TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	Matematika na državnoj maturi	rješenja probnoga ispita iz veljače 2024. (viša razina)

1. **C**. Koristeći formulu za rastav razlike kvadrata na faktore imamo redom:

$$1-9\cdot a^4=1^2-\left(3\cdot a^2\right)^2=$$
$$=\left(1-3\cdot a^2\right)\cdot\left(1+3\cdot a^2\right).$$

2. **D**. Imamo redom:

$$b^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1^3}{b^2}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1}{b^2}}.$$

3. **D**. Prema Vietèovim formulama, umnožak svih (točnije, obaju) rješenja jednadžbe navedene pod **A**. jednak je $\frac{-1}{17}$. Analogan umnožak svih rješenja jednadžbe navedene pod **B**. jednak je $\frac{1}{17}$, umnožak svih rješenja jednadžbe navedene pod **C**. jednak je $\frac{8}{17}$, a umnožak svih rješenja jednadžbe navedene pod **D.** jednak je $\frac{-8}{17}$. Dakle, tražena jednadžba je jednadžba navedene pod **D**.

4. **B**. Koristeći jednakost

$$\sqrt{a^2}=|a|,\ \forall a\in\mathbb{R},$$

imamo redom:

$$(x-7)^2=p,\qquad /\sqrt{\ }$$
$$\sqrt{(x-7)^2}=\sqrt{p},$$
$$|x-7|=\sqrt{p},$$
$$x-7=\sqrt{p}\ \text{ ili }\ x-1=-\sqrt{p},$$
$$x=\sqrt{p}+7\ \text{ ili }\ x=7-\sqrt{p}.$$

Dakle, jedno rješenje zadane jednadžbe je $x=\sqrt{p}+7$.

5. **C**. Neka su $ž$, b i c redom broj tulipana žute, bijele, odnosno crvene boje. Iz podataka u zadatku zaključujemo da postoji $k > 0$ takav da vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} ž &= 5 \cdot k, \\ b &= 7 \cdot k, \\ c &= 10 \cdot k. \end{aligned}$$

Ukupan broj posađenih tulipana jednak je zbroju $ž + b + c$. Taj zbroj mora biti jednak 396, pa dobivamo jednadžbu:

$$5 \cdot k + 7 \cdot k + 10 \cdot k = 396.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$\begin{aligned} &5 \cdot k + 7 \cdot k + 10 \cdot k = 396, \\ &22 \cdot k = 396, \quad / : 22 \\ &k = 18. \end{aligned}$$

Prema tome, traženi broj tulipana crvene boje jednak je

$$10 \cdot k = 10 \cdot 18 = 180.$$

6. **B**. Ukupan broj svih bombona u posudi jednak je

$$24 + 36 + 15 = 75.$$

Ukupan broj svih mogućih ishoda slučajnoga pokusa *izvlačenje jednoga bombona* jednak je ukupnom broju svih bombona. Taj je broj jednak 75.

Ukupan broj svih povoljnih ishoda promatranoga slučajnoga pokusa jednak je ukupnom broju svih bombona s okusom limuna. Taj je broj jednak 24.

Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka

$$\begin{aligned} p &= \frac{24}{75} = \\ &= \frac{8}{25} = \\ &= 0.32 = 32\%. \end{aligned}$$

7. **C**. Odredimo najprije jednadžbu zadanoga pravca (u eksplicitnom obliku). On prolazi točkama $(-2, 1)$ i $(4, 4)$. Zbog toga imamo:

$$
\begin{aligned}
p\ldots\ y-1&=\frac{4-1}{4-(-2)}\cdot(x-(-2)),\\
y&=\frac{3}{6}\cdot(x+2)+1,\\
y&=\frac{1}{2}\cdot x+1+1,\\
y&=\frac{1}{2}\cdot x+2.
\end{aligned}
$$

Za $x=-4$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{2}\cdot(-4)+2=\\
&=-2+2=\\
&=0,
\end{aligned}
$$

dok za $x=2$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{2}\cdot 2+2=\\
&=1+2=\\
&=3.
\end{aligned}
$$

Dakle, zadanom pravcu pripadaju i točke $(-4, 0)$ i $(2, 3)$.

8. A. Brojevi riješenih zadataka tvore strogo rastući aritmetički niz čiji je prvi član jednak 5, a razlika 3. Odredimo opći član toga niza (kao funkciju varijable x):

$$
\begin{aligned}
f(x)&=5+(x-1)\cdot 3=\\
&=5+3\cdot x-3=\\
&=3\cdot x+2.
\end{aligned}
$$

9. C. Zapišimo najprije jednadžbu zadanoga pravca u eksplicitnom obliku. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&5\cdot x-6\cdot y-7=0,\\
&-6\cdot y=-5\cdot x+7, \quad /:(-6)\\
&y=\frac{5}{6}\cdot x-\frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

Usporedni (paralelni) pravci imaju jednake koeficijente smjerova. Lako očitamo koeficijent smjera zadanoga pravca:

$$k_1 = \frac{5}{6}.$$

Od četiriju ponuđenih pravaca, taj koeficijent smjera ima pravac naveden pod **C.**

10. **A.** Iz pretpostavke da pravac prolazi I., II. i III. kvadrantom pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini zaključujemo da on s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvara šiljasti kut. Vrijednost njegova koeficijenta smjera jednaka je tangensu toga šiljastoga kuta. Tangens *svakoga* šiljastoga kuta je strogo pozitivan, pa zaključujemo da je i koeficijent smjera promatranoga pravca strogo pozitivan.

11. **D**. *Krajnja* točka zadanoga vektora dobiva se tako da se iz njegove *početne* točke pomaknemo za dvije jedinice duljine *udesno* (usporedno s osi apscisa), a potom iz točke u koju smo došli tim pomakom pomaknemo za tri jedinice duljine *nadolje* (usporedno s osi ordinata). Jedini od četiriju prikazanih vektora čija se krajnja točka dobije na opisani način je vektor prikazan na slici **D.** Doista, uočimo li da je početna točka vektora na toj slici (–1, 4), a krajnja (1, 1), onda lako zaključimo:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (1-(-1))\cdot\vec{i} + (1-4)\cdot\vec{j} = \\ &= 2\cdot\vec{i} - 3\cdot\vec{j}.\end{aligned}$$

12. **A.** U *svakomu* jednakostraničnomu trokutu ortocentar (sjecište visina), središte trokutu opisane kružnice, središte trokutu upisane kružnice i težište (sjecište težišnica) je ista točka.

13. **B**. Kosinus *bilo kojega* šiljastoga kuta pravokutnoga trokuta jednak je količniku duljine pripadne priležeće katete i duljine hipotenuze. Za kut φ sa slike duljina priležeće katete jednaka je x, duljina hipotenuze jednaka je z, pa je:

$$\cos\varphi = \frac{x}{z}.$$

14. **B**. Primjenom kosinusova teorema dobivamo:

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{3.9^2 + 5.2^2 - 2\cdot 3.9\cdot 5.2\cdot\cos\left(60^\circ 12'\right)} = \\ &= \sqrt{42.25 - 40.56\cdot\cos\left(60^\circ 12'\right)} \approx \\ &\approx 4.7 \text{ cm.}\end{aligned}$$

15. **B**. Primijenimo jednakost:

$$101 : 6 = 16 \text{ i ostatak } 5.$$

Zbog nje je

$$\frac{101\cdot\pi}{6}=16\cdot\pi+\frac{5}{6}\cdot\pi=$$
$$=8\cdot(2\cdot\pi)+\frac{5}{6}\cdot\pi.$$

To znači da namatanjem pozitivnoga dijela brojevnoga pravca od 0 do $\frac{101}{6}\cdot\pi$ namotamo ukupno 8 punih krugova i ostatak od $\frac{5}{6}\cdot\pi$ radijana. Odatle zaključujemo da su brojevima $\frac{101}{6}\cdot\pi$ i $\frac{5}{6}\cdot\pi$ pridružene iste točke na brojevnoj kružnici.

16. C. Traženu površinu dobit ćemo tako da razlici površine najvećega i srednjega kruga pribrojimo površinu najmanjega kruga:

$$P=6^2\cdot\pi-4^2\cdot\pi+1^2\cdot\pi=$$
$$=36\cdot\pi-16\cdot\pi+1\cdot\pi=$$
$$=21\cdot\pi\ \text{cm}^2.$$

17. A. Sve točke Gaussove ravnine pridružene kompleksnim brojevima za koje vrijedi jednakost $\operatorname{Re} z=3$ imaju prvu koordinatu jednaku 3. Naime, prva koordinata svake točke Gaussove ravnine jednaka je realnom dijelu kompleksnoga broja kojemu je pridružena ta točka. Od svih četiriju ponuđenih pravaca, jedino pravac prikazan pod **A.** ima svojstvo da je prva koordinata svake njegove točke jednaka 3. (Pravac prikazan pod **B.** ima svojstvo da je *druga* koordinata svake njegove točke jednaka 3, dok su na slikama **C.** i **D.** prikazane samo točke pridružene kompleksnim brojevima 3, odnosno $3\cdot i$, a ne sve točke Gaussove ravnine koje imaju zadano svojstvo.)

18. A. Prisjetimo se da je niz strogo padajući i geometrijski ako i samo ako je *količnik* svakoga člana (osim prvoga) i njegova neposrednoga prethodnika *konstanta strogo manja od* 1. Zbog toga u svakom pojedinom slučaju računamo količnik $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Dobivamo:

A. $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{8\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}{8\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n-(n-1)}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n-n+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{3}{5}<1.$

B. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n}{8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-(n-1)}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-n+1}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^1=\dfrac{5}{3}>1.$

C. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{8+\frac{3}{5}\cdot n}{8+\frac{3}{5}\cdot(n-1)}=\dfrac{8+\frac{3}{5}\cdot n}{8+\frac{3}{5}\cdot n-\frac{3}{5}}=\dfrac{8+\frac{3}{5}\cdot n}{\frac{37}{5}+\frac{3}{5}\cdot n}=\dfrac{40+3\cdot n}{37+3\cdot n}.$

D. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{8-\frac{5}{3}\cdot n}{8-\frac{5}{3}\cdot(n-1)}=\dfrac{8-\frac{5}{3}\cdot n}{8-\frac{5}{3}\cdot n+\frac{5}{3}}=\dfrac{8-\frac{5}{3}\cdot n}{\frac{29}{3}-\frac{5}{3}\cdot n}=\dfrac{24-5\cdot n}{29-5\cdot n}.$

Prema tome, niz čije je pravilo navedeno pod **A**. je strogo padajući geometrijski niz.

Napomena**: Iz gornjega postupka proizlazi da je niz čije je pravilo navedeno pod B. strogo rastući geometrijski niz.**
Nizovi čija su pravila navedena pod C. i D. su aritmetički nizovi.
Točnije, niz čije je pravilo navedeno pod C. je strogo rastući aritmetički niz čiji je prvi član jednak $\frac{43}{5}$, a razlika $\frac{3}{5}$.
Niz čije je pravilo navedeno pod D. je strogo padajući aritmetički niz čiji je prvi član $\frac{19}{3}$, a razlika $\frac{-5}{3}$.

19. **D.** Primijetimo da su funkcije

$$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=x \ \text{ i}$$
$$f_2:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\quad f_2(x)=\operatorname{tg} x$$

neparne funkcije, dok je funkcija

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_3(x)=\cos x$$

parna. Znamo da:

- zbroj dviju neparnih funkcija je neparna funkcija;
- zbroj neparne i parne funkcije nije ni parna, ni neparna funkcija;
- umnožak neparne i parne funkcije je neparna funkcija;
- umnožak dviju neparnih funkcija parna funkcija.

Funkcija navedena pod **A.** je zbroj neparne funkcije f_1 i parne funkcije f_3. Ta funkcija nije ni parna, ni neparna.

Funkcija navedena pod **B.** je zbroj dviju neparnih funkcija (f_1 i f_2). Ta funkcija je neparna.

Funkcija navedena pod **C.** je umnožak neparne funkcije f_1 i parne funkcije f_3. Ta funkcija je neparna.

Funkcija navedena pod **D**. je umnožak dviju neparnih funkcija (f_1 i f_2). Ta funkcija je parna.

Napomena: U gornjem postupku korištena je pretpostavka da su funkcije f_1, f_2 i f_3 definirane na svojim prirodnim domenama. Ona je nužna za ispravno rješavanje zadatka. Na temelju formulacije zadatka nije moguće utvrditi je li ta pretpostavka točna.

20. **B.** Koristeći osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{3}\right)' - \left(x^2\right)' = \\ &= 0 - 2 \cdot x^{2-1} = \\ &= -2 \cdot x. \end{aligned}$$

21. **B**. Traženi nagib jednak je prvoj derivaciji zadane funkcije u točki $x = 2$. Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^3} = x^{-3}, \\ f'(x) &= (-3) \cdot x^{-3-1} = \\ &= (-3) \cdot x^{-4} = \\ &= (-3) \cdot \frac{1}{x^4} = \\ &= \frac{-3}{x^4}, \\ f'(2) &= \frac{-3}{2^4} = \frac{-3}{16}. \end{aligned}$$

22. **B.** Označimo s D diralište tangente i kružnice, s A vrh kuta čija je (zadana) mjera 28° i s B vrh kuta čiju mjeru tražimo. Trokut DSA je jednakokračan trokut kojemu

je osnovica dužina $\overline{DA}$. Zbog toga su:

$$\angle ADS = \angle SAD = 28^\circ,$$
$$\angle DSB = 28^\circ + 28^\circ = 56^\circ.$$

Naime, $\angle DSB$ je vanjski kut trokuta DSA, pa je njegova mjera jednaka zbroju onih unutarnjih kutova toga trokuta koji mu nisu susjedni, a to su kutovi $\angle ADS$ i $\angle SAD$.

Preostaje prisjetiti se da je tangenta povučena u točki D okomita na polumjer kružnice kojemu je jedan kraj točka D (a drugi kraj točka S). To znači da je trokut SDB pravokutan s pravim kutom kod vrha D. Zbroj mjera njegovih šiljastih kutova mora biti jednak 90°. Jedan od tih kutova je upravo kut $\angle DBS$ čiju mjeru tražimo, a drugi je kut $\angle DSB$. Tako je:

$$\alpha = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ.$$

23. C. Uočimo trokut AGH. U tome trokutu znamo duljine svih triju stranica:

$$\left|\overline{AG}\right| = (\text{duljina prostorne dijagonale kocke}) = a\cdot\sqrt{3},$$
$$\left|\overline{GH}\right| = (\text{duljina brida kocke}) = a,$$
$$\left|\overline{AH}\right| = (\text{duljina plošne dijagonale kocke}) = a\cdot\sqrt{2}.$$

Budući da vrijedi jednakost

$$\left(a\cdot\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + \left(a\cdot\sqrt{2}\right)^2,\ \forall a\in\mathbb{R},$$

zaključujemo da je ΔAHG pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha H. Zbog toga je udaljenost vrha A od pravca GH jednaka duljini dužine $\overline{AH}$, odnosno $\left|\overline{AH}\right| = a\cdot\sqrt{2}.$

24. D. Tijelo T_1 je uspravni kružni valjak, dok je tijelo T_2 kosi kružni valjak. Oba tijela imaju jednake površine osnovaka i jednake visine, pa imaju jednake volumene. Dakle, vrijedi jednakost:

$$V_1 = V_2.$$

Međutim, njihova oplošja nisu jednaka. U tu svrhu dovoljno je usporediti površine njihovih plašteva. Te su površine jednake umnošku opsega osnovke valjka i duljine najdulje izvodnice valjka. Oba valjka imaju jednake polumjere osnovaka, pa imaju i jednake opsege osnovaka. Zbog toga trebamo usporediti duljine najduljih izvodnica tih tijela.

Kod *svakoga* uspravnoga kružnoga valjka sve izvodnice imaju jednake duljine. Duljina svake izvodnice jednaka je visini valjka.

Kod kosoga kružnoga valjka visina valjka, polumjer osnovke valjka i najdulja izvodnica valjka tvore pravokutan trokut. Duljina najdulje izvodnice valjka je duljina hipotenuze toga trokuta. Zbog toga je duljina najdulje izvodnice kosoga valjka strogo veća od duljine visine toga valjka.

Prema tome, tijelo T_2 ima najdulju izvodnicu dulju od visine, pa ima i veće oplošje u odnosu na T_1. Dakle, vrijedi nejednakost:

$$O_1 < O_2.$$

25. $x \in \left[-2, \frac{5}{2}\right\rangle$. Imamo redom:

$$\begin{cases} 3 \cdot x - 2 \geq -8, \\ x - 1 < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x \geq -8 + 2, \\ x < \frac{3}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x \geq -6, \\ x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x \in \left[-2, \frac{5}{2}\right\rangle.$$

Dakle, skup svih rješenja zadanoga sustava nejednadžbi je $\left[-2, \frac{5}{2}\right\rangle$.

26. $1 + \sqrt{x}$. Primijetimo da nužno vrijede relacije

$$x \geq 0,$$
$$x \neq 1.$$

Ako ne vrijedi barem jedna od tih relacija, nazivnik nije definiran. Zbog toga smijemo primijeniti jednakost:

$$x=\left(\sqrt{x}\right)^2,\ \forall x\geq 0.$$

Koristeći tu jednakost i formulu za razliku kvadrata imamo redom:

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}&=\frac{1^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{1-\sqrt{x}}=\\&=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}}=\\&=1+\sqrt{x}.\end{aligned}$$

27. $\left|\overline{CE}\right|=5,\ \left|\overline{DE}\right|=6.$ Uočimo da su trokutovi ADE i ABC slični prema teoremu $K-K$ (imaju zajednički unutrašnji kut kod vrha A, dok su mjere kutova $\angle ADE$ i $\angle ABC$ jednake zbog pretpostavke o usporednosti pravaca BC i DE). Zbog toga primjenom Talesova teorema dobivamo da vrijede razmjeri:

$$\left|\overline{AD}\right|:\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AE}\right|:\left|\overline{AC}\right|=\left|\overline{DE}\right|:\left|\overline{BC}\right|.$$

Budući da je

$$\begin{aligned}\left|\overline{AB}\right|&=\left|\overline{AD}\right|+\left|\overline{BD}\right|=\\&=8+4=\\&=12,\end{aligned}$$

slijedi:

$$8:12=10:\left(10+\left|\overline{CE}\right|\right)=\left|\overline{DE}\right|:9.$$

Riješimo ih na uobičajen način:

$$\begin{cases}8:12=10:\left(10+\left|\overline{CE}\right|\right),\\8:12=\left|\overline{DE}\right|:9\end{cases}$$

$$\begin{cases}8\cdot\left(10+\left|\overline{CE}\right|\right)=12\cdot 10,\\12\cdot\left|\overline{DE}\right|=9\cdot 8\end{cases}$$

$$\begin{cases} 10+\left|\overline{CE}\right| = \dfrac{12\cdot 10}{8}, \\ \left|\overline{DE}\right| = \dfrac{9\cdot 8}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10+\left|\overline{CE}\right| = 15, \\ \left|\overline{DE}\right| = 6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\overline{CE}\right| = 5, \\ \left|\overline{DE}\right| = 6. \end{cases}$$

28. $z = 2\cdot\sqrt{2}\cdot \text{cis}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\pi\right) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{3}{4}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{3}{4}\cdot\pi\right)\right)$. Broju z pridružena točka Gaussove ravnine je

$$Z = (-2, 2).$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{(-2)^2+2^2} = \\ &= \sqrt{4+4} = \\ &= \sqrt{2\cdot 4} = \\ &= 2\cdot\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi = \text{Arg}(z) &= \pi - \text{arctg}\left|\frac{-2}{2}\right| = \\ &= \pi - \text{arctg } 1 = \\ &= \pi - \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{3}{4}\cdot\pi \text{ rad.} \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} z &= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) = \\ &= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\right). \end{aligned}$$

29. 1.) $3.647\cdot 10^6$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}3647 \text{ km} &= 3647 \cdot 10^3 \text{ m} = \\ &= \left(3.647 \cdot 10^3\right) \cdot 10^3 \text{ m} = \\ &= 3.647 \cdot \left(10^3 \cdot 10^3\right) \text{ m} = \\ &= 3.647 \cdot 10^{3+3} \text{ m} = \\ &= 3.647 \cdot 10^6 \text{ m}.\end{aligned}$$

2.) 7^{2022}. Imamo redom:

$$\begin{aligned}7^{2023} - 6 \cdot 49^{1011} &= 7^{2023} - 6 \cdot \left(7^2\right)^{1011} = \\ &= 7^{2023} - 6 \cdot 7^{2 \cdot 1011} = \\ &= 7^{2023} - 6 \cdot 7^{2022} = \\ &= 7^{2022} \cdot \left(7^1 - 6\right) = \\ &= 7^{2022} \cdot (7 - 6) = \\ &= 7^{2022} \cdot 1 = \\ &= 7^{2022}.\end{aligned}$$

30. 1.) $a^3 - 125$. Primjenom formule za rastav zbroja kubova na faktore dobivamo:

$$\begin{aligned}\left(25 + 5 \cdot a + a^2\right) \cdot (a-5) &= (a-5) \cdot \left(a^2 + 5 \cdot a + 25\right) = \\ &= (a-5) \cdot \left(a^2 + 5 \cdot a + 5^2\right) = \\ &= a^3 - 5^3 = \\ &= a^3 - 125.\end{aligned}$$

2.) $\frac{-3}{b}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}\frac{9}{b^2 - 3 \cdot b} - \frac{3}{b-3} &= \frac{9}{b \cdot (b-3)} - \frac{3}{b-3} = \\ &= \frac{9 - 3 \cdot b}{b \cdot (b-3)} = \\ &= \frac{(-3) \cdot (b-3)}{b \cdot (b-3)} = \\ &= \frac{-3}{b}.\end{aligned}$$

31. Odredimo najprije ukupan broj bodova. Označimo taj broj s *N*. Na temelju zadanih podataka postavljamo jednadžbu:

$$\frac{68}{100} \cdot N = 102.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned} \frac{68}{100} \cdot N &= 102, \qquad / \cdot \frac{100}{68} \\ N &= \frac{102}{68} \cdot 100 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 100 = \\ &= 150. \end{aligned}$$

Dakle, ukupan broj bodova koje je bilo moguće ostvariti jednak je 150.

1.) **21.** Tražena je vrijednost jednaka:

$$\begin{aligned} \Delta N &= (82\% - 68\%) \cdot 150 = \\ &= 14\% \cdot 150 = \\ &= \frac{14}{100} \cdot 150 = \\ &= 21. \end{aligned}$$

Dakle, Tinu je nedostajao 21 bod.

2.) **44.** Neka je x broj zadataka u kojima je Tin ostvario dva boda, a y broj zadataka u kojima je Tin ostvario jedan bod. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= 58, \\ 2 \cdot x + y &= 102. \end{aligned}$$

Ukupan broj zadataka koje je Tin točno riješio jednak je $x + y$. S druge strane, taj je broj jednak 58 (podatak iz zadatka). Otuda proizlazi prva jednadžba sustava.

Ukupan broj bodova koje je Tin ostvario rješavanjem ukupno x zadataka od kojih svaki donosi 2 boda jednak je $x \cdot 2 = 2 \cdot x$. Ukupan broj bodova koje je Tin ostvario rješavanjem y zadataka od kojih svaki donosi 1 bod jednak je $y \cdot 1 = y$. Zbog toga je ukupan broj bodova koje je Tin ostvario jednak $2 \cdot x + y$. U zadatku je navedeno da je taj broj jednak 102, pa otuda proizlazi druga jednadžba sustava.

Oduzimanjem prve jednadžbe sustava od njegove druge jednadžbe odmah dobivamo traženi broj zadataka:

$$2 \cdot x - x = 102 - 58,$$
$$x = 44.$$

32. 1.) **5.** Tražimo mod zadanoga niza izmjerenih temperatura. U tu svrhu sastavimo sljedeću tablicu.

Temperatura (°C)	*Ukupan broj sati*
3	1
5	5
6	4
7	2
8	2
10	2
11	3
12	2
13	2
14	1
Ukupno:	24

Lako vidimo da je vrijednost koja se u nizu izmjerenih temperatura pojavljuje najviše puta jednaka 5 (i ta se vrijednost pojavljuje pet puta). Sve ostale izmjerene vrijednosti pojavljuju se u nizu strogo manje od pet puta. Prema tome, tražena je vrijednost jednaka 5°C.

2.) **10.** Prva temperatura koja je viša od 8°C je 10°C. Zbog toga je tražena vrijednost jednaka apsolutnoj frekvenciji *više od* modaliteta 10°C, a ona je jednaka zbroju apsolutnih frekvencija svih temperatura koje su jednake ili više od 10°C:

$$f_6^{>} = 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 10.$$

33. 1.) **Vidjeti sliku 1.** Uočimo da je f polinom 2. stupnja, što znači da je graf te funkcije parabola. Odredimo njezino tjeme i njezina sjecišta s osi apscisa.

Tjeme parabole je točka

$$T = \left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1} \right) =$$
$$= (1, -4).$$

Apscise sjecišta parabole s osi apscisa dobijemo rješavanjem jednadžbe

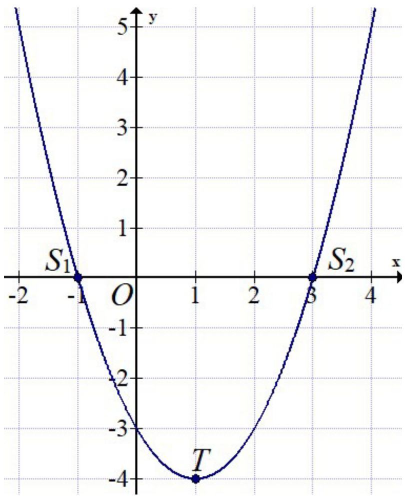
$$x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0.$$

Imamo:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \\ &= \frac{2 \pm 4}{2}, \\ x_1 &= \frac{2+4}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1. \end{aligned}$$

Dakle, sjecišta grafa zadane funkcije s osi apscisa su točke $S_1 = (-1, 0)$ i $S_2 = (3, 0)$.

Preostaje ucrtati sve tri dobivene točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini i spojiti ih parabolom. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

2.) $x \in [-1, 3]$. Umnožak na lijevoj strani nejednadžbe je nenegativan ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$f(x) \le 0.$$

Polinom 2. stupnja čiji je vodeći koeficijent strogo pozitivan – a zadana funkcija pripada skupu takvih polinoma – poprima nepozitivne vrijednosti (samo) na segmentu određenom nultočkama toga polinoma. Dakle, zadana funkcija je nepozitivna ako i samo ako je

$$x \in [-1, 3].$$

34. 1.) $D(f)=\langle -3,+\infty\rangle$. Zadana je funkcija definirana kad god je logaritmand (izraz pod logaritmom) strogo pozitivan. Tako iz nejednadžbe

$$x+3>0$$

odmah slijedi

$$x>-3.$$

Skup svih realnih brojeva strogo većih od -3 jednak je intervalu $\langle -3,+\infty\rangle$. Prema tome,

$$D(f)=\langle -3,+\infty\rangle.$$

2.) $x=-2$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\log(x+3)=0,\\
&x+3=10^0,\\
&x=10^0-3=\\
&\quad=1-3=\\
&\quad=-2.
\end{aligned}$$

35. 1.) $x=\log_6 7\approx 1.086$. Zamijenimo:

$$t:=6^x.$$

Uočimo da je

$$t>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}
36^x&=\left(6^2\right)^x=\\
&=\left(6^x\right)^2=\\
&=t^2.
\end{aligned}$$

Tim zamjenama dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2-5\cdot t-14=0.$$

Jedino njezino strogo pozitivno rješenje je

$$t=7.$$

Tako sada iz jednadžbe

$$6^x = 7$$

slijedi

$$\begin{aligned} x &= \log_6 7 = \\ &= \frac{\log 7}{\log 6} \approx \\ &\approx 1.086. \end{aligned}$$

2.) $8 \cdot a$. Koristeći osnovna svojstva logaritamske funkcije imamo redom:

$$\begin{aligned} \log_5 a^4 \cdot \log_a 25^a &= 4 \cdot (\log_5 a) \cdot a \cdot \log_a 25 = \\ &= (4 \cdot a) \cdot (\log_5 a \cdot \log_a 25) = \\ &= (4 \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{\log_a 5} \cdot \log_a 25 \right) = \\ &= (4 \cdot a) \cdot \frac{\log_a 25}{\log_a 5} = \\ &= (4 \cdot a) \cdot \log_5 25 = \\ &= (4 \cdot a) \cdot \log_5 (5^2) = \\ &= 4 \cdot a \cdot 2 = \\ &= 8 \cdot a. \end{aligned}$$

36. 1.) 74 bpm. Neka su f, ω i P redom tražena frekvencija rada srca psa, kružna frekvencija zadane harmonijske funkcije i temeljni period te funkcije. Tada vrijede jednakosti:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{P},$$
$$f = \frac{1}{P}.$$

Dijeljenjem prve jednakosti s $2 \cdot \pi$ dobivamo:

$$\frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{P}.$$

Desna strana te jednakosti i desna strana druge jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i lijeve strane. Uvrštavanjem $\omega = 148 \cdot \pi$ slijedi:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\cdot\pi} = \\ &= \frac{148\cdot\pi}{2\cdot\pi} = \\ &= 74 \text{ bpm.} \end{aligned}$$

2.) $74-134$ **mm žive.** Odredimo sliku zadane funkcije. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &-1 \le \sin(148\cdot\pi\cdot t) \le 1, \quad /\cdot 30 \\ &-30 \le 30\cdot\sin(148\cdot\pi\cdot t) \le 30, \quad /+104 \\ &-30+104 \le 30\cdot\sin(148\cdot\pi\cdot t)+104 \le 30+104, \\ &74 \le T(t) \le 134, \ \forall t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je slika zadane funkcije segment $[74,134]$. Dakle, vrijednosti krvnoga tlaka psa kreću se u granicama od 74 mm žive do 134 mm žive.

37. 1.) 12. Neka su r, v i s redom polumjer osnovke, visina, odnosno izvodnica kape. Tada vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} &r = 5, \\ &r\cdot\pi\cdot s = 65\cdot\pi, \\ &v = \sqrt{s^2 - r^2} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu i dijeljenjem dobivenoga izraza s $5\cdot\pi$ dobiva se

$$s = 13.$$

Uvrštavanjem te jednakosti i prve jednakosti u treću jednakost slijedi:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{13^2 - 5^2} = \\ &= \sqrt{169-25} = \\ &= \sqrt{144} = \\ &= 12 \text{ cm.} \end{aligned}$$

2.) $\sqrt[3]{\frac{675}{\pi}} \approx 6$ **cm.** Neka je R traženi polumjer. Iz jednadžbe

$$\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi = 900$$

slijedi

$$R^3 = 900 \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi},$$
$$R^3 = \frac{2700}{4 \cdot \pi},$$
$$R^3 = \frac{675}{\pi},$$
$$R = \sqrt[3]{\frac{675}{\pi}} \approx 5.98942 \approx 6 \text{ cm}.$$

38. 1.) Nužan i dovoljan uvjet da kružnica sa središtem u točki $S = (x_S, y_S)$ i polumjerom r dodiruje obje koordinatne osi glasi:

$$|x_S| = |y_S| = r.$$

Zadanu jednadžbu kružnice transformirajmo ovako:

$$x^2 + y^2 + p \cdot x - p \cdot y + 0.25 \cdot p^2 = 0,$$
$$(x^2 + p \cdot x) + (y^2 - p \cdot y) + \frac{1}{4} \cdot p^2 = 0,$$
$$\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + \left(\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + \frac{p^2}{4} = 0,$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} = 0,$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} = 0,$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \left(\frac{-p}{2}\right)\right)^2 - \frac{p^2}{4} = 0,$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \left(\frac{-p}{2}\right)\right)^2 = \frac{p^2}{4},$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \left(\frac{-p}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Odatle očitamo:

$$x_S = \frac{p}{2},$$
$$y_S = \frac{-p}{2},$$
$$r = \frac{|p|}{2}.$$

Sada se lako vidi da je

$$\begin{aligned}
&|x_S| = \frac{|p|}{2},\\
&|y_S| = \frac{|-p|}{2} = \frac{|p|}{2},\\
&r = \frac{|p|}{2}.
\end{aligned}$$

Desne strane svih triju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i lijeve strane. To daje

$$|x_S| = |y_S| = r,$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena: U postupku rješavanja zadatka korištene su jednakosti:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a^2} = |a|,\\ |-a| = |a|,\end{aligned}\right\}\forall a \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, kružnica dodiruje os apscisa ako i samo ako je apsolutna vrijednost prve koordinate njezina središta jednaka polumjeru kružnice. Kružnica dodiruje os ordinata ako i samo ako je apsolutna vrijednost druge koordinate njezina središta jednaka polumjeru kružnice. Iz tih dviju tvrdnji izravno slijedi nužan i dovoljan uvjet kojega je trebalo provjeriti.

2.) $\alpha \approx 1.39094 \text{ rad.} \approx 79^\circ 41' 43''$ ili $\beta \approx 1.75065 \text{ rad.} \approx 100^\circ 18' 17''$. Odredimo najprije vektor $\overrightarrow{BC}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0},\\
&\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} =\\
&\quad = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} =\\
&\quad = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} =\\
&\quad = -\vec{i} + 6\cdot\vec{j} - \left(3\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j}\right) =\\
&\quad = -\vec{i} + 6\cdot\vec{j} - 3\cdot\vec{i} - 4\cdot\vec{j} =\\
&\quad = -4\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}.
\end{aligned}$$

Unutrašnji kut paralelograma odredimo koristeći skalarni umnožak vektora. Neka je β mjera unutrašnjega kuta paralelograma pri vrhu B. Tada je:

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\\ &=\frac{\left(3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(-4\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}\right)}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2}}=\\ &=\frac{3\cdot(-4)+4\cdot 2}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{16+4}}=\\ &=\frac{-12+8}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{20}}=\\ &=\frac{-4}{5\cdot 2\cdot\sqrt{5}}=\\ &=\frac{-2}{25}\cdot\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Budući da je dobivena vrijednost kosinusa strogo negativna, zaključujemo da je β tupi kut. Odredimo njegovu mjeru:

$$\begin{aligned}\beta &= \pi-\arccos\left(\frac{2}{25}\cdot\sqrt{5}\right)\approx\\ &\approx 1.75065 \text{ rad.}\approx 100^\circ 18' 17''.\end{aligned}$$

Kut pri vrhu A ili vrhu C (vrhovima susjednima vrhu B) je suplementaran kutu pri vrhu B. Označimo taj kut s α. Njegova je mjera jednaka:

$$\alpha=\arccos\left(\frac{2}{25}\cdot\sqrt{5}\right)\approx 1.39094 \text{ rad.}\approx 79^\circ 41' 43''.$$

Dakle, zadatak ima točno dva rješenja:

$$\alpha\approx 1.39094 \text{ rad.}\approx 79^\circ 41' 43'' \text{ ili } \beta\approx 1.75065 \text{ rad.}\approx 100^\circ 18' 17''.$$

39. 1.) $(x,\ y) = (5,\ 1.25)$. Iz zahtjeva da $x, 8.5$ i $4\cdot y+7$ budu tri uzastopna člana aritmetičkoga niza dobivamo jednadžbu:

$$\frac{x+(4\cdot y+7)}{2}=8.5.$$

Iz zahtjeva da $x, 2.5$ i y budu tri uzastopna člana geometrijskoga niza dobivamo jednadžbu:

$$x \cdot y = 2.5^2.$$

Te jednadžbe – u sređenom obliku – tvore sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x + 4 \cdot y = 10, \\ x \cdot y = 6.25. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav na uobičajen način. Iz prve jednadžbe izrazimo nepoznanicu x:

$$x = 10 - 4 \cdot y.$$

Uvrstimo tu jednakost u drugu jednadžbu sustava, pa dobijemo redom:

$$\begin{aligned}
&(10 - 4 \cdot y) \cdot y = 6.25, \\
&-4 \cdot y^2 + 10 \cdot y - 6.25 = 0, \quad / : (-1) \\
&4 \cdot y^2 - 10 \cdot y + 6.25 = 0, \\
&(2 \cdot y)^2 - 2 \cdot (2 \cdot y) \cdot 2.5 + 2.5^2 = 0, \\
&(2 \cdot y - 2.5)^2 = 0, \\
&2 \cdot y - 2.5 = 0. \\
&2 \cdot y = 2.5, \quad / : 2 \\
&y = 1.25.
\end{aligned}$$

Sada lako izračunamo:

$$x = 10 - 4 \cdot 1.25 = 5.$$

Doista, brojevi 5. 8.5 i 12 tvore tri uzastopna člana aritmetičkoga niza, dok brojevi 1.25, 2.5 i 5 tvore tri uzastopna člana geometrijskoga niza.

2.) $p \in \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. Uočimo da je f polinom stupnja 3, pa je njezina prirodna domena skup $\mathbb{R}$. Funkcija f je strogo padajuća na svojoj prirodnoj domeni (skupu $\mathbb{R}$) ako i samo ako vrijedi nejednakost:

$$f'(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odredimo prvu derivaciju funkcije f. Primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija dobivamo:

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{3} \cdot p \cdot x^3 \right)' + \left(x^2 \right)' - (2 \cdot x)' =$$

$$=\left(\frac{-1}{3}\cdot p\right)\cdot\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'-2\cdot(x)'=$$
$$=\left(\frac{-1}{3}\cdot p\right)\cdot 3\cdot x^{3-1}+2\cdot x^{2-1}-2\cdot 1=$$
$$=-p\cdot x^2+2\cdot x-2.$$

Dobivena funkcija je polinom 2. stupnja (u varijabli x). Njegova će slika biti skup svih strogo negativnih realnih brojeva ako i samo ako vrijede nejednakosti:

$$\begin{cases}-p<0,\\ D=2^2-4\cdot(-p)\cdot(-2)<0\end{cases}$$

Dobili smo sustav dviju linearnih nejednadžbi. Riješimo ga na uobičajen način:

$$\begin{cases}-p<0, \quad /:(-1)\\ 4-8\cdot p<0\end{cases}$$
$$\begin{cases}p>0,\\ -8\cdot p<-4 \quad /:(-8)\end{cases}$$
$$\begin{cases}p>0,\\ p>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Presjek rješenja tih nejednadžbi je skup $\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$. Dakle, sve tražene vrijednosti parametra p tvore skup $\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$.

40. ≈ 30.91. **1. način:** Najprije dokažimo da je trokut TBC pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu T. Trokut ABC ima pravi kut pri vrhu C. To znači da je:

$$\angle TCA+\angle TCB=\angle BCA$$
$$\angle TCA+\angle TCB=90^\circ,$$
$$\angle TCB=90^\circ-\angle TCA.$$

Prema pretpostavci je

$$\angle TCA=\angle TBC.$$

Zbroj mjera kutova u trokutu TBC mora biti jednak 180°, što daje:

$$\angle TCB+\angle TBC+\angle CBT=180^\circ.$$

Uvrštavanjem prve dvije jednakosti u treću dobijemo:

$$90^\circ - \angle TCA + \angle TCA + \angle CTB = 180^\circ,$$
$$\angle CTB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

što smo i željeli pokazati.

Da bismo odredili traženi opseg, dovoljno je odrediti mjeru šiljastoga kuta pri vrhu B pravokutnoga trokuta ABC. Time će jednoznačno biti određene i preostale dvije stranice toga trokuta, pa posljedično i traženi opseg.

Uočimo da je:

$$\angle ABC = \angle TBC + \angle TBA.$$

Za kut $\angle TBC$ odredimo:

$$\sin \angle TBC = \frac{|\overline{TC}|}{|\overline{TB}|} = \frac{4.4}{10.04} = \frac{110}{251}.$$

Zbog pretpostavke $\angle TAB = \angle TBC$ je i

$$\sin \angle TAB = \frac{110}{251}.$$

Primjena Pitagorina teorema na trokut TBC daje:

$$\begin{aligned} |\overline{TB}| &= \sqrt{|\overline{BC}|^2 - |\overline{TC}|^2} = \\ &= \sqrt{10.04^2 - 4.4^2} = \\ &= \sqrt{81.4416}. \end{aligned}$$

Primjena sinusova teorema na trokut TAB daje:

$$\frac{\sin \angle TBA}{|\overline{TA}|} = \frac{\sin \angle TAB}{|\overline{TB}|},$$
$$\begin{aligned} \sin \angle TBA &= \frac{|\overline{TA}|}{|\overline{TB}|} \cdot \sin \angle TAB = \\ &= \frac{4.5}{\sqrt{81.4416}} \cdot \frac{110}{251} = \\ &= \frac{495}{251 \cdot \sqrt{81.4416}}. \end{aligned}$$

Tako dobivamo:

$$\begin{aligned}\beta = \angle ABC = \angle TBC + \angle TBA = \\ &= \arcsin\left(\frac{110}{251}\right) + \arcsin\left(\frac{495}{251\cdot\sqrt{81.4416}}\right) \approx \\ &\approx 0.6739538924 \text{ rad.}\end{aligned}$$

Traženi opseg jednak je:

$$\begin{aligned}O &= \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{CA}\right| = \\ &= \frac{\left|\overline{BC}\right|}{\cos\beta} + \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{BC}\right|\cdot \operatorname{tg}\beta = \\ &= \left|\overline{BC}\right|\cdot\left(\frac{1}{\cos\beta} + 1 + \operatorname{tg}\beta\right) = \\ &= \left|\overline{BC}\right|\cdot\left(\frac{1}{\cos\beta} + 1 + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \\ &= \left|\overline{BC}\right|\cdot\left(\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} + 1\right) \approx \\ &\approx 10.04\cdot\left(\frac{1+\sin 0.6739538924}{\cos 0.6739538924} + 1\right) \approx \\ &\approx 30.908436 \approx 30.91 \text{ cm.}\end{aligned}$$

2. način: Kao u 1. načinu najprije dokažemo da je trokut TBC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu T. Radi kratkoće zapisa, označimo:

$$\delta := \angle TBC = \angle TCA = \angle TAB.$$

Ponovno kao u 1. načinu odredimo:

$$\sin\delta = \frac{4.4}{10.04}.$$

Površinu trokuta ABC možemo izračunati na dva različita načina. Prvi je način izračunati polovicu umnoška duljina kateta toga trokuta. Drugi je način zbrojiti površine trokutova TBC, TCA i TAB. U oba slučaja dobivamo istu veličinu, pa koristeći sinusov teorem slijedi:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{TC}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right|\cdot\sin\delta + \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{TA}\right|\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\sin\delta + \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{TC}\right|\cdot\sin\left(90^\circ - \delta\right),$$

$$10.04\cdot\left|\overline{CA}\right| = 4.4\cdot\left|\overline{CA}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04} + 4.5\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04} + 10.04\cdot 4.4\cdot\cos\delta,$$

$$10.04\cdot\left|\overline{CA}\right|=4.4\cdot\left|\overline{CA}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04}+4.5\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04}+10.04\cdot 4.4\cdot\sqrt{1-\sin^2\delta},$$

$$10.04\cdot\left|\overline{CA}\right|=4.4\cdot\left|\overline{CA}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04}+4.5\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04}+10.04\cdot 4.4\cdot\sqrt{1-\frac{4.4^2}{10.04^2}},$$

$$10.04\cdot\left|\overline{CA}\right|=4.4\cdot\left|\overline{CA}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04}+4.5\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\frac{4.4}{10.04}+4.4\cdot\sqrt{10.04^2-4.4^2},\qquad /\cdot 10.04$$

$$10.04^2\cdot\left|\overline{CA}\right|-4.4^2\cdot\left|\overline{CA}\right|-4.5\cdot 4.4\cdot\left|\overline{AB}\right|=10.04\cdot 4.4\cdot\sqrt{10.04^2-4.4^2},$$

$$\left(10.04^2-4.4^2\right)\cdot\left|\overline{CA}\right|-4.5\cdot 4.4\cdot\left|\overline{AB}\right|=10.04\cdot 4.4\cdot\sqrt{10.04^2-4.4^2},$$

$$81.4416\cdot\left|\overline{CA}\right|-19.8\cdot\left|\overline{AB}\right|=44.176\cdot\sqrt{81.4416}.$$

Primjena Pitagorina teorema na trokut ABC daje:

$$\left|\overline{AB}\right|^2-\left|\overline{CA}\right|^2=\left|\overline{BC}\right|^2,$$

$$\left|\overline{AB}\right|^2-\left|\overline{CA}\right|^2=10.04^2,$$

$$\left|\overline{AB}\right|^2-\left|\overline{CA}\right|^2=100.8016.$$

Uz standardne oznake u trokutu, dobili smo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$81.4416\cdot b-19.8\cdot c=44.176\cdot\sqrt{81.4416},$$
$$c^2-b^2=100.8016.$$

Njegovim rješavanjem dobijemo:

$$(b,c)\approx(8.01905,12.8494),$$

pa je traženi opseg (približno) jednak:

$$O=a+b+c\approx$$
$$\approx 10.04+8.01905+12.8494=$$
$$=30.90845\approx 30.91\text{ cm}.$$

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač