TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	Matematika na državnoj maturi	rješenja probnoga ispita iz veljače 2023. (viša razina)

1. **D.** Prijelazom na bazu 10 (tj. na dekadski logaritam) dobivamo:

$$\begin{aligned}\log_4 \frac{7}{2} &= \log_4 3.5 = \\ &= \frac{\log 3.5}{\log 4} \approx \\ &\approx \frac{0.54406804}{0.60205999} \approx \\ &\approx 0.90367746 \approx 0.904.\end{aligned}$$

2. **B**. Prisjetimo se da je 1 m = 100 cm = 10^2 cm. To znači da je

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ cm}.$$

Odatle slijedi da je

$$1 \text{ cm}^2 = \left(10^{-2}\right)^2 = 10^{-2\cdot 2} = 10^{-4}\,\text{m}^2.$$

Tako je

$$\begin{aligned}58\,000 \text{ cm}^2 &= 58000 \cdot 10^{-4} = \\ &= 5.8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4} = \\ &= 5.8 \cdot 10^0 = \\ &= 5.8 \cdot 1 = 5.8 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

3. **A.** Koristeći formulu za razliku kvadrata imamo redom:

$$\begin{aligned}&x \cdot y \cdot (y-1) \cdot (y+1) + (x-y)^2 = \\ &= x \cdot y \cdot \left(y^2 - 1\right) + x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = \\ &= x \cdot y^3 - x \cdot y + x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = \\ &= x \cdot y^3 - 3 \cdot x \cdot y + x^2 + y^2.\end{aligned}$$

Dakle, traženi je koeficijent jednak -3.

4. **A.** Ukupan broj **mogućih** ishoda jednak je ukupnom broju učionica koje možemo izabrati. Taj je broj jednak 5.

Ukupan broj **povoljnih** ishoda jednak je 1 jer je povoljni ishod predstavlja jedino izbor prve učionice.

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{1}{5} = 0.2.$$

5. **B.** Prisjetimo se da je

$$1 \text{ litra} = 1 \text{ dm}^3.$$

Polumjer bačve jednak je polovici njezina promjera, tj.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ dm}.$$

Volumen bačve jednak je volumenu valjka kojemu je polumjer osnovke r, a visina h:

$$V = B \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Iz te jednakosti izrazimo h:

$$h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi},$$

pa konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} h &= \frac{240}{3^2 \cdot \pi} = \frac{240}{9 \cdot \pi} = \\ &= \frac{80}{3 \cdot \pi} \approx \\ &\approx \frac{80}{9.42477796} \approx 8.48826363 \approx 8.5 \text{ dm.} \end{aligned}$$

6. **B**. Imamo redom:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{11} + 4 \cdot 2^{13} &= 3 \cdot 2^{11} + 4 \cdot 2^2 \cdot 2^{11} = \\ &= 3 \cdot 2^{11} + 4 \cdot 4 \cdot 2^{11} = \\ &= (3 + 4 \cdot 4) \cdot 2^{11} = \\ &= (3 + 16) \cdot 2^{11} = 19 \cdot 2^{11}. \end{aligned}$$

7. **C.** Zapišimo najprije svaki od zadanih brojeva u obliku $a \cdot 10^k$, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$. Imamo redom:

$$2140\cdot 10^{k-3}=2140\cdot 10^{k}\cdot 10^{-3}=\left(2140\cdot 10^{-3}\right)\cdot 10^{k}=2.14\cdot 10^{k},$$
$$173\cdot 10^{k-2}=173\cdot 10^{k}\cdot 10^{-2}=\left(173\cdot 10^{-2}\right)\cdot 10^{k}=1.73\cdot 10^{k},$$
$$0.85\cdot 10^{k+1}=0.85\cdot 10^{k}\cdot 10^{1}=\left(0.85\cdot 10^{1}\right)\cdot 10^{k}=8.5\cdot 10^{k},$$
$$0.073\cdot 10^{k+2}=0.073\cdot 10^{k}\cdot 10^{2}=\left(0.073\cdot 10^{2}\right)\cdot 10^{k}=7.3\cdot 10^{k}.$$

Budući da je eksponencijalna funkcija $f(x)=10^{x}$ strogo rastuća na svojoj prirodnoj domeni (skupu $\mathbb{R}$), najveći od svih dobivenih brojeva je onaj koji ima najveći koeficijent uz 10^{k}. To je očito broj $8.5\cdot 10^{k}$.

Napomena: Za ispravno rješenje zadatka nije bitna pretpostavka $k\in\mathbb{N}$. Navedeno rješenje je točno za svaki $k\in\mathbb{R}$.

8. C. U zadanu jednakost uvrstimo $y=12$, pa riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici x. Imamo redom:

$$12=\frac{1}{200}\cdot x-75,$$
$$\frac{1}{200}\cdot x=75+12,$$
$$\frac{1}{200}\cdot x=87, \qquad /\cdot 200$$
$$x=87\cdot 200=17\ 400.$$

Dakle, taj grad ima 17 400 stanovnika.

9. A. Neka su a i b duljina i širina ručnika prije prvoga pranja. Površina toga ručnika jednaka je

$$P=a\cdot b \text{ kv. jed.}$$

Nakon prvoga pranja duljina i širina ručnika iznose redom:

$$a_1=a-\frac{2}{100}\cdot a=\left(1-\frac{2}{100}\right)\cdot a=\frac{98}{100}\cdot a=0.98\cdot a,$$
$$b_1=b-\frac{3}{100}\cdot b=\left(1-\frac{3}{100}\right)\cdot b=\frac{97}{100}\cdot b=0.97\cdot b,$$

pa je površina ručnika nakon prvoga pranja jednaka:

$$\begin{aligned}P_1 &= a_1 \cdot b_1 = (0.98 \cdot a) \cdot (0.97 \cdot b) = \\ &= (0.98 \cdot 0.97) \cdot (a \cdot b) = \\ &= 0.9506 \cdot P.\end{aligned}$$

Dakle, traženi postotak je jednak:

$$\begin{aligned}p &= \frac{P - P_1}{P} = \frac{P - 0.9506 \cdot P}{P} = \\ &= \frac{(1 - 0.9506) \cdot P}{P} = \\ &= 1 - 0.9506 = 0.0494 = 4.94\%.\end{aligned}$$

Napomena: Zadatak je namjerno riješen koristeći „opće" brojeve jer postupak i rezultat zadatka ne ovise o početnoj duljini i širini ručnika.

10. C. Podijelimo svaki član brojnika i nazivnika s n. Koristeći jednakost $\lim_n \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, dobivamo redom:

$$L = \lim_n \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{1} \right) = \frac{2+0}{1} = \frac{2}{1} = 2.$$

11. A. Primijetimo najprije da vrijedi nejednakost

$$7^{2 \cdot x} + 1 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, razlomak na lijevoj strani jednadžbe definiran je za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zbog toga redom imamo:

$$\begin{aligned}&3 \cdot \left(7^{2 \cdot x} - 1\right) = 2 \cdot \left(7^{2 \cdot x} + 1\right), \\ &3 \cdot 7^{2 \cdot x} - 3 = 2 \cdot 7^{2 \cdot x} + 2, \\ &3 \cdot 7^{2 \cdot x} - 2 \cdot 7^{2 \cdot x} = 2 + 3, \\ &7^{2 \cdot x} = 5, \quad / \log_7 \\ &2 \cdot x = \log_7 5, \quad / : 2 \\ &x = \frac{\log_7 5}{2}.\end{aligned}$$

12. A. Neka su v_V i v_A redom Vinkova, odnosno Antina brzina (iskazane u km/h). Prvoga je dana Vinko prešao ukupno $4.5 \cdot v_V$ kilometara, a Ante ukupno

$3 \cdot v_A$ kilometara. Zbroj tih duljina mora biti jednak 177 kilometara, pa dobivamo jednadžbu:

$$4.5 \cdot v_V + 3 \cdot v_A = 177, \quad / : 3$$
$$1.5 \cdot v_V + v_A = 59.$$

Drugoga je dana Vinko prešao ukupno $5 \cdot v_V$ kilometara, a Ante ukupno $2.5 \cdot v_A$ kilometara. Zbroj tih duljina mora biti jednak 167.5 kilometara, pa dobivamo jednadžbu:

$$5 \cdot v_V + 2.5 \cdot v_A = 167.5, \quad / : 2.5$$
$$2 \cdot v_V + v_A = 67.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 1.5 \cdot v_V + v_A = 59, \\ 2 \cdot v + v_A = 67. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo:

$$0.5 \cdot v_V = 8, \quad / : 0.5$$
$$v_v = 16.$$

Dakle, Vinko vozi brzinom od 16 km/h.

13. **D.** Neka je s traženi broj sličica. Očito je $s > 0$. Tada je broj sličica koje je Luka imao u četvrtak jednak $2 \cdot s$. U petak je Luka najprije dobio još 90 sličica, pa je imao ukupno $2 \cdot s + 90$ sličica. Nakon što je bratu dao $\frac{2}{3}$ svih svojih sličica, preostala mu je $\frac{1}{3}$ svih sličica, odnosno

$$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot s + 90) = \frac{2}{3} \cdot s + 30 \text{ sličica.}$$

Prema zahtjevu zadatka, taj broj mora biti strogo veći od 220, pa dobivamo nejednadžbu:

$$\frac{2}{3} \cdot s + 30 > 220.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$\frac{2}{3}\cdot s > 220-30,$$
$$\frac{2}{3}\cdot s > 190, \quad /\cdot\frac{3}{2}$$
$$s > 285.$$

Dakle, Luka je u srijedu imao više od 285 sličica.

14. C. Početna točka zadanoga vektora je (1, 10). Njegova krajnja točka je (7, 1). Zbog toga je taj vektor jednak:

$$\vec{a} = (7-1)\cdot\vec{i} + (1-10)\cdot\vec{j} =$$
$$= 6\cdot\vec{i} - 9\cdot\vec{j}.$$

.

15. B. Svaka točka na osi ordinata ima prvu koordinatu jednaku nuli. Zbog toga je jednadžba te osi $x = 0$.

16. D. Iz podatka da kružnica čije je središte u točki $S = (p, q)$ dodiruje os apscisa zaključujemo da je polumjer te kružnice jednak apsolutnoj vrijednosti druge koordinate točke *S*. (Moramo primijeniti apsolutnu vrijednost jer druga koordinata točke *S* može biti strogo negativan realan broj, dok polumjer kružnice mora biti nenegativan realan broj.) To znači da je

$$r = |q| = |-5| = 5,$$

pa tražena jednadžba kružnice glasi:

$$(x-4)^2 + (y-(-5))^2 = 5^2,$$
$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 25.$$

17. A. Odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije:

$$f'(x) = (-2)\cdot\left(x^3\right)' + 6\cdot\left(x^2\right)' =$$
$$= (-2)\cdot 3\cdot x^{3-1} + 6\cdot 2\cdot x^{2-1} =$$
$$= (-6)\cdot x^2 + 12\cdot x,$$

$$f''(x) = (-6)\cdot\left(x^2\right)' + 12\cdot(x)' =$$
$$= (-6)\cdot 2\cdot x^{2-1} + 12\cdot 1 =$$
$$= (-12)\cdot x + 12.$$

Stacionarne točke zadane funkcije određujemo kao nultočke njezine prve derivacije:

$$(-6)\cdot x^2+12\cdot x=0, \quad /:(-6)$$
$$x^2-2\cdot x=0,$$
$$x\cdot(x-2)=0,$$
$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Koristeći $f''-$test za svaku od dobivenih stacionarnih točaka provjerimo je li lokalni ekstrem, te, ako jest, o kakvom se ekstremu radi:

$$f''(0)=(-12)\cdot 0+12=12>0,$$
$$f''(2)=(-12)\cdot 2+12=-12<0.$$

Odatle zaključujemo da zadana funkcija ima točku lokalnoga maksimuma

$$M=(2,f(2))=\left(2,(-2)\cdot 2^3+6\cdot 2^2\right)=(2,8).$$

Obje njezine koordinate su strogo pozitivni brojevi, pa se ta točka nalazi u prvom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.

18. C. Prema teoremu o težištu trokuta, težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta. Drugim riječima, duljina spojnice težišta trokuta i vrha trokuta dvostruko je dulja od spojnice težišta trokuta i polovišta uočenom vrhu nasuprotne trokuta.

19. D. Iz vrha kraće osnovice koji ne pripada kraćem kraku trapeza povucimo okomicu na dulju osnovicu. Tom će okomicom zadani trapez biti podijeljen na pravokutnik i na pravokutan trokut. Pogledajmo dobiveni pravokutan trokut. Njegove su katete duge $11-6=5$ cm i 7 cm. Tražimo mjeru šiljastoga kuta toga trokuta nasuprot kateti duljine 7 cm. Označimo li tu mjeru s α, primjenom funkcije tg dobivamo:

$$\text{tg } \alpha=\frac{7}{5},$$
$$\alpha=\text{arctg}\left(\frac{7}{5}\right)\approx 54.4623222^\circ\approx 54^\circ 28'.$$

20. D. Uočimo jednakokračan trokut kojemu su duljine krakova jednake duljini stranice peterokuta, duljina osnovice jednaka duljini dijagonale peterokuta, a mjera kuta nasuprot osnovici jednaka mjeri unutrašnjega kuta peterokuta (tj. kuta kojega zatvaraju dvije susjedne stranice peterokuta). Ta je mjera kuta jednaka:

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} =$$
$$= 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Koristeći teorem o kosinusima dobivamo da je tražena duljina dijagonale jednaka:

$$d = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 108^\circ} =$$
$$= \sqrt{25 + 25 - 50 \cdot \cos 108^\circ} =$$
$$= \sqrt{50 - 50 \cdot \cos 108^\circ} =$$
$$= \sqrt{50 \cdot \left(1 - \cos 108^\circ\right)} \approx 8.09016994 \approx 8.09 \text{ cm}.$$

21. C. Pravci *AB* i *AD*, odnosno *AB* i *FB* se sijeku (u vrhu *A*, odnosno *B*), pa nisu mimosmjerni.

Pravac *AB* je usporedan s pravcem *EF* jer je riječ o pravcima koji određuju dvije nasuprotne stranice kvadrata. Iz istoga je razloga pravac *EF* usporedan s pravcem *HG*. To znači da su i pravci *AB* i *HG* usporedni, pa oni nisu mimosmjerni.

Pravci *AB* i *HE* se očito ne sijeku, a nisu ni usporedni jer pravac *HE* siječe pravac *EF* usporedan s pravcem *AB*. Prema tome, pravci *AB* i *HE* su mimosmjerni.

22. C. Osnovka piramide je kvadrat čija je stranica duga 4 cm. Sve četiri strane piramide su jednakostranični trokutovi kojima je stranica duga 4 cm. Zbog toga je oplošje zadane piramide jednako:

$$O = B + P = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} =$$
$$= a^2 + a^2 \cdot \sqrt{3} =$$
$$= 4^2 + 4^2 \cdot \sqrt{3} =$$
$$= 16 + 16 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

23. B. Iz pretpostavke da je najveća vrijednost zadane funkcije jednaka nuli zaključujemo da graf te funkcije s donje strane dodiruje os apscisa. To znači da je vodeći koeficijent *a* strogo negativan i da kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima dvostruko realno rješenje. Odatle zaključujemo da su $a < 0$ i $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$. Od četiriju ponuđenih odgovora jedino odgovor B. ispunjava oba navedena uvjeta.

24. B. Rastavimo brojnik zadanoga razlomka na faktore. Koristeći formulu za razliku kvadrata imamo redom:

$$\begin{aligned}
&n^2+7\cdot n-25\cdot n-175=\\
&n^2\cdot(n+7)-25\cdot(n+7)=\\
&(n+7)\cdot\left(n^2-25\right)=\\
&(n+7)\cdot(n+5)\cdot(n-5).
\end{aligned}$$

Zbog toga će zadani razlomak biti cijeli broj ako i samo ako njegov nazivnik bude jednak nekom od binoma koji se pojavljuju u rastavu njegova brojnika na faktore. Tako zaključujemo:

$$\begin{aligned}
&-a\in\{7,5,-5\}, \quad /:(-1)\\
&a\in\{-7,-5,5\}.
\end{aligned}$$

Od četiriju ponuđenih odgovora jedino odgovor naveden pod **B**. pripada dobivenom skupu.

25. $b=\dfrac{c-a}{c}=1-\dfrac{a}{c}$. Odmah dobivamo:

$$\begin{aligned}
&c\cdot(1-b)=a,\\
&c-b\cdot c=a,\\
&b\cdot c=c-a, \quad /:c\\
&b=\frac{c-a}{c}=1-\frac{a}{c}.
\end{aligned}$$

26. $|z|=\sqrt{29}$. Računamo:

$$|z|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$$

27. $\sqrt[4]{x^3}$. Koristeći pravilo za množenje potencija s istim bazama imamo redom:

$$x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=x^{\frac{1+2}{4}}=x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}.$$

28. 1. Lijeva strana zadane jednakosti je skup čiji elementi zadovoljavaju sve sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&x\geq\frac{-5}{3},\\
&x\leq 1,\\
&x>-k,\\
&x<4.
\end{aligned}$$

Iz druge i četvrte nejednakosti dobivamo:

$$x \le 1.$$

Za $-k < \frac{-5}{3}$, odnosno $k > \frac{5}{3}$, iz prve i treće nejednakosti dobivamo:

$$x \ge \frac{-5}{3},$$

pa je u tom slučaju lijeva strana zadane jednakosti jednaka intervalu $\left[\frac{-5}{3}, 1\right]$. No, desna strana zadane jednakosti očito nije jednaka tom intervalu, pa zaključujemo da ne može vrijediti nejednakost $k > \frac{5}{3}$.

Za $-k \ge \frac{-5}{3}$, odnosno $k \le \frac{5}{3}$, iz prve i treće nejednakosti dobivamo:

$$x > -k,$$

pa je u tom slučaju lijeva strana zadane jednakosti jednaka intervalu $\langle -k, 1]$. Taj interval je jednak intervalu na desnoj strani zadane jednakosti ako i samo ako je $k = 1$. Dakle, zadatak ima jedinstveno rješenje $k = 1$.

Napomena: **Navedeno rješenje dobije se i bez pretpostavke** $k \in \mathbb{N}$ **.**

29. 1.) $(a-2)^3$. Prema pretpostavci, zadani izraz je potencija nekoga binoma. Njegov vodeći član je a^3, pa zaključujemo da zadani izraz može biti jedino kub binoma kojemu je prvi član jednak a. Slobodni član zadanoga izraza je –8 i on je kub broja (–2). Dakle, jedina mogućnost je jednakost:

$$a^3 - 6 \cdot a^2 + 12 \cdot a - 8 = (a-2)^3.$$

Kubiranjem njezine desne strane prema formuli za kub binoma lako se možemo uvjeriti da je ta jednakost istinita.

2.) $a+1$. Iz pretpostavke zadatka zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$n^2 - 2 \cdot n = a.$$

Prethodnik broja n je broj $n-1$. Njegov je kvadrat jednak:

$$\begin{aligned}(n-1)^2 &= n^2-2\cdot n+1=\\ &=\left(n^2-2\cdot n\right)+1=\\ &=a+1.\end{aligned}$$

Napomena: Pretpostavka zadatka je neprecizno iskazana jer se može shvatiti da se kvadratu broja n oduzima broj dvostruko veći od toga kvadrata, a ne broj dvostruko veći od broja n. U tom slučaju imamo:

$$\begin{aligned}&n^2-2\cdot n^2=a,\\ &-n^2=a,\\ &n^2=-a.\end{aligned}$$

Za $a>0$ ovu jednakost ne zadovoljava nijedan prirodan broj n.

Za $a\le 0$ zbog pretpostavke $n\in\mathbb{N}$ dalje slijedi:

$$\begin{aligned}n&=\sqrt{-a},\\ (n-1)^2&=\left(\sqrt{-a}-1\right)^2=\\ &=a-2\cdot\sqrt{-a}+1.\end{aligned}$$

30. 1.) $\frac{3}{2}=1.5$. Koristeći osnovna svojstva logaritama i uz pretpostavku $x>0$ (koja mora vrijediti da bi prvi pribrojnik bio definiran) imamo redom:

$$\begin{aligned}&\log_3 x+\log_3 2=1,\\ &\log_3(x\cdot 2)=1,\\ &2\cdot x=3^1,\\ &2\cdot x=3,\\ &x=\frac{3}{2}=1.5.\end{aligned}$$

2.) 1500. Traženi je broj jednak $N(0)$, odnosno

$$\begin{aligned}N(0)&=1500\cdot 2.72^{0.7\cdot 0}=\\ &=1500\cdot 2.72^0=\\ &=1500\cdot 1=1500.\end{aligned}$$

31. 1.) 25. Ukupan broj maturanata prirodoslovno-matematičke gimnazije jednak je:

$$28+11+5=44.$$

Među njima je ukupno 11 maturanata koji su razred završili s ocjenom vrlo dobar. Zbog toga je traženi postotak jednak:

$$\frac{11}{44}\cdot 100 = 25\%.$$

Napomena: Postavka zadatka je nejasna i neprecizna jer se kao osnovna veličina može shvatiti ukupan broj svih maturanata prirodoslovno-matematičke gimnazije koji su razred završili s ocjenom vrlo dobar. U tom bi se slučaju tražio postotni udio ukupnoga broja svih maturanata te gimnazije u odnosu na navedenu osnovnu veličinu, pa bi rješenje zadatka bilo $\frac{44}{11}\cdot 100 = 400\%$. Jasnija i ispravnija formulacija zadatka bila bi npr.:

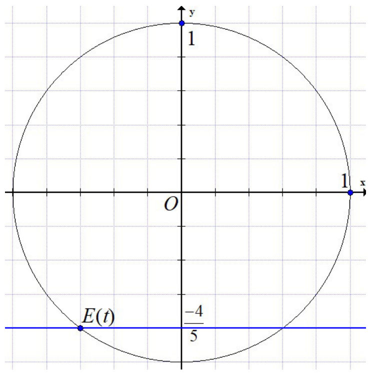
***Koliki je postotak maturanata prirodoslovno-matematičke gimnazije koji su razred završili s ocjenom vrlo dobar u odnosu na ukupan broj svih maturanata te gimnazije*?**

2.) $\approx 4.$ Iz grafikona očitamo da je 29 učenika opće gimnazije završilo razred s ocjenom odličan(5), 26 učenika te gimnazije s ocjenom vrlo dobar(4), 6 učenika s ocjenom dobar(3) i 4 učenika s ocjenom nedovoljan(1). Zbog toga je tražena prosječna ocjena jednaka

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{29\cdot 5 + 26\cdot 4 + 6\cdot 3 + 4\cdot 1}{29+26+6+4} = \\ &= \frac{145+104+18+4}{65} = \\ &= \frac{271}{65} \approx 4.16923077 \approx 4.\end{aligned}$$

Primjedba: U zadatku se pretpostavlja da je prosječna ocjena element skupa {nedovoljan, dovoljan, dobar, vrlo dobar, odličan], pa je dobiveni rezultat zbog toga zaokružen na najbliži prirodan broj.

32. **1.) Vidjeti sliku 1.** Prva koordinata svake točke na jediničnoj kružnici je kosinus (nekoga) broja t, a druga sinus toga broja. Prema tome, na sliku ucrtamo pravac čija je jednadžba $y = \frac{-4}{5}$ i odredimo njegovo sjecište sa zadanom kružnicom u trećem kvadrantu (jer, prema zahtjevu zadatka, prva koordinata sjecišta (kosinus broja t) mora biti strogo negativna). Dobivamo donju sliku.



Slika 1.

2.) $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. U intervalu $[0,\pi]$ zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje

$$x=\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

Zbog parnosti funkcije kosinus, i broj $-x=\frac{-\pi}{2}$ je također rješenje iste jednadžbe. Tako zaključujemo da sva rješenja zadane jednadžbe dobijemo tako da nekom od dobivenih rješenja dodamo „višekratnik“ temeljnoga perioda funkcije kosinus, odnosno „višekratnik“ broja $2\cdot\pi$:

$$\begin{cases} x_k=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x_l=\frac{-\pi}{2}+l\cdot 2\cdot\pi,\ l\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Primijetimo da broj $\frac{-\pi}{2}$ dobijemo tako da od broja $\frac{\pi}{2}$ oduzmemo broj π. Tako izraz kojim je generiran drugi skup rješenja dalje prelazi u:

$$\begin{aligned} x_l &= \frac{\pi}{2}-\pi+l\cdot 2\cdot\pi= \\ &= \frac{\pi}{2}+(2\cdot l-1)\cdot\pi,\ l\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dakle, prvi skup rješenja dobijemo tako da broju $\frac{\pi}{2}$ dodajemo sve parne „višekratnike“ broja π, a drugi tako da broju $\frac{\pi}{2}$ dodajemo sve neparne „višekratnike“ broja π. To znači da sva rješenja zadane jednadžbe dobijemo tako da broju $\frac{\pi}{2}$ dodamo sve „višekratnike“ broja π, što možemo zapisati kao:

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Napomena: Isti skup rješenja dobije se tako da *bilo kojem* elementu gornjega skupa dodajemo sve „višekratnike“ broja π. Tako su ispravna rješenja zadatka i npr. $x = \frac{-\pi}{2} + k \cdot \pi, x = \frac{3}{2} \cdot \pi + k \cdot \pi,$ itd.

33. 1.) 100. Iz pretpostavke da je omjer zarada Ane i Eme jednak 5 : 6 zaključujemo da je taj omjer jednak 10 : 12 (svaki član omjera pomnožimo s 2).

Iz pretpostavke da je omjer zarada Mije i Eme jednak 3 : 4 zaključujemo da je taj omjer jednak 9 : 12 (svaki član omjera pomnožimo s 3).

Dakle, omjer zarada Ane, Mije i Eme je 10 : 9 : 12, pa iznos od 310 € dijelimo u tom omjeru. Postupamo standardno:

$$k = \frac{310}{10+9+12} = \frac{310}{31} = 10,$$
$$A = 10 \cdot k = 10 \cdot 10 = 100 \text{ €}.$$

Prema tome, Ana je zaradila 100 € (dok su Mia i Ema zaradile 90, odnosno 120 €).

2.) ≈ 154.34. Tražena ukupna duljina je jednaka:

$$l = 30 + 30 + 30 + 30 \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ =$$
$$= \left(3 + \operatorname{ctg} 25^\circ\right) \cdot 30 =$$
$$\approx 154.335207612 \approx 154.34 \text{ cm}.$$

34. 1.) $x^2 + 20$. Pretpostavimo da je $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, konstante. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 20, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 21, \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 29, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 20, \\ a + b + c = 21, \\ 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 29. \end{cases}$$

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu i treću jednadžbu sustava slijedi:

$$\begin{cases} a+b+20=21, \\ 9\cdot a+3\cdot b+20=29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 9\cdot a+3\cdot b=9 \quad /:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 3\cdot a+b=3. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobije se

$$2\cdot a=2,$$

a odatle je $a=1$. Iz prve jednadžbe odmah slijedi

$$b=1-a=1-1=0,$$

pa je tražena kvadratna funkcija

$$f(x)=1\cdot x^2+0\cdot x+20=x^2+20.$$

2.) $\mathrm{Im}(f)=\left[\frac{1}{2},8\right]$. Koristeći $\mathrm{Im}(\sin x)=[-1,1]$ i svojstvo „čuvanja nejednakosti“ prilikom primjene strogo rastućih funkcija na svaku stranu nejednakosti imamo redom:

$$\begin{aligned} &-1\le \sin(2\cdot x)\le 1, \quad /\cdot 2 \\ &-2\le 2\cdot\sin(2\cdot x)\le 2, \quad /+1 \\ &-1\le 2\cdot\sin(2\cdot x)+1\le 3, \quad /2^{\wedge} \\ &2^{-1}\le 2^{2\cdot\sin(2\cdot x)+1}\le 2^3, \\ &\frac{1}{2}\le f(x)\le 8,\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Odatle izravno slijedi

$$\mathrm{Im}(f)=\left[\frac{1}{2},8\right].$$

Napomena: Zadatak je riješen uz pretpostavku da je

$$2\sin 2x+1=2\cdot\sin(2\cdot x)+1.$$

Međutim, ako je

$$2\sin 2x + 1 = (2\cdot\sin 2)\cdot x + 1,$$

onda gornji „lanac" nejednakosti prelazi u:

$$\begin{aligned}
&-\infty < x < +\infty, \quad /\cdot 2\cdot\sin 2\\
&-\infty < 2\cdot\sin 2\cdot x < +\infty, \quad /+1\\
&-\infty < 2\cdot\sin 2\cdot x + 1 < +\infty, \quad /2^{\wedge}\\
&\lim_{x\to-\infty} 2^x < 2^{2\cdot\sin 2\cdot x+1} < \lim_{x\to+\infty} 2^x,\\
&\quad 0 < f(x) < +\infty,\ \forall x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

U tome je slučaju

$$\operatorname{Im}(f) = \langle 0, +\infty\rangle = \mathbb{R}^+.$$

35. 1.) 7^{n-1}. Prvi član niza je $a_1 = 1$. Količnik niza jednak je $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{1} = 7$. Prema tome, opći član niza jednak je:

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} = 1\cdot 7^{n-1} = 7^{n-1}.$$

2.) 240. Brojevi prozora tvore aritmetički niz kojemu su prvi član i razlika jednaki 2. Tražimo zbroj prvih 15 članova toga niza. Odmah imamo:

$$\begin{aligned}
&a_1 = d = 2 \Rightarrow\\
&a_{15} = a_1 + (15-1)\cdot d =\\
&\quad = 2 + 14\cdot 2 = 2 + 28 = 30,\\
&S_{15} = \frac{15}{2}\cdot(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}\cdot(2+30) =\\
&\quad = \frac{15}{2}\cdot 32 = 15\cdot 16 = 240.
\end{aligned}$$

36. 1.) $\frac{18}{(x+7)^2}$. Primjenom formule za derivaciju količnika dviju funkcija i tabličnih derivacija dobivamo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2\cdot x-4)'\cdot(x+7) - (2\cdot x-4)\cdot(x+7)'}{(x+7)^2} =\\
&= \frac{(2\cdot 1-0)\cdot(x+7) - (2\cdot x-4)\cdot(1+0)}{(x+7)^2} =\\
&= \frac{2\cdot(x+7) - (2\cdot x-4)}{(x+7)^2} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot x + 14 - 2 \cdot x + 4}{(x+7)^2} =$$
$$= \frac{18}{(x+7)^2}.$$

2.) 0. Prema Fermatovu teoremu (iz diferencijalnoga računa) znamo da je vrijednost prve derivacije derivabilne funkcije u apscisi točke njezina lokalnoga ekstrema uvijek jednaka nuli. Točka (4, -3) je očito točka lokalnoga maksimuma zadane funkcije, pa prema referenciranom teoremu odmah slijedi:

$$f'(4) = 0.$$

37. 1.) $\approx 56^\circ 48'$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su kutovi trokuta označeni tako da za njihove mjere vrijedi nejednakost $\alpha \le \beta \le \gamma$, kao i da se nasuprot kuta mjere α nalazi stranica duljine a, nasuprot kuta mjere β stranica duljine b, te nasuprot kuta mjere γ stranica duljine c.

Znamo da se nasuprot kuta najveće mjere nalazi najdulja stranica trokuta, a nasuprot kuta najmanje mjere najkraća stranica trokuta. Uz gore uvedene oznake, a prema teoremu o sinusima, vrijedi:

$$\sin 100^\circ : \sin \alpha = c : a,$$
$$\sin 100^\circ : \sin \alpha = 5 : 2,$$
$$2 \cdot \sin 100^\circ = 5 \cdot \sin \alpha,$$
$$\sin \alpha = \frac{2}{5} \cdot \sin 100^\circ,$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{5} \cdot \sin 100^\circ\right) \approx 0.40489592 \text{ rad.} \approx 23^\circ 12'.$$

(Kut čija je mjera u intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ i čiji je sinus jednak $\frac{2}{5} \cdot \sin 100^\circ$ zanemarujemo jer bismo u suprotnom dobili da je zbroj mjera dvaju kutova trokuta strogo veći od 180°, što je nemoguće.) Tako konačno dobivamo da je tražena mjera kuta nasuprot treće stranice (tj. mjera kuta β) jednaka:

$$\beta \approx 180^\circ - (100^\circ + \alpha) =$$
$$= 180^\circ - (100^\circ + 23^\circ 12') =$$
$$= 180^\circ - 123^\circ 12' = 56^\circ 48'.$$

2.) ≈ 130.1. Radi određenosti, neka su A i B krajevi solarnoga panela označeni tako da je A kraj koji se nalazi na krovu, C kraj oslonca koji se nalazi na krovu i D projekcija vrha oslonca na horizontalu mjere.

Uočimo najprije pravokutan trokut ADB. U tom trokutu znamo dva podatka: mjera kuta $\angle BAD$ iznosi $\beta = 58°$ i duljina hipotenuze AB iznosi 240 cm.

Sad uočimo pravokutan trokut ACD. U tom trokutu znamo:

$$\angle CAD = \alpha = 30^\circ.$$

Zbog toga su:

$$\begin{aligned}
&\angle DAC = 90^\circ - \alpha,\\
&\angle ACB = 180^\circ - \angle DAC =\\
&\qquad = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) =\\
&\qquad = 180^\circ - 90^\circ + \alpha =\\
&\qquad = 90^\circ + \alpha.
\end{aligned}$$

Preostaje uočiti trokut CBA. U tom trokutu znamo tri podatka:

$$\begin{aligned}
&|\overline{AB}| = 240 \text{ cm},\\
&\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \beta - \alpha,\\
&\angle ACB = 90^\circ - \alpha.
\end{aligned}$$

Primjenom teorema o sinusima računamo traženu duljinu:

$$\begin{aligned}
&\frac{|\overline{BC}|}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin(90^\circ+\alpha)},\\
&|\overline{BC}| = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)} \cdot |\overline{AB}| =\\
&\qquad = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin 90^\circ \cos\alpha + \cos 90^\circ \sin\alpha} \cdot |\overline{AB}| =\\
&\qquad = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha} \cdot |\overline{AB}| =\\
&\qquad = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} \cdot |\overline{AB}| =\\
&\qquad = \frac{\sin(58^\circ - 30^\circ)}{\cos 30^\circ} \cdot 240 =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin 28^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot 240 \approx \\
&\approx 130.10377591 \approx 130.1 \text{ cm.}
\end{aligned}
$$

38. 1.) ≈ 4.03. Primjenom teorema o kosinusima dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{B_1 B_2}\right| &= \sqrt{\left|\overline{LB_1}\right|^2 + \left|\overline{LB_2}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overline{LB_1}\right| \cdot \left|\overline{LB_2}\right| \cdot \cos \angle B_2 L B_1} \cdot 1.852 = \\
&= \sqrt{2.4^2 + 1.5^2 - 2 \cdot 2.4 \cdot 1.5 \cdot \cos 63^\circ} \cdot 1.852 \approx \\
&\approx 4.03262885 \approx 4.03 \text{ km.}
\end{aligned}
$$

2.) 1. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x)+1}{g(x+1)-g(x)} - g(2 \cdot x) + 2 \cdot h(x) = \\
&= \frac{8 \cdot x^3 + 1}{(x+1)^2 - x^2} - (2 \cdot x)^2 + 2 \cdot x = \\
&= \frac{(2 \cdot x)^3 + 1^3}{x^2 + 2 \cdot x + 1 - x^2} - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x = \\
&= \frac{(2 \cdot x + 1) \cdot \left(4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1\right)}{2 \cdot x + 1} - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x = \\
&= 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

39. 1.) $k \in \left\langle \frac{1 - 2 \cdot \sqrt{2}}{7}, \frac{1 + 2 \cdot \sqrt{2}}{7} \right\rangle \setminus \{0\}$. Vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) mora biti različit od nule, pa dobivamo uvjet:

$$k \neq 0.$$

Diskriminanta pripadne kvadratne funkcije mora biti strogo pozitivna, što daje uvjet:

$$
\begin{aligned}
&(1 - 3 \cdot k)^2 - 4 \cdot (2 \cdot k) \cdot (2 \cdot k - 1) > 0, \\
&1 - 6 \cdot k + 9 \cdot k^2 - 16 \cdot k^2 + 8 \cdot k > 0, \\
&-7 \cdot k^2 + 2 \cdot k + 1 > 0, \quad / : (-1) \\
&7 \cdot k^2 - 2 \cdot k - 1 < 0.
\end{aligned}
$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$7 \cdot k^2 - 2 \cdot k - 1 = 0$$

su

$$k_1=\frac{1-2\cdot\sqrt{2}}{7},\ k_2=\frac{1+2\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

Zbog toga je skup svih rješenja nejednadžbe $7\cdot k^2-2\cdot k-1<0$ interval

$$\left\langle\frac{1-2\cdot\sqrt{2}}{7},\frac{1+2\cdot\sqrt{2}}{7}\right\rangle.$$

Budući da 0 pripada tom intervalu, moramo je izostaviti iz skupa svih mogućih vrijednosti. Zbog toga je rješenje zadatka

$$k\in\left\langle\frac{1-2\cdot\sqrt{2}}{7},\frac{1+2\cdot\sqrt{2}}{7}\right\rangle\backslash\{0\}.$$

2.) $3\cdot x+y-3=0$ ili $y=(-3)\cdot x+3$ ili $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$. **Vidjeti sliku 2.** Zapišimo najprije jednadžbu kružnice u kanonskom obliku. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&\left(x^2-2\cdot x\right)+y^2-8=0,\\&(x-1)^2-1+(y-0)^2-8=0,\\&(x-1)^2+(y-0)^2=9.\end{aligned}$$

Odatle očitamo da je središte kružnice točka $S=(1,\ 0)$.

Implicitna jednadžba traženoga pravca ima oblik:

$$3\cdot x+y+C=0,$$

pri čemu je $C\in\mathbb{R}$ konstanta. Taj pravac mora prolaziti točkom S, što znači da koordinate točke S moraju zadovoljavati njegovu jednadžbu. Uvrštavanjem $x=1$ i $y=0$ u tu jednadžbu dobijemo:

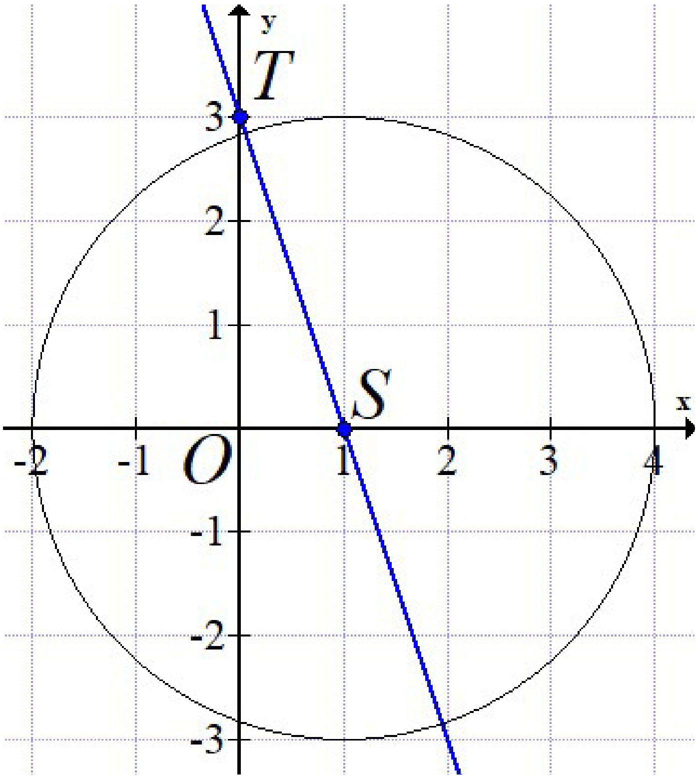
$$\begin{aligned}&3\cdot 1+0+C=0,\\&C+3=0,\\&C=-3.\end{aligned}$$

Dakle, traženi pravac je

$$\begin{aligned}&3\cdot x+y-3=0,\\&3\cdot x+y=3,\quad /:3\end{aligned}$$

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1.$$

Njegovo sjecište s osi apscisa je točka S, dok je sjecište s osi ordinata točka T = (0, 3). Ucrtamo navedene dvije točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo pravcem. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

40. $728\cdot\pi\approx 2287.1\text{ cm}^3$ ili $\frac{1256}{7}\cdot\pi\approx 563.7\text{ cm}^3$. Duljinu druge katete odredimo primjenom Pitagorina teorema:

$$b=\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{625-49}=\sqrt{576}=24\text{ cm}.$$

Rotacijom zadanoga trokuta oko osi **koja ne siječe zadani trokut** i udaljena je 2 cm od netom izračunate katete nastaje rotacijsko tijelo čiji je volumen jednak razlici volumena krnjega stošca i volumena valjka. Odredimo osnovne veličine svakoga od tih dvaju rotacijskih tijela.

Polumjer veće osnovke krnjega stošca jednak je 7 + 2 = 9 cm. Polumjer manje osnovke krnjega stošca jednak je 2 cm. Visina krnjega stošca jednaka je 24 cm.

Polumjer osnovke valjka jednak je 2 cm. Visina valjka jednaka je 24 cm.

Tako zaključujemo da je traženi volumen jednak

$$\begin{aligned}
V &= V_s - V_v = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 24 \cdot \left(9^2 + 9 \cdot 2 + 2^2\right) - 2^2 \cdot \pi \cdot 24 = \\
&= 8 \cdot \pi \cdot (81 + 18 + 4) - 4 \cdot \pi \cdot 24 = \\
&= 8 \cdot \pi \cdot 103 - 96 \cdot \pi = \\
&= 824 \cdot \pi - 96 \cdot \pi = \\
&= 728 \cdot \pi \approx 2287.07945181 \approx 2287.1 \text{ cm}^3.
\end{aligned}$$

Rotacijom zadanoga trokuta oko osi **koja siječe zadani trokut** i udaljena je 2 cm od katete duljine 24 cm nastaje rotacijsko tijelo kojega možemo podijeliti u dva dijela. Prvi dio tvori uspravni kružni valjak iz kojega je „isječen“ uspravni kružni stožac. Drugi dio tvori krnji stožac iz kojega je „isječen“ uspravni kružni valjak. Odredimo osnovne veličine svakoga od tih dvaju rotacijskih tijela.

Uspravni kružni valjak koji tvori prvi dio ima polumjer osnovke jednak 2 cm i visinu 24 cm. Uspravni kružni stožac isječen iz toga valjka ima polumjer osnovke jednak 2 cm i visinu h_1. Tu visinu odredimo koristeći sličnost trokuta:

$$h_1 : 2 = 24 : 7.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
7 \cdot h_1 &= 2 \cdot 24, \\
7 \cdot h_1 &= 48, \quad / : 7 \\
h_1 &= \frac{48}{7} \text{ cm.}
\end{aligned}$$

Tako je volumen prvoga dijela jednak:

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_{valjka} - V_{stošca} = \\
&= 2^2 \cdot \pi \cdot 24 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot \frac{48}{7} = \\
&= 96 \cdot \pi - \frac{64}{7} \cdot \pi = \\
&= \frac{608}{7} \cdot \pi \text{ cm}^3.
\end{aligned}$$

Krnji stožac koji tvori drugi dio ima polumjer veće osnovke $7 - 2 = 5$ cm, polumjer manje osnovke 2 cm i visinu h_2. I tu visinu odredimo primjenom sličnosti trokutova:

$$h_2 : (5-2) = 24 : 7.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$7 \cdot h_1 = (5-2) \cdot 24,$$
$$7 \cdot h_1 = 3 \cdot 24,$$
$$h_1 = \frac{3 \cdot 24}{7} = \frac{72}{7} \text{ cm}.$$

Uspravni kružni valjak isječen iz toga krnjega stošca ima polumjer osnovke 2 cm i visinu $h_1 = \frac{72}{7}$ cm. Tako je volumen drugoga dijela jednak:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_{stošca} - V_{valjka} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{72}{7} \cdot \left(5^2 + 5 \cdot 2 + 2^2\right) - 2^2 \cdot \pi \cdot \frac{72}{7} = \\ &= \frac{72}{7} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (25 + 10 + 4) - 4\right) = \\ &= \frac{72}{7} \cdot \pi \cdot 9 = \\ &= \frac{648}{7} \cdot \pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Prema tome, traženi je volumen jednak:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \\ &= \frac{608}{7} \cdot \pi + \frac{648}{7} \cdot \pi = \\ &= \frac{1256}{7} \cdot \pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Napomena: Dokažimo da je volumen krnjega stošca kojemu su polumjer veće osnovke r_1, polumjer manje osnovke r_2 i visina h dan izrazom

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right).$$

Taj volumen dobijemo tako da od volumena stošca kojemu su polumjer osnovke r_1 i visina $h + h_1$ oduzmemo volumen stošca (tzv. „dopunjka“) kojemu su polumjer osnovke r_2 i visina h_1:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot (h + h_1) - \frac{1}{3} \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot h_1.$$

Visinu „dopunjka“ trebamo izraziti pomoću veličina kojima je zadan krnji stožac. U tu svrhu primijenimo sličnost trokuta. Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete $r_1 - r_2$ i h, te pravokutan trokut kojemu su katete r_2 i h_1. Ti trokutovi su slični (jer katete $r_1 - r_2$ i r_2 pripadaju usporednim pravcima, pa možemo primijeniti npr. teorem K – K), pa dobivamo razmjer:

$$(r_1 - r_2) : r_2 = h : h_1.$$

Iz toga je razmjera

$$\begin{aligned} &h_1 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot h, \quad / : (r_1 - r_2) \\ &h_1 = \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga izraza u izraz za volumen dobivamo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot (h + h_1) - \frac{1}{3} \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot h_1 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot \left(h + \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2} \right) - \frac{1}{3} \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(r_1^2 + \frac{r_1^2 \cdot r_2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^3}{r_1 - r_2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(\frac{r_1^2 \cdot (r_1 - r_2) + r_1^2 \cdot r_2 - r_2^3}{r_1 - r_2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(\frac{r_1^2 \cdot (r_1 - r_2) + r_1^2 \cdot r_2 - r_2^3}{r_1 - r_2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(\frac{r_1^3 - r_1^2 \cdot r + r_1^2 \cdot r_2 - r_2^3}{r_1 - r_2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left(\frac{(r_1 - r_2) \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)}{r_1 - r_2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač