	Matematika na državnoj maturi	rješenja probnoga ispita iz travnja 2022. (viša razina)

1. C. Računamo:

$$\sqrt{45}\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{45^3}\cdot\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[6]{45^3\cdot 6^2}=\sqrt[6]{91125\cdot 36}=\sqrt[6]{3280500}\approx 12.18961551\approx 12.19.$$

2. D. Tražena je vrijednost jednaka razlici 13.8 milijardi i 4.5 milijardi. Budući da je 1 milijarda jednaka 10^9, slijedi:

$$\Delta t=(13.8-4.5)\cdot 10^9=9.3\cdot 10^9=9.3\cdot 10^3\cdot 10^6=9300\cdot 10^6.$$

Dakle, od nastanka svemira do nastanka Zemlje prošlo je $9300\cdot 10^6$ godina.

3. D. Znamo da je $1\text{ m}^2=10^2\text{ dm}^2=100\text{ dm}^2$. Zbog toga je:

$$50\text{ duluma } = 50\cdot 1000\text{ m}^2=50\cdot 1000\cdot 100\text{ dm}^2=5\ 000\ 000\text{ dm}^2.$$

4. B. Imamo redom:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{2\cdot x-2\cdot y}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{2\cdot(x-y)}=\frac{1}{x-y}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2\cdot(x-y)}.$$

5. D. Ukupan broj načina na koji n ljudi može sjesti oko okrugloga stola jednak je $(n-1)!$. Dakle, ukupan broj svih mogućih ishoda jednak je $(4-1)!=3!=6.$

Ukupan broj povoljnih ishoda dobit ćemo shvatimo li Anu i Jakova kao jedan „objekt", a sve ostale kao zasebne „objekte". Dakle, imamo ukupno tri „objekta" koje razmještamo za okrugli stol. To možemo napraviti na $(3-1)!=2!=2$ načina. Potom Anu i Jakova razdvojimo i razmjestimo na preostala slobodna mjesta na ukupno 2 načina. Dakle, ukupan broj povoljnih ishoda jednak je $2\cdot 2=4$.

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

6. B. Uočimo da je $z(0)=900-10\cdot 0=900.$ To znači da cijena svjetiljke iznosi 900 kn u trenutku kad je do kraja aukcije preostalo 0 minuta, tj. kad je aukcija završena. Odatle zaključujemo da konačna cijena svjetiljke iznosi 900 kn.

7. A. Neka su $\check{c}$ i k redom cijena jednoga čaja, odnosno cijena jedne kave. Cijena 5 kava i 2 čaja iznosi $5\cdot k+2\cdot\check{c}$ kn. Analogno, cijena 3 kave i 4 čaja iznosi $3\cdot k+4\cdot\check{c}$ kn, a cijena 3 kave i 12 čajeva $3\cdot k+12\cdot\check{c}$ kn. Prema zadanim podacima dobivamo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}5\cdot k+2\cdot\check{c}=(3\cdot k+4\cdot\check{c})+6,\\ 3\cdot k+12\cdot\check{c}=2\cdot(3\cdot k+4\cdot\check{c}).\end{cases}$$

Riješimo taj sustav na uobičajen način. Imamo redom:

$$\begin{cases} 2\cdot k-2\cdot \check{c}=6, \\ 3\cdot k=4\cdot \check{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k-\check{c}=3, \\ k=\frac{4}{3}\cdot \check{c} \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}\cdot \check{c}-\check{c}=3,$$

$$\frac{1}{3}\cdot \check{c}=3,$$

$$\check{c}=9.$$

8. B. Primijenit ćemo činjenicu da je prva koordinata tjemena parabole $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ aritmetička sredina nultočaka kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Naime, ta je koordinata jednaka $x_T=\frac{-b}{2\cdot a}$, dok prema Vièteovim formulama vrijedi $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$. Iz te dvije jednakosti slijedi $x_T=\frac{x_1+x_2}{2}$, a to smo i tvrdili.

Iz jednadžbe parabole lagano očitamo nultočke pripadne kvadratne funkcije. To su $x_1=3,\ x_2=-k$. Tako iz jednadžbe

$$\frac{3+(-k)}{2}=5$$

slijedi

$$k=3-10=-7.$$

9. C. Imamo redom:

$$6^x=12, \quad /\log$$

$$\log\left(6^x\right)=\log 12,$$

$$x\cdot\log 6=\log 12, \quad /:\log 6$$

$$x=\frac{\log 12}{\log 6}\approx 1.3868528072\approx 1.39.$$

10.B. Treba odrediti funkciju za koju vrijedi $f(8)=2\cdot 1500.$ Provjeravamo redom:

A. $f(8)=1500^{0.125\cdot 8}=1500^{1}=1500.$

B. $f(8)=1500\cdot 2^{0.125\cdot 8}=1500\cdot 2^{1}=1500\cdot 2.$

C. $f(8)=1500^{8\cdot 8}=1500^{64}.$

D. $f(8)=1500\cdot 2^{8\cdot 8}=1500\cdot 2^{64}.$

Zaključujemo da funkcija ponuđena pod **B**. modelira promatrani rast populacije jelena.

11. C. Podijelimo svaki član brojnika i nazivnika s n. Koristeći jednakost $\lim_{n}\left(\frac{1}{n}\right)=0$, dobivamo redom:

$$L=\lim_{n}\left(\frac{4+\frac{1}{n}}{1+2\cdot\frac{1}{n}}\right)=\frac{4+0}{1+2\cdot 0}=\frac{4}{1}=4.$$

12. D. Odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije. Koristeći tablicu derivacija osnovnih funkcija i osnovna pravila za deriviranje dobivamo redom:

$$f'(x)=2\cdot\left(x^{3}\right)'-3\cdot\left(x^{2}\right)'-0=2\cdot 3\cdot x^{2}-3\cdot 2\cdot x=6\cdot x^{2}-6\cdot x,$$
$$f''(x)=6\cdot\left(x^{2}\right)'-6\cdot(x)'=6\cdot 2\cdot x-6\cdot 1=12\cdot x-6.$$

Iz jednadžbe $f'(x)=0$ slijedi $6\cdot x^{2}-6\cdot x=0$, odnosno, nakon dijeljena sa 6 i izlučivanja x, $x\cdot(x-1)=0.$ Odatle su $x_1=0,\ x_2=1.$ Izračunamo vrijednost druge derivacije u svakoj od tih točaka:

$$f''(0)=12\cdot 0-6=-6,$$
$$f''(1)=12\cdot 1-6=6.$$

Lokalni minimum postiže se u točki za koju je vrijednost druge derivacije strogo pozitivna. Budući da je $f''(1)=6>0,$ zaključujemo da zadana funkcija postiže svoj lokalni minimum za $x=1.$

13. C. Središte svakom trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala njegovih unutrašnjih kutova. Udaljenost toga sjecišta od svake stranice trokuta jednaka je duljini polumjera upisane kružnice. Dakle, tražena je točka sjecište simetrala unutrašnjih kutova toga trokuta.

14. C. Pravci BC i BV nisu mimosmjerni jer se sijeku u točki B.

Pravci AB i DC su pravci kojima pripadaju dvije nasuprotne stranice osnovke piramide, pa su ti pravci usporedni, a ne mimosmjerni.

Pravci AC i DS nisu mimosmjerni jer se sijeku u točki S (koja pripada obama pravcima).

Međutim, pravci AS i VD su mimosmjerni jer se ne sijeku i jer nisu usporedni. Naime, točka V ne pripada ravnini kojoj pripadaju točke A, S i D (tj. ravnini u kojoj leži osnovka $ABCD$), pa pravci AS i VD ne mogu biti usporedni.

15. B. Znamo da je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, pa redom imamo:

$$5\cdot\vec{e}+\overrightarrow{BC}+\left((-3)\cdot\vec{e}\right)+\left((-1)\cdot\left(\vec{e}+\vec{f}\right)\right)=\vec{0},$$
$$\overrightarrow{BC}=(-5)\cdot\vec{e}+3\cdot\vec{e}+\vec{e}+\vec{f}=(-1)\cdot\vec{e}+\vec{f}=-\vec{e}+\vec{f}.$$

16. A. Računamo točno četiri vrijednosti funkcije $f(x)=2\cdot x-1$:

$$\begin{aligned}
&f(-1)=2\cdot(-1)-1=-2-1=-3,\\
&f(0)=2\cdot 0-1=0-1=-1,\\
&f(1)=2\cdot 1-1=2-1=1,\\
&f(2)=2\cdot 2-1=4-1=3.
\end{aligned}$$

U tablici A. točne su obje vrijednosti varijable y.

U tablici B. netočna je vrijednost $y_1=f(-1)$.

U tablici C. netočna je vrijednost $y_2=f(0)$.

U tablici D. netočne su obje vrijednosti varijable y.

Dakle, tražene su vrijednosti prikazane u tablici A.

17. D. Iz jednadžbe kružnice očitamo da zadana kružnica ima središte $S=(3,-1)$ i polumjer $r=2$.

Kružnica nacrtana pod A. ima središte u točki $S_A=(-3,1)$ i polumjer $r_A=4$. Ona nije ispravno rješenje zadatka (jer vrijede relacije $S\neq S_A$, $r\neq r_A$).

Kružnica nacrtana pod B. ima središte u točki $S_B=(-3,1)$ i polumjer $r_B=2$. Ona nije ispravno rješenje zadatka (jer vrijedi relacija $S\neq S_B$).

Kružnica nacrtana pod C. ima središte u točki $S_C = (3,-1)$ i polumjer $r_C = 4$. Ona nije ispravno rješenje zadatka (jer vrijedi relacija $r \neq r_C$).

Kružnica nacrtana pod D. ima središte u točki $S_D = (3,-1)$ i polumjer $r_D = 2$. Ona je ispravno rješenje zadatka (jer vrijede jednakosti $S = S_D$ i $r = r_D$).

18. C. Prisjetimo se da su dijagonale svakoga romba međusobno okomite. Dijagonala povučena iz bilo kojega vrha toga romba je ujedno i simetrala pripadnoga kuta. Označimo li traženu mjeru kuta s α, dobivamo:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{26}{2}}{\frac{38}{2}} = \frac{13}{19},$$

$$\alpha = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{13}{19}\right) \approx 1.2001 \text{ rad.} = \frac{1.2001 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 68.76^\circ = 68^\circ 45' 6'' \approx 68^\circ 46'.$$

19. B. Za pet minuta $= \frac{5}{60}\text{ h} = \frac{1}{12}\text{ h}$ prvi biciklist prijeđe $17 \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{12}\text{ km}$, a drugi $21 \cdot \frac{1}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}\text{ km}$. Primjenom kosinusova poučka dobivamo da je tražena udaljenost jednaka:

$$d = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{17}{12} \cdot \frac{7}{4} \cdot \cos(110^\circ)} = \sqrt{\frac{289}{144} + \frac{49}{16} - \frac{119}{24} \cdot \cos(110^\circ)} =$$

$$= \sqrt{\frac{289 + 49 \cdot 9 - 6 \cdot 119 \cdot \cos(110^\circ)}{144}} = \sqrt{\frac{289 + 441 - 714 \cdot \cos(110^\circ)}{144}} =$$

$$= \sqrt{\frac{730 - 714 \cdot \cos(110^\circ)}{144}} \approx 2.6010179395 \approx 2.6\text{ km}.$$

20. C. Neka je a duljina brida kocke. Dijagonalni presjek kocke je pravokutnik čije su stranice duge a i $a \cdot \sqrt{2}$. Njegova je površina jednaka $P = a \cdot a \cdot \sqrt{2} = a^2 \cdot \sqrt{2}$, pa iz jednadžbe

$$a^2 \cdot \sqrt{2} = 64 \cdot \sqrt{2}$$

slijedi $a^2 = 64$, odnosno $a = \sqrt{64} = 8$. Dakle, tražena duljina brida kocke je 8 jed. duljine.

21. C. Možemo pretpostaviti da je lopta kugla polumjera R cm. Njezin najveći presjek s ravninom je kružnica polumjera R. Opseg te kružnice jednak je $2 \cdot R \cdot \pi$ cm. Tako iz jednadžbe

$$2 \cdot R \cdot \pi = 49$$

slijedi $2 \cdot R = \frac{49}{\pi}$. Traženo oplošje kugle iznosi:

$$O = 4 \cdot R^2 \cdot \pi = (2 \cdot R)^2 \cdot \pi = \left(\frac{49}{\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{2401}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{2401}{\pi} \approx 764.2620367273 \approx 764.26 \text{ cm}^2.$$

22. A. Neka su a, b i c redom polazna duljina, širina i visina staroga akvarija. Neka je c_1 visina novoga akvarija. Budući da volumen akvarija mora ostati nepromijenjen, mora vrijediti jednakost:

$$a \cdot b \cdot c = \left(a + \frac{1}{3} \cdot a\right) \cdot \left(b - \frac{40}{100} \cdot b\right) \cdot c_1.$$

Iz te jednakosti redom slijedi:

$$\begin{aligned}
&a \cdot b \cdot c = a \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot b \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) \cdot c_1, \\
&a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right)\right) \cdot c_1, \quad / : (a \cdot b) \\
&c = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot c_1, \\
&c = \frac{4}{5} \cdot c_1, \quad / : \frac{4}{5} \\
&c_1 = \frac{5}{4} \cdot c = 1.25 \cdot c = c + 0.25 \cdot c = c + \frac{25}{100} \cdot c = c + 25\% \cdot c.
\end{aligned}$$

Dakle, visina novoga akvarija je za 25% veća od visine staroga akvarija.

23. D. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot a^3 - 3 \cdot a^2 - 18 \cdot a + 27 = a^2 \cdot (2 \cdot a - 3) - 9 \cdot (2 \cdot a - 3) = (2 \cdot a - 3) \cdot (a^2 - 9) = \\
&= (2 \cdot a - 3) \cdot (a^2 - 3^2) = (2 \cdot a - 3) \cdot (a - 3) \cdot (a + 3).
\end{aligned}$$

Primjećujemo da se u dobivenoj faktorizaciji ne pojavljuje član $2 \cdot a + 3$, pa je taj binom ispravno rješenje zadatka.

24.B. Prvi pribrojnik ima ukupno $1+(n+1)=n+2$ znamenaka od kojih je prva 5, a posljednja nula. Drugi pribrojnik ima ukupno $1+(n-1)=n$ znamenaka od kojih je prva 3, a posljednja nula. Treći pribrojnik je jednak 7. Zbroj tih triju pribrojnika ima ukupno $n+2$ znamenaka od kojih je prva 5, a posljednja 7. Dakle, traženi broj je jednak $n+2$.

25. 3. Unija zadanih intervala je interval $\langle -7,-3\rangle$. U tom se intervalu nalaze točno tri cijela broja: $-6,-5$ **i** -4. Dakle, traženi je broj jednak 3.

26. $\overline{z}=7+3\cdot i$. Imaginarnom dijelu zadanoga broja promijenimo predznak, dok realni dio ostavimo nepromijenjen. Tako dobijemo: $\overline{z}=7+3\cdot i$.

27. $\pm\sqrt{s^2-r^2}$ **.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&r=\sqrt{s^2-p^2}, \quad /^2\\
&r^2=s^2-p^2,\\
&p^2=s^2-r^2, \quad /\sqrt{\ }\\
&p=\pm\sqrt{s^2-r^2}.
\end{aligned}$$

28. $-5\cdot n+12$. Prvi član zadanoga niza je $a_1=7$. Razlika niza jednaka je $d=a_2-a_1=2-7=-5$. Zbog toga je opći član niza jednak:

$$a_n=7+(n-1)\cdot(-5)=7-5\cdot n+5=-5\cdot n+12.$$

29.1.) $4\cdot x^2+y^2+9-4\cdot x\cdot y+12\cdot x-6\cdot y$. Primjenom formule za kvadrat trinoma dobivamo:

$$\begin{aligned}
&(2\cdot x-y+3)^2=(2\cdot x)^2+y^2+3^2-2\cdot(2\cdot x)\cdot y+2\cdot(2\cdot x)\cdot 3-2\cdot y\cdot 3=\\
&=4\cdot x^2+y^2+9-4\cdot x\cdot y+12\cdot x-6\cdot y.
\end{aligned}$$

2.) $-5\cdot a^2+2468\cdot a$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(1234-2\cdot a)\cdot(1234+2\cdot a)-(a-1234)^2=\\
&=1234^2-(2\cdot a)^2-\left(a^2-2\cdot a\cdot 1234+1234^2\right)=\\
&=1234^2-4\cdot a^2-a^2+2468\cdot a-1234^2=\\
&=-5\cdot a^2+2468\cdot a.
\end{aligned}$$

30.1.) 15 225. Iz podatka da je dobit podijeljena u omjeru 8 : 9 : 12 zaključujemo da postoji jedinstven $k > 0$ takav da dijelovi iznose $8 \cdot k$, $9 \cdot k$ i $12 \cdot k$. Najveći od njih je $12 \cdot k$, a najmanji $8 \cdot k$. Njihova razlika treba biti jednaka 2100 kn, pa dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom

$$12 \cdot k - 8 \cdot k = 2100.$$

Odatle je $4 \cdot k = 2100$, odnosno $k = \frac{2100}{4} = 525$. Sada lako izračunamo ukupnu dobit:

$$D = 8 \cdot k + 9 \cdot k + 12 \cdot k = 29 \cdot k = 29 \cdot 525 = 15\ 225 \text{ kn}.$$

2.) $542\ 373.\dot{3}\ \text{AJ} \approx 5.4 \cdot 10^5\,\text{AJ}.$. Iz zadanih podataka zaključujemo:

$$1 \text{ gs} = 9.46 \cdot 10^{12} \text{km} = \frac{9.46 \cdot 10^{12}}{1.5 \cdot 10^8} \text{AJ} = \frac{946}{150} \cdot 10^4 \text{AJ} = \frac{473}{75} \cdot 10^4 \text{AJ},$$
$$8.6 \text{ gs} = 8.6 \cdot \frac{473}{75} \cdot 10^4 \text{AJ} = 542\ 373.\dot{3}\ \text{AJ} \approx 5.4 \cdot 10^5 \text{AJ}.$$

31.1.) 58. Traženi je broj jednak zbroju apsolutnih frekvencija koje odgovaraju plavim stupcima. Te frekvencije redom iznose 13, 28 i 17, pa je njihov zbroj jednak

$$13 + 28 + 17 = 58.$$

2.) $4.61\overline{36} \approx 4.61$. Traženu prosječnu ocjenu, tj. aritmetičku sredinu svih ocjena maturanata, dobit ćemo tako da apsolutnu frekvenciju svake ocjene (koju možemo pročitati iz stupčastoga dijagrama) pomnožimo s tom ocjenom, zbrojimo dobivene rezultate i podijelimo ih sa zbrojem apsolutnih frekvencija. Dakle, imamo:

$$s = \frac{29 \cdot 5 + 13 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{29 + 13 + 2} = \frac{145 + 52 + 6}{44} = \frac{203}{44} = 4.61\overline{36} \approx 4.61.$$

32.1.) $\langle -5, 5 \rangle$. Primijetimo da je funkcija $f(x) = (x-5) \cdot (x+5)$ polinom 2. stupnja kojemu je vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) strogo pozitivan. Ta funkcija poprima strogo negativne vrijednosti na otvorenom intervalu određenom njezinim nultočkama. Iz jednadžbi $x - 5 = 0$ i $x + 5 = 0$ lako slijede $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe $\langle -5, 5 \rangle$.

2.) Manje od 21 000 cvjetova. Neka je n broj cvjetova prodan 2020. godine. Tada je broj cvjetova prodan 2019. godine jednak $\frac{1}{5} \cdot n$, dok je broj cvjetova prodan

2021. godine jednak $n+\frac{1}{5}\cdot n+\frac{3}{4}\cdot\left(n+\frac{1}{5}\cdot n\right)$. Ukupan broj cvjetova prodanih u svim trima godinama je

$$\frac{1}{5}\cdot n+n+n+\frac{1}{5}\cdot n+\frac{3}{4}\cdot\left(n+\frac{1}{5}\cdot n\right)=\left(n+\frac{1}{5}\cdot n\right)\cdot\left(1+1+\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{5}\cdot n\cdot\frac{11}{4}=\frac{33}{10}\cdot n.$$

Iz nejednadžbe $\frac{33}{10}\cdot n<69300$ slijedi $n<69300\cdot\frac{10}{33}=21000.$ Dakle, 2020. godine prodano je manje od 21 000 cvjetova.

33.1) $m>\frac{1}{20}$ **ili** $\left\langle\frac{1}{20},+\infty\right\rangle$**.** Diskriminanta zadane jednadžbe treba biti strogo negativna. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned}&D=(-2)^2-4\cdot 4\cdot 5\cdot m<0,\\&4-4\cdot 20\cdot m<0,\quad /:(-4)\\&20\cdot m-1>0,\\&20\cdot m>1.\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 20 slijedi $m>\frac{1}{20}$. Dakle, tražene vrijednosti tvore skup $\left\langle\frac{1}{20},+\infty\right\rangle$.

2.) $\frac{4}{(x+1)^2}$**.** Primjenom tablice derivacija osnovnih funkcija i pravila za deriviranje količnika dviju funkcija dobivamo:

$$f'(x)=\frac{(x-3)'\cdot(x+1)-(x-3)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{(1-0)\cdot(x+1)-(x-3)\cdot(1-0)}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+3}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}.$$

34.1.) $a^{\frac{25}{6}}$. Imamo redom:

$$\sqrt[3]{a^2}:\sqrt{a^{-7}}=a^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{-7}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{2}\right)}=a^{\frac{2}{3}+\frac{7}{2}}=a^{\frac{2\cdot 2+3\cdot 7}{6}}=a^{\frac{4+21}{6}}=a^{\frac{25}{6}}.$$

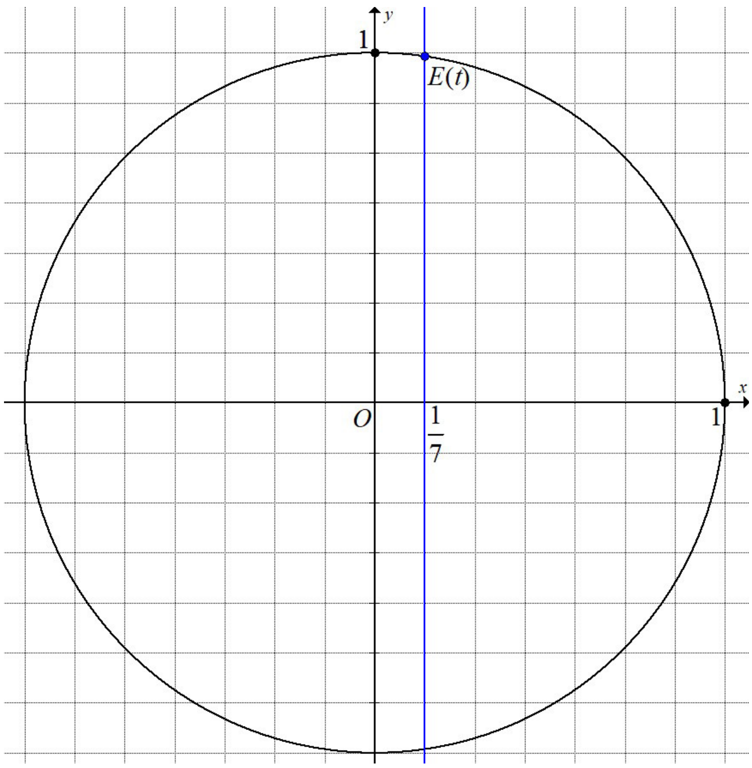
2.) 13. Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti jednakost $C_t=C_0+\frac{20}{100}\cdot C_0$ koja je ekvivalentna jednakosti $C_t=1.2\cdot C_0$. Tako redom dobivamo:

$$1.2 \cdot C_0 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)^t, \quad / : C_0 \neq 0$$
$$1.2 = 1.015^t, \quad / \log$$
$$\log 1.2 = \log\left(1.015^t\right),$$
$$\log 1.2 = t \cdot \log 1.015, \quad / : \log 1.015$$
$$t = \frac{\log 1.2}{\log 1.015} \approx 12.2457050226 \text{ godina.}$$

Dakle, taj iznos moramo uložiti na 13 godina.

Napomena: U zadatku nije navedena pretpostavka da se kamata obračunava dekurzivno, odnosno jednom godišnje na kraju svake godine. Gornje rješenje dobiveno je primjenom te pretpostavke. Konačna vrijednost uloženoga iznosa na kraju 13. godine bit će za više od 20% veća u odnosu na početnu vrijednost iznosa.

35.1.) Vidjeti sliku 1. Povučemo pravac $x = \frac{1}{7}$ i odredimo njegovo sjecište sa zadanom kružnicom u prvom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini (jer su obje koordinate toga sjecišta strogo pozitivne). To je sjecište upravo tražena točka.



Slika 1.

2.) $x_1 = \frac{3}{2} \cdot \pi,\ x_2 = \frac{11}{6} \cdot \pi$ **ili obratno**. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad / : 2\\
&\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\\
&x + \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi,\\
&x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi,\\
&x = \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow\\
&x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi = \frac{-\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
&x_2 = \frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot l \cdot \pi = \frac{-\pi}{2} + 2 \cdot l \cdot \pi,\ 1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Iz uvjeta $x_1 \in [0, 2 \cdot \pi]$ slijedi:

$$
\begin{aligned}
&0 \le \frac{-\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \le 2 \cdot \pi, \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi}\\
&0 \le \frac{-1}{12} + k \le 1,\\
&\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}.
\end{aligned}
$$

Od svih cijelih brojeva k ovu nejednakost zadovoljava jedino $k = 1$. Za tu vrijednost dobivamo rješenje $\frac{-\pi}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \pi = \frac{-\pi}{6} + 2 \cdot \pi = \frac{11}{6} \cdot \pi.$

Iz uvjeta $x_2 \in [0, 2 \cdot \pi]$ slijedi:

$$
\begin{aligned}
&0 \le \frac{-\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \le 2 \cdot \pi, \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi}\\
&0 \le \frac{-1}{4} + k \le 1,\\
&\frac{1}{4} \le k \le \frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

Od svih cijelih brojeva k ovu nejednakost zadovoljava jedino $k = 1$. Za tu vrijednost dobivamo rješenje $\frac{-\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi = \frac{-\pi}{2} + 2 \cdot \pi = \frac{3}{2} \cdot \pi.$

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe u segmentu $[0, 2\cdot\pi]$ su $x_1 = \frac{3}{2}\cdot\pi$, $x_2 = \frac{11}{6}\cdot\pi$.

36.1.) 84. Prema Pitagorinu poučku, duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta čije su katete duge 5 i 12 jednaka je

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Prema istomu poučku zaključujemo da je tražena vrijednost t jednaka:

$$t = \sqrt{85^2 - 13^2} = \sqrt{7225 - 169} = \sqrt{7056} = 84.$$

2.) Bilo koji pravac čija jednadžba ima oblik $y = k\cdot x - 11\cdot k - 3,\ k \in \mathbb{R}$ ili pravac $x = 11$. Zadanom točkom očito prolazi pravac $p \ldots x = 11$ usporedan s osi ordinata. Želimo li povući pravac koji nije usporedan s osi ordinata, dobivamo:

$$\begin{aligned}
&p \ldots y - (-3) = k\cdot(x - 11),\\
&y + 3 = k\cdot x - 11\cdot k,\\
&y = k\cdot x - 11\cdot k - 3,\ k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

37.1.) $\approx 29^\circ 35' 37''$. Nijedan od preostalih kutova trokuta ne može imati mjeru strogo veću od 99° jer bi u suprotnom zbroj svih triju mjera kutova trokuta bio strogo veći od $2\cdot 99^\circ = 198^\circ$, što je nemoguće. (Zbroj tih mjera mora biti jednak 180°.) Dakle, kut čija je mjera 99° je najveći kut trokuta i nalazi se nasuprot najduljoj stranici trokuta. Kut čiju mjeru tražimo nalazi se nasuprot najkraćoj stranici trokuta. Označimo li njegovu mjeru s α, primjenom sinusova poučka zaključujemo da se sinusi najvećega i najmanjega kuta trokuta odnose kao duljine tim kutovima nasuprotnih stranica. Prema podacima u zadatku, taj je omjer jednak 2 : 1, pa dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin 99^\circ}{\sin\alpha} = 2,\\
&\sin\alpha = \frac{\sin 99^\circ}{2},\\
&\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin 99^\circ}{2}\right) \approx 29.59356246^\circ \approx 29^\circ 35' 37''.
\end{aligned}$$

2.) ≈ 3.16. Podnožje stupa, mjesto gdje je žica pričvršćena u zemlju i vrh stupa su vrhovi trokuta. Označimo ih redom s A, B i C. Tim vrhovima nasuprotne kutove označimo standardno s α, β i γ. U trokutu ABC znamo sljedeće veličine:

$$b := \left|\overline{AC}\right| = 5,$$
$$a := \left|\overline{BC}\right| = 7.3,$$
$$\beta = 34^\circ.$$

Želimo izračunati $c := \left|\overline{AB}\right|$. Budući da se žica kojom je stup osiguran da ne padne **ne** nalazi na strani na koju je stup nagnut, kut nasuprot stranice a je tup. Najprije primjenom sinusova poučka odredimo njegovu mjeru:

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\sin\beta = \frac{7.3}{5}\cdot\sin\left(34^\circ\right),$$
$$\alpha = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{7.3}{5}\cdot\sin\left(34^\circ\right)\right) \approx 125.27182617^\circ,$$

pa potom i mjeru kuta γ:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta) \approx 180^\circ - \left(34^\circ + 125.27182617^\circ\right) = 20.72817383^\circ.$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak i dobiti:

$$c \approx \sqrt{7.3^2 + 5^2 - 2\cdot 7.3\cdot 5\cdot\cos\left(20.72817383^\circ\right)} =$$
$$= \sqrt{53.29 + 25 - 73\cdot\cos\left(20.72817383^\circ\right)} =$$
$$= \sqrt{78.29 - 73\cdot\cos\left(20.72817383^\circ\right)} \approx 3.16469309 \approx 3.16 \text{ m}.$$

38.1.) $3\cdot x + 5\cdot y - 7 = 0$ **ili** $y = \frac{-3}{5}\cdot x + \frac{7}{5}$**.** Traženi pravac ima jednadžbu oblika $3\cdot x + 5\cdot y + C = 0$, za neki $C \in \mathbb{R}$. Odredimo nepoznatu vrijednost C. Najprije odredimo središte zadane kružnice. U tu svrhu transformirajmo njezinu jednadžbu iz razvijenoga u kanonski oblik:

$$\left(x^2 + 2\cdot x\right) + \left(y^2 - 4\cdot y\right) = 0,$$
$$(x+1)^2 - 1^2 + (y-2)^2 - 2^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1^2 + 2^2,$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 + 4,$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Odatle očitamo središte kružnice: $S = (-1, 2)$, pa koordinate te točke uvrstimo u gore navedenu jednadžbu pravca:

$$3\cdot(-1)+5\cdot 2+C=0,$$
$$C=3-10=-7.$$

Dakle, tražena jednadžba pravca glasi: $3\cdot x+5\cdot y-7=0$ ili u eksplicitnom obliku:

$$5\cdot y=(-3)\cdot x+7,$$
$$y=\frac{-3}{5}\cdot x+\frac{7}{5}.$$

2.) 19. 1. način: Uočimo tri neosjenčana četverokuta unutar velikoga trokuta od kojih svaki sadrži osjenčani crni jednakostraničan trokut. Dvije njihove susjedne stranice su duge $5+2=7$ cm i zatvaraju kut mjere 60° (mjera jednoga kuta u crnomu trokutu). I kut nasuprot uočenom kutu također ima mjeru 60° (unutrašnji kut u velikom jednakostraničnom trokutu), dok obama kutovima susjedni kutovi imaju mjeru 120° (vanjski kut jednakostraničnoga trokuta). Odatle zaključujemo da su uočeni četverokuti paralelogrami. (Preciznije, vrijedi tvrdnja: Ako nasuprotni kutovi četverokuta imaju jednake mjere, a zbroj mjera dvaju susjednih kutova četverokuta iznosi 180°, onda je taj četverokut paralelogram.) Budući da su dvije susjedne stranice paralelograma jednake duljine, radi se o rombu.

Tako sada lagano zaključujemo da je duljina stranice velikoga jednakostraničnoga trokuta jednaka zbroju duljina dviju stranica uočenih rombova i duljine jedne stranice većega unutrašnjega jednakostraničnoga trokuta, tj.

$$a=7+5+7=19 \text{ cm}.$$

2. način: Neka je a tražena duljina. Iz bilo kojega vrha velikoga jednakostraničnoga trokuta povucimo visinu na tom vrhu nasuprotnu stranicu. Ta će visina prolaziti kroz točno jedan vrh zajednički crnom i nekom od sivih trokutova. Primjenom sličnosti dobivamo:

$$\frac{a}{2}:\left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\right)=(5+1):\left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{2}{2}\cdot\sqrt{3}\right).$$

Odatle redom dobivamo:

$$\left(\frac{a-7}{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{a}{2}=6\cdot\left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\right), \quad /\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$a^2-7\cdot a=12\cdot a,$$
$$a^2-19\cdot a=0, \quad /:a\neq 0$$
$$a-19=0,$$
$$a=19 \text{ cm}.$$

39.1.) Vidjeti sliku 2. Primijetimo da je

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^3\right)'+b\cdot\left(x^2\right)'+c\cdot(x)'+0=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2+b\cdot 2\cdot x+c\cdot 1=$$
$$=x^2+2\cdot b\cdot x+c.$$

Također, iz slike vidimo da su točke $(-1,5)$ i $(3,-5)$ točke lokalnih ekstrema funkcije *f*. Prema Fermatovoj lemi, to znači da vrijede jednakosti:

$$f'(-1)=f'(3)=0.$$

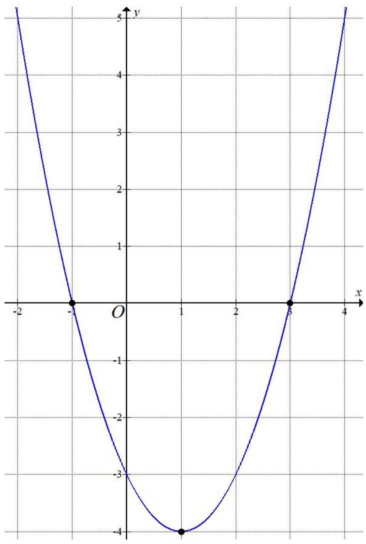
Budući da je f' polinom 2. stupnja, zaključujemo da su -1 i 3 sve njegove nultočke, pa primjenom ili osnovnoga poučka algebre ili Vièteovih formula zaključujemo da je:

$$f'(x)=x^2-2\cdot x-3.$$

Preostaje nacrtati parabolu čija je jednadžba $y=x^2-2\cdot x-3$. Ona prolazi točkama $(-1,0)$ i $(3,0)$. Prva koordinata njezina tjemena je $\frac{-1+3}{2}=1,$ dok je druga koordinata njezina tjemena

$$f'(1)=1^2-2\cdot 1-3=1-2-3=-4.$$

U pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke $(-1,0)$, $(3,0)$ i $(1,-4)$, pa ih spojimo parabolom. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

2.) $N(h)=\{-2\}$. Imamo redom:

$$h(x)=\frac{(x+1)^2-(x-3)-6}{x^2\cdot(x-3)+((3\cdot x+2)-3)}=\frac{x^2+2\cdot x+1-x+3-6}{x^3-3\cdot x^2+3\cdot x+2-3}=$$
$$=\frac{x^2+x-2}{x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-1}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)^3}.$$

Iz jednadžbe $x^2+x-2=0$ slijedi

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-(-8)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2},$$
$$x_1=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1,\ x_2=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2.$$

Međutim, za $x=1$ funkcija h nije definirana jer je i vrijednost izraza $(x-1)^3$ za $x=1$ jednaka nuli. Zbog toga $x=1$ nije nultočka funkcije h. Prema tome, jedina nultočka te funkcije je $x=-2$.

40. $\frac{189}{128}\cdot\sqrt{45695}\cdot\pi\approx991.6\text{ cm}^2$. Odredimo najprije duljine stranica trokuta. Iz podatka da one tvore uzastopne članove geometrijskoga niza čiji je zbroj članova 55.5 i kojemu je najveći član jednak 24 dobivamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}a+b+24=55.5,\\ b^2=24\cdot a.\end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je $a=31.5-b$, pa uvrštavanjem te jednakosti u drugu jednadžbu dobivamo:

$$b^2=24\cdot(31.5-b),$$
$$b^2=756-24\cdot b,$$
$$b^2+24\cdot b-756=0,$$
$$b_{1,2}=\frac{-24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot1\cdot(-756)}}{2\cdot1}=\frac{-24\pm\sqrt{576-(-3024)}}{2}=\frac{-24\pm\sqrt{3600}}{2}=\frac{-24\pm60}{2},$$
$$b=\frac{-24+60}{2}=\frac{36}{2}=18.$$

(Drugo rješenje je strogo negativan cijeli broj koji ne dolazi u obzir jer je b duljina stranice trokuta.) Dakle, duljine stranica trokuta (u cm) su $31.5-18=13.5$, 18 i 24.

Rotacijom zadanoga trokuta oko njegove najveće stranice nastaju dva stošca sa spojenim osnovkama. Zbog toga je njegovo oplošje jednako zbroju površina plašteva tih dvaju stožaca. Duljina izvodnice prvoga stošca je 13.5 cm, dok je duljina izvodnice drugoga stošca 18 cm. Preostaje izračunati polumjer njihove zajedničke osnovke.

Taj je polumjer jednak duljini visine povučene na najdulju stranicu zadanoga trokuta. U tu vrhu izračunamo njegovu površinu (primjenom Heronove fomule), pa duljinu visine dobijemo dijeleći dvostruku vrijednost površine duljinom najveće stranice trokuta:

$$s = \frac{55.5}{2} = 27.75,$$
$$P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = \sqrt{27.75\cdot(27.75-13)\cdot(27.75-18)\cdot(27.75-24)} =$$
$$= \sqrt{27.75\cdot 14.75\cdot 9.75\cdot 3.75} = \sqrt{14458.18359375},$$
$$r = \frac{2\cdot P}{24} = \frac{P}{12} = \frac{\sqrt{14458.18359375}}{12}.$$

Dakle, traženo je oplošje jednako:

$$O = r\cdot\pi\cdot s_1 + r\cdot\pi\cdot s_2 = r\cdot\pi\cdot(s_1+s_2) =$$
$$= \frac{\sqrt{14458.18359375}}{12}\cdot\pi\cdot 31.5 =$$
$$= \frac{189}{128}\cdot\sqrt{45695}\cdot\pi \approx 991.59892677 \approx 991.6 \text{ cm}^2.$$

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač