0, \quad / +2 \\
&-\sqrt{x} + 2 \leq 0 + 2, \\
&2 - \sqrt{x} \leq 2, \\
&f(x) \leq 2.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(x) \leq 2$, pa zaključujemo da je traženi skup vrijednosti interval $\langle -\infty, 2]$**.**

2.) $x = \log_a b$.**.** Riješimo jednadžbu $f(x) = 0$. Imamo:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0, \\
&a^x - b = 0, \\
&a^x = b, \quad / \log_a \\
&x = \log_a b.
\end{aligned}$$

25. 1.) $\frac{15}{2} = 7.5$. Neka su a i b duljine stranica paralelograma označene tako da vrijedi nejednakost $a \geq b$. Nadalje, neka su v_a i v_b redom duljine visina na stranicu a, odnosno stranicu b. Duljoj stranici paralelograma odgovara kraća visina, pa zbog nejednakosti $a \geq b$ slijedi $v_a \leq v_b$. Budući da se duljine visina odnose kao 5:8, zaključujemo da je $v_a : v_b = 5 : 8$. To znači da postoji (strogo pozitivan) realan broj k takav da vrijede jednakosti $v_a = 5 \cdot k$ i $v_b = 8 \cdot k$. Primijenimo formulu za površinu paralelograma:

$$\begin{aligned}
&P = a \cdot v_a = b \cdot v_b, \\
&a \cdot 5 \cdot k = b \cdot 8 \cdot k, \quad / : 5 \cdot k \\
&a = \frac{8}{5} \cdot b.
\end{aligned}$$

Uvažavajući tu jednakost, slijedi da je opseg paralelograma jednak:

$$O = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot \left(\frac{8}{5} \cdot b + b\right) = 2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{8}{5}\right) = 2 \cdot b \cdot \left(\frac{5+8}{5}\right) = 2 \cdot b \cdot \frac{13}{5} = \frac{26}{5} \cdot b.$$

Prema zahtjevu zadatka, taj broj mora biti jednak 39. Tako dobivamo jednadžbu $\frac{26}{5} \cdot b = 39$ čije rješenje je $b = \frac{15}{2} = 7.5$.

2.) ≈ 220.13**.** Neka su x cijena skupljega proizvoda, a y cijena jeftinijega proizvoda. Iz podataka u zadatku dobivamo jednadžbu:

$$x + \left(y - \frac{30}{100} \cdot y\right) = 374.23.$$

Izrazimo x iz ove jednakosti. Imamo:

$$\begin{aligned}
&x + \left(1 - \frac{30}{100}\right) \cdot y = 374.23, \\
&x + \left(\frac{100-30}{100}\right) \cdot y = 374.23, \\
&x + \frac{70}{100} \cdot y = 374.23, \\
&x + \frac{7}{10} \cdot y = 374.23, \\
&x = 374.23 - \frac{7}{10} \cdot y.
\end{aligned}$$

Vrijednost x ne može biti strogo negativan realan broj i mora biti strogo veća od y (jer je x skuplji proizvod), što znači da moraju vrijediti nejednakosti:

$$0 \le y < 374.23 - \frac{7}{10} \cdot y.$$

Riješimo tu nejednadžbu. Imamo redom:

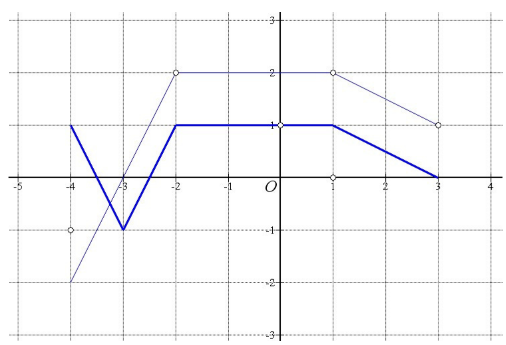
$$\begin{aligned}
&y < 374.23 - \frac{7}{10} \cdot y, \\
&\frac{7}{10} \cdot y + y < 374.23, \\
&y \cdot \left(\frac{7}{10} + 1\right) < 374.23, \\
&y \cdot \left(\frac{7+10}{10}\right) < 374.23, \\
&\frac{17}{10} \cdot y < 374.23, \quad / \cdot \frac{10}{17} \\
&0 \le y < \frac{374.23 \cdot 10}{17} = \frac{3742.3}{17} = 220.1352941.
\end{aligned}$$

Tražena cijena mora imati najviše dvije znamenke iza decimalne točke (jer ne postoji tisućiti, desettisućiti, … dio kune), pa zaključujemo da je $y_{\max} = 220.13$ kn. (Zaokruživanje **obavezno** provodimo naniže zbog znaka strogo manje.)

26. 1.) 3; $\frac{1}{2}$. Iz podatka da graf funkcije *f* prolazi točkom *P* zaključujemo da vrijedi jednakost $f(0) = 3$. Točka *P* je točka maksimuma funkcije *P*, pa zaključujemo da je maksimum funkcije *f* jednak 3. Međutim, maksimum funkcije $f(x) = A \cdot \cos(B \cdot x)$ u općem je slučaju jednak *A* i postiže se kad je $\cos(B \cdot x) = 1$, odnosno kad je $B \cdot x = 2 \cdot k \cdot \pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Tako zaključujemo da je $A = 3$.

Razmak između prvih koordinata uzastopnih ekstrema jednak je polovici temeljnoga perioda zadane funkcije. Dakle, $\frac{T}{2} = 2 \cdot \pi - 0$, a odatle je $T = 4 \cdot \pi$. No, s druge je strane $T = \frac{2 \cdot \pi}{B}$, pa iz jednadžbe $\frac{2 \cdot \pi}{B} = 4 \cdot \pi$ slijedi $B = \frac{1}{2}$.

2.) Vidjeti Sliku 3. Funkcija apsolutne vrijednosti „prebacuje“ dio grafa iznad segmenta $[-4, -3]$ iznad osi apscisa simetrično s obzirom na tu os. Oduzimanje jedinice pomiče (translatira) svaku točku grafa za 1 jedinicu duljine prema dolje. Tako dobivamo Sliku 3.



Slika 3.

27. 1.) $p \ldots\ y = \sqrt{3} \cdot x - 5$. Koeficijent smjera pravca *p* jednak je $k = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$. Stoga je jednadžba toga pravca:

$$p \ldots\ y - (-2) = \sqrt{3} \cdot \left(x - \sqrt{3}\right),$$
$$p \ldots\ y + 2 = \sqrt{3} \cdot x - 3,$$
$$p \ldots\ y = \sqrt{3} \cdot x - 3 - 2,$$
$$p \ldots\ y = \sqrt{3} \cdot x - 5.$$

2.) $K \ldots\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$. Središte kružnice je točka $S = (-3, 2)$. Kružnica prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, pa je kvadrat njezina polumjera jednak kvadratu udaljenosti točke *S* i ishodišta:

$$r^2 = (-3-0)^2 + (2-0)^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13.$$

Dakle, jednadžba kružnice glasi: $K \ldots\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

3.) 20. Podijelimo jednadžbu krivulje s 576, pa dobijemo:

$$\frac{9\cdot x^2}{576}-\frac{16\cdot y^2}{576}=1,$$
$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

Zaključujemo da se radi o hiperboli kojoj je duljina velike poluosi $a=\sqrt{64}=8$, a duljina male poluosi $b=\sqrt{36}=6$. Razmak između žarišta (fokusa) te hiperbole jednak je $2\cdot e$, gdje je e linearni ekscentricitet hiperbole. Tako slijedi:

$$d(F_1,F_2)=2\cdot e=2\cdot\sqrt{a^2+b^2}=2\cdot\sqrt{64+36}=2\cdot\sqrt{100}=2\cdot 10=20.$$

28. 1.) 1, 3, 5 ili neki drugi redoslijed tih brojeva. Uočimo da je $12-4\cdot x=4\cdot(3-x)$. Tako redom imamo:

$$(3-x)^3=12-4\cdot x,$$
$$(3-x)^3=4\cdot(3-x),$$
$$(3-x)^3-4\cdot(3-x)=0,$$
$$(3-x)\cdot\left[(3-x)^2-4\right]=0,$$
$$(3-x)\cdot(9-6\cdot x+x^2-4)=0,$$
$$(3-x)\cdot(x^2-6\cdot x+5)=0,$$
$$3-x=0 \text{ ili } x^2-6\cdot x+5=0,$$
$$x_1=3 \text{ ili } x_{2,3}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}$$
$$x_1=3,\ x_2=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5,\ x_3=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

2.) $x\in\left\langle-\infty,\ \frac{3}{2}\right\rangle$**.** Uočimo da je $4^x=(2^2)^x=2^{2\cdot x}$. Imamo redom:

$$2^{2\cdot x+1}+4^x<24,$$
$$2^{2\cdot x}\cdot 2^1+2^{2\cdot x}<24,$$
$$2^{2\cdot x}\cdot(2^1+1)<24,$$
$$2^{2\cdot x}\cdot(2+1)<24,$$
$$2^{2\cdot x}\cdot 3<24,\quad /:3$$
$$2^{2\cdot x}<8,$$
$$2^{2\cdot x}<2^3,$$
$$2\cdot x<3,$$
$$x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow x\in\left\langle-\infty,\ \frac{3}{2}\right\rangle$$

3.) 5.28 litara. Ako u boci ima 6 litara 30%-tnoga alkohola, onda je obujam čistoga alkohola u boci $6 \cdot \frac{3}{10} = 1.8$ litara. Dakle, u boci je na početku bilo 1.8 litara alkohola i $6 - 1.8 = 4.2$ litre vode.

Neka su a obujam ishlapjeloga alkohola i v obujam ishlapjele vode. Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $a = 2 \cdot v$. Obujam preostaloga alkohola iznosi $1.8 - a$, a obujam preostale vode $4.2 - v$. Ukupni obujam preostale tekućine jednak je $6 - a - v$. Postotni udio obujma preostaloga alkohola u tom obujmu iznosi 25%, pa mora vrijediti jednakost

$$\frac{1.8 - a}{6 - a - v} = \frac{25}{100}.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ \dfrac{1.8 - a}{6 - a - v} = \dfrac{25}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ \dfrac{1.8 - a}{6 - a - v} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ 4 \cdot (1.8 - a) = 6 - a - v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ 7.2 - 4 \cdot a = 6 - a - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ -4 \cdot a + a + v = 6 - 7.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ -3 \cdot a + v = -1.2. \end{cases}$$

Uvrštavanjem pve jednadžbe sustava u drugu dobivamo $-3 \cdot 2 \cdot v + v = -1.2$, odnosno $-6 \cdot v + v = -1.2$, odnosno $-5 \cdot v = -1.2$. Odatle je $v = \frac{1.2}{5} = 0.24$, pa je $a = 2 \cdot v = 2 \cdot 0.24 = 0.48$. Dakle, preostali obujam tekućine u boci jednak je $6 - a - v = 6 - 0.24 - 0.48 = 5.28$ litara.

29. 1.) $\left\langle \frac{5}{2}, 4 \right]$. Funkcija drugoga korijena je definirana ako i samo ako je radikand (izraz pod drugim korijenom) nenegativan. Odatle dobivamo uvjet $4 \cdot x - x^2 \geq 0$. Nadalje, logaritamska funkcija je definirana ako i samo ako je logaritmand (izraz pod logaritmom) strogo pozitivan. Odatle dobivamo uvjet $2 \cdot x - 5 > 0$. Tako smo dobili sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases} 4 \cdot x - x^2 \geq 0, \\ 2 \cdot x - 5 > 0. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Prvu nejednadžbu najlakše je riješiti grafički. Polinom $p(x) = -x^2 + 4 \cdot x$ ima vodeći koeficijent -1. Njegove nultočke dobijemo rješavanjem jednadžbe $-x^2 + 4 \cdot x = 0$, odnosno jednadžbe $-x \cdot (x - 4) = 0$. Lako očitamo $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$. Zbog toga je $p(x) \geq 0$ na segmentu određenom nultočkama polinoma p. Dakle, skup svih rješenja prve nejednadžbe je segment $[0, 4]$.

Iz druge nejednadžbe odmah slijedi $2 \cdot x > 5$, odnosno $x > \frac{5}{2}$. Skup svih rješenja ove nejednadžbe je otvoreni interval $\left\langle \frac{5}{2}, +\infty \right\rangle$.

Tražena prirodna domena je presjek dobivenih skupova. Lako vidimo da je $\left[0,4\right]\cap\left\langle\frac{5}{2},+\infty\right\rangle=\left\langle\frac{5}{2},\ 4\right]$ i to je tražena domena.

2.) $t\ldots\ y=\frac{1}{7}\cdot x+\frac{9}{7}$ **ili** $x-7\cdot y+9=0$**.** Odredimo najprije drugu koordinatu točke u kojoj je povučena tangenta. Prva koordinata te točke jednaka je 5, pa je druga koordinata jednaka $f(5)=\frac{3\cdot 5-1}{5+2}=\frac{15-1}{7}=\frac{14}{7}=2.$ Dakle, tangentu povlačimo u točki $T=(5,\ 2)$.

Koeficijent smjera povučene tangente jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije *f* u točki 5. Stoga najprije odredimo prvu derivaciju funkcije *f*. Koristimo pravilo za deriviranje količnika:

$$f^{'}(x)=\frac{(3\cdot x-1)^{'}\cdot(x+2)-(3\cdot x-1)\cdot(x+2)^{'}}{(x+2)^2}=\frac{(3\cdot 1-0)\cdot(x+2)-(3\cdot x-1)\cdot(1+0)}{(x+2)^2}=$$
$$=\frac{3\cdot(x+2)-(3\cdot x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{3\cdot x+6-3\cdot x+1}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}.$$

Zbog toga je koeficijent smjera tangente jednak:

$$k=f^{'}(1)=\frac{7}{(5+2)^2}=\frac{7}{7^2}=\frac{1}{7}.$$

Preostaje napisati jednadžbu tangente:

$$t\ldots\ y-2=\frac{1}{7}\cdot(x-5)$$
$$t\ldots\ y=\frac{1}{7}\cdot x-\frac{5}{7}+2$$
$$t\ldots\ y=\frac{1}{7}\cdot x+\frac{9}{7}$$

ili u implicitnom obliku

$$t\ldots\ y=\frac{1}{7}\cdot x+\frac{9}{7}\quad /\cdot 7$$
$$t\ldots\ 7\cdot y=x+9,$$
$$t\ldots\ x-7\cdot y+9=0.$$

3.) $x=\frac{\pi}{3}$**.** Primijetimo najprije da su sva tri razlomka definirana za $x\in\left\langle 0,\ \pi\right\rangle\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadani izrazi tvore tri uzastopna člana aritmetičkoga niza ako i samo ako je srednji član jednak aritmetičkoj sredini prvoga i trećega člana. Tako redom imamo:

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}{2},$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\frac{\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x}}{2},$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{2},$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}{2},$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}{2},$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2\cdot\sin x\cdot\cos x},$$

$$\sin x=2\cdot\sin x\cdot\cos x,$$

$$\sin x-2\cdot\sin x\cdot\cos x=0,$$

$$\sin x\cdot(1-2\cdot\cos x)=0.$$

Ako bi bilo $\sin x=0$, onda drugi član niza ne bi bio definiran. Zato mora biti $1-2\cdot\cos x=0$, odnosno $\cos x=\frac{1}{2}$. Ova jednadžba u skupu $\langle 0,\ \pi\rangle\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ima jedinstveno rješenje $x=\frac{\pi}{3}$.

4.) $\approx 19^\circ 11' 18''$**.** Neka su P polovište stranice $\overline{AB}$ i $t:=\left|\overline{CP}\right|$. Trokut APC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$\left|\overline{AP}\right|^2=\left|\overline{CP}\right|^2+\left|\overline{AC}\right|^2\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\right)^2=\left|\overline{CP}\right|^2+\left|\overline{AC}\right|^2\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2=t^2+\left|\overline{AC}\right|^2\Leftrightarrow 6^2=t^2+\left|\overline{AC}\right|^2.$$

Primjenom kosinusova poučka na trokut ΔCPB dobivamo:

$$\left|\overline{CP}\right|^2=\left|\overline{BC}\right|^2+\left|\overline{BP}\right|^2-2\cdot\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{BP}\right|\cdot\cos\angle PBC,$$

$$t^2=8^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\right)^2-2\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\cos\beta,$$

$$t^2=8^2+\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2-8\cdot 12\cdot\cos\beta,$$

$$t^2=8^2+6^2-96\cdot\cos\beta,$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak na trokut ΔABC :

$$\left|\overline{AC}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right| \cdot \cos\angle ABC,$$
$$\left|\overline{AC}\right|^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos\beta,$$
$$\left|\overline{AC}\right|^2 = 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos\beta.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav:

$$\begin{cases} 6^2 = t^2 + \left|\overline{AC}\right|^2, \\ t^2 = 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos\beta, \\ \left|\overline{AC}\right|^2 = 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos\beta. \end{cases}$$

Iz ovih jednadžbi treba odrediti $\cos\beta$. Zbrojimo drugu i treću jednadžbu, pa u dobiveni izraz uvrstimo prvu jednadžbu:

$$t^2 + \left|\overline{AC}\right|^2 = 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos\beta + 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos\beta,$$
$$6^2 = 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos\beta + 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos\beta,$$
$$0 = 8^2 - 96 \cdot \cos\beta + 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos\beta,$$
$$96 \cdot \cos\beta + 192 \cdot \cos\beta = 8^2 + 12^2 + 8^2,$$
$$288 \cdot \cos\beta = 64 + 144 + 64,$$
$$288 \cdot \cos\beta = 272,$$
$$\cos\beta = \frac{272}{288} = \frac{17}{18}.$$

Odatle slijedi $\beta = 19.1881364537 \approx 19^\circ 11' 18''$.

30. $12 \cdot \pi$ **cm.** Označimo sa S središte stavljene kugle. Neka ta kugla dira izvodnice stošca u točkama D_1 i D_2. Neka je C vrh stošca. Tada je trokut ΔSCD_1 pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu D_1 jer je pravac CD_1 tangenta kružnice čiji je polumjer $\overline{SD_1}$. Označimo li s α mjeru kuta $\angle SCD_1$, onda iz pravokutnoga trokuta ΔSCD_1 slijedi:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\left|\overline{SD_1}\right|}{\left|\overline{CD_1}\right|} = \frac{10}{\left|\overline{CD_1}\right|}.$$

Neka je S_1 središte osnovke stošca (kružnice). Zbog simetrije, točka S_1 pripada pravcu CS i nužno se nalazi na dužini $\overline{CS}$. Naime, ako bi točka S_1 bila izvan dužine $\overline{CS}$, onda bi cijela kugla bila stavljena unutar stošca i dodirivala bi osnovku stošca, što je suprotno pretpostavci da stavljena kugla dodiruje samo izvodnice stošca.

Neka je A točka na pravcu CD_1 takva da je $\left|\overline{S_1 A}\right| = r_s$ = polumjer osnovke stošca. Promotrimo trokut S_1CA. Taj trokut je pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu S_1 jer je pravac CS_1 pravac na kojemu leži visina stošca (spojnica vrha stošca i središta osnovke stošca je pravac na kojemu leži visina stošca). U tom trokutu znamo duljine dviju stranica: $\left|\overline{AC}\right| = s = 15$, $\left|\overline{S_1C}\right| = v = 9$, pa primjenom Pitagorina poučka izračunamo:

$$r_s = \left|\overline{AS_1}\right| = \sqrt{s^2 - v^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12.$$

(Mjerne jedinice za duljinu namjerno izostavljamo i prešutno pretpostavljamo da je riječ o centimetrima.) No, mjera kuta kod vrha C u trokutu S_1CA je također α, pa slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_s}{v} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

Naposljetku, neka je S_2 središte kružnice u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca. Ponovno zbog simetrije, i točka S_2 pripada pravcu CS. Uočimo trokut ΔS_2CD_1. Pravci S_2D_1 i S_1A su usporedni, pa je trokut ΔS_2CD_1 pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu S_2. No, mjera kuta kod vrha C i u tom trokutu je također α, pa slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\left|\overline{S_2D_1}\right|}{\left|\overline{CS_2}\right|} = \frac{r}{\left|\overline{CS_2}\right|} = \frac{r}{\sqrt{\left|\overline{CD_1}\right|^2 - \left|\overline{S_2D_1}\right|^2}} = \frac{r}{\sqrt{\left|\overline{CD_1}\right|^2 - r^2}} \quad ,$$

gdje je r polumjer kružnice u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca.

Tako smo dobili tri različita izraza za $\operatorname{tg} \alpha$. Svi oni određuju istu veličinu, pa moraju biti međusobno jednaki. Stoga mora vrijediti:

$$\frac{4}{3} = \frac{10}{\left|\overline{CD_1}\right|} = \frac{r}{\sqrt{\left|\overline{CD_1}\right|^2 - r^2}}.$$

Iz prve jednakosti odmah slijedi $\left|\overline{CD_1}\right| = \frac{15}{2}$, odnosno $\left|\overline{CD_1}\right|^2 = \frac{225}{4}$. Slijedi:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{r}{\left|\overline{CD_1}\right|^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{16}{9} = \frac{r^2}{\frac{225}{4} - r^2} \Leftrightarrow 16 \cdot \left(\frac{225}{4} - r^2\right) = 9 \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$900 - 16 \cdot r^2 = 9 \cdot r^2 \Leftrightarrow 16 \cdot r^2 + 9 \cdot r^2 = 900 \Leftrightarrow 25 \cdot r^2 = 900 \Leftrightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6.$$

Zaključujemo da je traženi opseg jednak $O = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 6 \cdot \pi = 12 \cdot \pi$ cm.

Pripremio:

mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač