TVZ — TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	Matematika na državnoj maturi	rješenja zadataka iz lipnja 2023. (viša razina)

1. **C**. Imamo redom:

$$x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^4 \cdot x^{\frac{2}{3}} = $$
$$= x^{4+\frac{2}{3}} =$$
$$= x^{\frac{4\cdot 3+2}{3}} =$$
$$= x^{\frac{14}{3}}.$$

2. **D**. Monomi $3\cdot x$, $8\cdot y$ i $4\cdot x\cdot y$ nemaju nijedan zajednički cjelobrojni faktor, pa prvi razlomak nije skrativ.

   Ni monomi $2\cdot x$, $5\cdot y$ i $10\cdot x\cdot y$ nemaju nijedan zajednički cjelobrojni faktor, pa ni drugi razlomak nije skrativ.

   Ni monomi $3\cdot x$, $4\cdot y$, $6\cdot x$ i $8\cdot y$ nemaju nijedan zajednički cjelobrojni faktor, pa ni treći razlomak nije skrativ.

   Monomi $4\cdot y$, $x\cdot y$ i $2\cdot y$ imaju zajednički cjelobrojni faktor y, pa četvrti razlomak možemo podijeliti s tim faktorom (uz pretpostavku da je $y \neq 0$):

$$\frac{4\cdot y + x\cdot y}{x\cdot y - 2\cdot y} = \frac{y\cdot(4+x)}{y\cdot(x-2)} =$$
$$= \frac{4+x}{x-2}.$$

3. **B**. Neka je C početna cijena. Tada cijena nakon poskupljenja od 50% iznosi

$$C_1 = C + \frac{50}{100}\cdot C =$$
$$= C + \frac{1}{2}\cdot C =$$
$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot C =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot C.$$

   Cijena nakon sniženja od 50% iznosi:

$$C_2 = C_1 - \frac{50}{100}\cdot C_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 - \frac{1}{2} \cdot C_1 = \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot C_1 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot C_1 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot C\right) = \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot C = \\
&= \frac{3}{4} \cdot C = \\
&= \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} \cdot C = \\
&= \frac{75}{100} \cdot C = \\
&= 75\% \cdot C.
\end{aligned}$$

Dakle, konačna cijena proizvoda jednaka je 75% početne cijene.

4. C. Ukupan broj učenika u razredu jednak je

$$13 + 11 = 24.$$

Zbog toga je ukupan broj svih mogućnosti za izbor točno jednoga učenika jednak 24. Ukupan broj svih povoljnih mogućnosti jednak je broju učenika rođenih 2004. godine, a taj je broj jednak 13. Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\text{broj povoljnih mogućnosti}}{\text{broj svih mogućnosti}} = \\
&= \frac{13}{24}.
\end{aligned}$$

5. D. Riješimo zadanu kvadratnu jednadžbu na uobičajen način. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c)}}{2 \cdot 1} = \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot c}}{2}, \\
x_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot c}}{2},\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4 \cdot c}}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijednost D. je jedno rješenje zadane jednadžbe (točnije, rješenje x_1).

6. A. **Napomena: U zadatku nije navedena pretpostavka da su svi koeficijenti u kvadratnoj jednadžbi realni brojevi. Rješenje zadatka se izlaže uz tu pretpostavku. (Diskriminanta kvadratne jednadžbe može biti jednaka 19 i ako je barem jedan koeficijent u toj jednadžbi kompleksan broj koji nije realan. Takva je npr. kvadratna jednadžba $x^2 + i \cdot x - 5 = 0$.) Ako se pretpostavka izostavi, onda rješenje zadatka nije jednoznačno (u obzir dolaze i odgovor A. i odgovor B.)**
   U izrazu kojim određujemo sva rješenja kvadratne jednadžbe pojavljuje se drugi korijen iz diskriminante te jednadžbe. Prema pretpostavci, vrijednost diskriminante je strogo pozitivan realan broj (točnije, 19), pa je drugi korijen iz diskriminante također strogo pozitivan realan broj. Tom broju ili njemu suprotnom broju dodajemo koeficijent uz nepoznanicu koji je realan broj, pa dobiveni rezultat dijelimo s dvostrukim vodećim koeficijentom koji je također realan broj. Dakle, provodimo operacije zbrajanja i dijeljenja u skupu realnih brojeva čiji je rezultat ponovno realan broj. Zbog toga su oba rješenja *bilo koje* kvadratne jednadžbe čija je diskriminanta jednaka 19 realni brojevi.

7. A. Primijetimo da je *f* polinom 1. stupnja. Njegov vodeći koeficijent jednak je −0.5, pa zaključujemo da je f strogo padajuća. Nadalje, njegov slobodni član jednak je 1, pa zaključujemo da graf funkcije f prolazi točkom (0, 1). Taj graf je pravac.

   Od četiriju ponuđenih pravaca jedino pravac na slici A. predstavlja graf strogo padajuće funkcije koji prolazi točkom (0, 1). (Pravci na slikama B. i D. ne prolaze točkom (0, 1), dok pravac na slici C. predstavlja graf strogo rastuće funkcije.)

8. D. Prema pretpostavci, temperatura zraka se smanjuje jednoliko, što znači da zavisnost temperature o vremenu možemo opisati polinomom 1. stupnja oblika $T(t) = a \cdot t + b$. Odredimo pravilo toga polinoma.

   U početnom trenutku, tj. u trenutku $t = 0$, temperatura zraka iznosi 28°C. To znači da vrijedi:

$$\begin{aligned} &T(0) = 28, \\ &a \cdot 0 + b = 28, \\ &0 + b = 28, \\ &b = 28. \end{aligned}$$

   Nakon pet minuta temperatura zraka iznosi 26°C, pa vrijedi:

$$T(5)=26,$$
$$a\cdot 5+b=26,$$
$$5\cdot a+b=26.$$

Tako rješavanjem sustava

$$\begin{cases} b=28, \\ 5\cdot a+b=26 \end{cases}$$

lagano slijedi $(a,b)=\left(\frac{-2}{5},28\right)$. Prema tome traženo je pravilo

$$T(t)=\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot t+28.$$

9. **A**. Odredimo koeficijent smjera zadanoga pravca. Dobivamo:

$$3\cdot y=-9\cdot x+5, \quad /:3$$
$$y=\frac{-9}{3}\cdot x+\frac{5}{3}=$$
$$=(-3)\cdot x+\frac{5}{3},$$
$$k=-3.$$

Od svih ponuđenih pravaca usporedan sa zadanim bit će onaj kojemu je koeficijent smjera također jednak –3. Jedini takav pravac naveden je pod **A**.

10. **D**. Iz slike očitamo da je početna točka zadanoga vektora (–2, 5), dok je njegova krajnja točka (1, 1). Prema tome, traženi je zapis:

$$\vec{a}=(1-(-2))\cdot\vec{i}+(1-5)\cdot\vec{j}=$$
$$=(1+2)\cdot\vec{i}+(-4)\cdot\vec{j}=$$
$$=3\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}.$$

11. **B**. Transformirajmo jednadžbu kružnice ovako:

$$x^2+\left(y^2+4\cdot y\right)=0,$$
$$x^2+(y+2)^2-2^2=0,$$
$$x^2+(y-(-2))^2=2^2.$$

Iz posljednje jednakosti izravno očitamo traženo središte:

$$S=(0,-2).$$

12. B. Iz slike se vidi da vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z_3) = -\mathrm{Re}(z_1), \\ \mathrm{Im}(z_3) = -\mathrm{Im}(z_1). \end{cases}$$

One su ekvivalentne s

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = -\mathrm{Re}(z_3), \\ \mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_3). \end{cases}$$

Odatle slijedi:

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Im}(z_1) \cdot i = \\ &= -\mathrm{Re}(z_3) - \mathrm{Im}(z_3) \cdot i = \\ &= -(\mathrm{Re}(z_3) + \mathrm{Im}(z_3) \cdot i) = \\ &= -z_3. \end{aligned}$$

Dakle, točna je jednakost B.

13. A. Tvrdnja A. vrijedi za svaki trokut jer težište *bilo kojega* trokuta dijeli *svaku* težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od pripadnoga vrha trokuta. Tvrdnje B., C. i D su istinite ako i samo ako se radi o jednakostraničnom trokutu, pa nisu istinite za svaki trokut.

14. D. Primijetimo da su trokutovi ABE i CDE slični npr. prema teoremu K-K (zajednički unutrašnji kut kod vrha E i jednake mjere kutova kod vrhova A i C (kutovi uz transverzalu)). Primjenom Talesova teorema o sličnosti trokuta postavljamo razmjer:

$$\begin{aligned} |\overline{CD}| : |\overline{AB}| &= |\overline{CE}| : |\overline{BE}|, \\ |\overline{CD}| : |\overline{AB}| &= |\overline{CE}| : \left(|\overline{BC}| + |\overline{CE}|\right). \end{aligned}$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$\begin{aligned} |\overline{CD}| &= \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CE}|}{|\overline{BC}| + |\overline{CE}|} = \\ &= \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CE}| : |\overline{CE}|}{\left(|\overline{BC}| + |\overline{CE}|\right) : |\overline{CE}|} = \end{aligned}$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\dfrac{\left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{CE}\right|}{\left|\overline{CE}\right|}} = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\dfrac{\left|\overline{BC}\right|}{\left|\overline{CE}\right|} + \dfrac{\left|\overline{CE}\right|}{\left|\overline{CE}\right|}} = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\dfrac{\left|\overline{BC}\right|}{\left|\overline{CE}\right|} + 1} = \frac{24}{\dfrac{3}{5} + 1} = \frac{24}{\dfrac{3+5}{5}} = \frac{24 \cdot 5}{8} = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm.}$$

15. **C**. Tvrdnja **A**. je iskaz Talesova teorema, pa je istinita.

Tvrdnja **B**. je iskaz teorema o obodnom i središnjem kutu nad istom tetivom, pa je istinita.

Tvrdnja **D**. je istinita jer su opseg i polumjer kruga upravno razmjerne veličine. Naime, njihovu vezu opisuje polinom 1. stupnja $O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$, pa odatle zaključujemo da, ako se polumjer kruga udvostruči, onda se i opseg kruga udvostruči:

$$O(r_1) = 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r) = 2 \cdot (\pi \cdot 2 \cdot r) = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 2 \cdot O(r).$$

Tvrdnja **C**., međutim, nije istinita. Iz jednakosti

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r$$

dijeljenjem s $r > 0$ slijedi

$$r = \frac{O}{2 \cdot \pi},$$

pa uvrštavanjem te jednakosti u izraz za površinu kruga

$$P = r^2 \cdot \pi$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{O}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \pi = \\ &= \frac{O^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \pi = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot O^2. \end{aligned}$$

Dakle, veza površine i opsega kruga opisana je polinomom 2. stupnja

$$P(O) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot O^2,$$

a ta funkcija nema svojstvo da udvostručenje argumenta (nezavisne varijable) povlači udvostručenje vrijednosti funkcije (zavisne varijable). Štoviše, udvostručenje opsega kruga povlači učetverostručenje površine:

$$\begin{aligned} P(O_1) &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot (2 \cdot O)^2 = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot 4 \cdot O^2 = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot O^2\right) = \\ &= 4 \cdot P(O). \end{aligned}$$

16. B. Traženi tangens kuta nasuprot kraćoj kateti jednak je količniku duljine kraće katete i duljine dulje katete. Tako odmah dobivamo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}.$$

17. A. Primijetimo da stranice čije su duljine x i y zatvaraju kut mjere φ, kao i da je stranica duljine z nasuprot toga kuta. Primijenimo kosinusov teorem, pa dobijemo:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\varphi,$$
$$2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\varphi = x^2 + y^2 - z^2, \quad / : 2 \cdot x \cdot y$$
$$\cos\varphi = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2 \cdot x \cdot y}.$$

18. D. Predznak vrijednosti kosinusa realnoga broja je strogo pozitivan ako i samo ako se tom realnom broju pridružena točka jedinične kružnice nalazi u prvom ili četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. (Pozitivan dio osi apscisa uključujemo i u prvi i u četvrti kvadrant.)

Predznak vrijednosti tangensa realnoga broja je strogo negativan ako i samo ako se tom realnom broju pridružena točka jedinične kružnice nalazi u drugom ili četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.

Iz tih zaključaka slijedi da se točka $E(t)$ nalazi u četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Naime, prema pretpostavci, ta točka ima oba promatrana svojstva, a sve točke koje imaju oba promatrana svojstva nalaze se u četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.

19. B. Pravac DG siječe ravninu ADH u točki D, pa ne može biti usporedan s tom ravninom.

Pravac DG je usporedan s pravcem AF (dijagonale međusobno suprotnih strana kocke). Pravac AF pripada ravnini ABF, pa zaključujemo da je pravac DG usporedan s ravninom ABF.

Pravac CF pripada ravnini BCF i usporedan je s pravcem DE (dijagonale međusobno suprotnih strana kocke). Pravac DE siječe pravac DG u točki D. Zbog toga pravac DG nije usporedan s ravninom BCF.

Pravac FH pripada ravnini EFH i usporedan je s pravcem CD (dijagonale međusobno suprotnih strana kocke). Pravac CD siječe pravac DG u točki D. Zbog toga pravac DG nije usporedan s ravninom EFH.

Dakle, od četiriju ponuđenih ravnina, pravac DG usporedan je jedino s ravninom ABF.

20. D. Rotacijom zadanoga pravokutnika oko njegove kraće stranice nastaje uspravni kružni valjak kojemu je polumjer osnovke jednak duljoj stranici pravokutnika, a visina jednaka kraćoj stranici pravokutnika. To znači da su:

$$r = 8 \text{ cm}, \; v = 7 \text{ cm},$$

pa slijedi da je traženi volumen valjka jednak:

$$\begin{aligned} V &= B \cdot v = \\ &= r^2 \cdot \pi \cdot v = \\ &= 8^2 \cdot \pi \cdot 7 = \\ &= 64 \cdot \pi \cdot 7 = \\ &= 448 \cdot \pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

21. C. **Napomena: Zadatak je riješen uz pretpostavku da se radi o nizu realnih brojeva. Ako navedena pretpostavka ne vrijedi, onda rješenje zadatka nije jednoznačno (postoje ukupno tri različita rješenja.)** Odredimo najprije količnik zadanoga geometrijskoga niza. Označimo li ga s q, onda mora vrijediti jednakost:

$$\begin{aligned} g_4 &= g_1 \cdot q^3, \\ -54 &= 2 \cdot q^3. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 2 dobivamo jednadžbu

$$q^3 = -27$$

čije je jedinstveno realno rješenje

$$q = \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Tako je traženi peti član zadanoga niza jednak:

$$\begin{aligned} g_5 &= g_4 \cdot q = \\ &= (-54) \cdot (-3) = \\ &= 162. \end{aligned}$$

22. C. Koristeći osnovna pravila za deriviranje odmah dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(-5) \cdot x^{-5-1} = \\ &= 5 \cdot x^{-6}. \end{aligned}$$

23. A. Traženi nagib tangente jednak je vrijednosti prve derivacije zadane funkcije u točki s apscisom 9. Primjenom osnovnih pravila za deriviranje imamo redom:

$$f(x) = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1,$$

$$f'(x)=5\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}+0=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}},$$
$$k=f'(9)=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 9^{\frac{-1}{2}}=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot\left(3^2\right)^{\frac{-1}{2}}=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 3^{2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 3^{-1}=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{5}{6}.$$

24. D. **Napomena: Zadatak je riješen uz pretpostavku da je f definirana na svojoj prirodnoj domeni (skupu $\mathbb{R}$). Ako navedena pretpostavka ne vrijedi, onda rješenje ovisi o stvarnoj domeni zadane funkcije.** Imamo redom:

$$|x-5|\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$$
$$|x-5|+7\geq 0+7,$$
$$f(x)\geq 7.$$

Time smo pokazali da funkcija f poprima sve vrijednosti jednake ili veće od 7. Te vrijednosti tvore interval $\left[7,+\infty\right\rangle$. Zbog toga je taj interval tražena slika funkcije f.

25. $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$. Da bismo dobili potpun kub cijeloga broja pod trećim korijenom, brojnik i nazivnik zadanoga razlomka moramo pomnožiti s

$$\frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{5^{3-1}}=\sqrt[3]{5^2}.$$

Tako redom imamo:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\frac{\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\cdot\sqrt[3]{5^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{25}}{5}.$$

26. $\langle 2,+\infty\rangle$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&3-2\cdot x+5<4,\\
&(-2)\cdot x<4-3-5,\\
&(-2)\cdot x<-4, \qquad /:(-2)\\
&x>-2.
\end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe tvore svi realni brojevi strogo veći od –2. To znači da je taj skup jednak intervalu $\langle 2,+\infty\rangle$, pa je taj interval rješenje zadatka.

27. $(x-y-1)\cdot(x-y+1)$, $(x-y+1)\cdot(x-y-1)$, $(y-x-1)\cdot(y-x+1)$ **ili** $(y-x+1)\cdot$ $\cdot(y-x-1)$. Primjenom formula za kvadrat binoma, odnosno razliku kvadrata dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-2\cdot x\cdot y-1&=\left(x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\right)-1=\\
&=(x-y)^2-1^2=\\
&=(x-y-1)\cdot(x-y+1).
\end{aligned}$$

Zbog komutativnosti množenja u skupu $\mathbb{R}$ vrijedi i jednakost:

$$x^2+y^2-2\cdot x\cdot y-1=(x-y+1)\cdot(x-y-1).$$

Zbog jednakosti

$$(x-y)^2=(y-x)^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

zadatak ima još dva rješenja:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-2\cdot x\cdot y-1&=(y-x-1)\cdot(y-x+1),\\
x^2+y^2-2\cdot x\cdot y-1&=(y-x+1)\cdot(y-x-1).
\end{aligned}$$

28. $z=0$ ili bilo koji kompleksan broj oblika $z=r\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ili bilo koji kompleksan broj oblika $z=r\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\right)$, gdje je $r>0$. Razlikovat ćemo ukupno tri slučaja:

1.) Broju z je pridruženo ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini. U tom slučaju su $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)=0$, pa je $z=0$. Za ovaj kompleksan broj nije definiran glavni argument, pa kao rješenje u ovom slučaju ostavljamo zapis $z=0$.

2.) Broju z je pridružena točka na strogo pozitivnom dijelu imaginarne osi. Tada spojnica te točke i ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini zatvara s pozitivnim dijelom realne osi kut čija je mjera $\frac{\pi}{2}$ rad., što znači da je $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{2}$. Prema tome, u ovom slučaju broj z ima zapis oblika

$$z=r\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

gdje je $r>0$. (Broj r je zapravo modul broja z.)

3.) Broju z je pridružena točka na strogo negativnom dijelu imaginarne osi. Tada spojnica te točke i ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini zatvara s pozitivnim dijelom realne osi kut čija je mjera $\frac{3}{2}\cdot\pi$ rad., što znači da je $\operatorname{Arg}(z)=\frac{3}{2}\cdot\pi$. Prema tome, u ovom slučaju broj z ima zapis oblika

$$z=r\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\right),$$

gdje je $r>0$. (Broj r je ponovno modul broja z.)

Ovim smo iscrpili sve moguće slučajeve i riješili postavljeni zadatak.

29. 1.) $3.97\cdot10^{110}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}4\cdot10^{110}-3\cdot10^{108}&=4\cdot10^{110}-0.03\cdot10^{2}\cdot10^{108}=\\&=4\cdot10^{110}-0.03\cdot10^{2+108}=\\&=4\cdot10^{110}-0.03\cdot10^{110}=\end{aligned}$$

$$= (4 - 0.03) \cdot 10^{110} =$$
$$= 3.97 \cdot 10^{110}.$$

2.) $a^{-1}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-2}$. Znamo da je eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ strogo rastuća kad god je $a > 1$. To znači da vrijede nejednakosti:

$$0 < a^{-4} < a^{-3} < a^{-2} < a^{-1}, \ \forall a > 1.$$

Nadalje, za svaki $a < -1$ postoji jedinstveni $a_0 > 1$ takav da je

$$a = (-1) \cdot a_0.$$

(Štoviše, lako se vidi da je $a_0 = |a|$.) Odavde je

$$a_0 = \frac{a}{-1},$$

pa uvrštavanjem te vrijednosti u gornji „lanac“ nejednakosti dobijemo:

$$0 < \left(\frac{a}{-1}\right)^{-4} < \left(\frac{a}{-1}\right)^{-3} < \left(\frac{a}{-1}\right)^{-2} < \left(\frac{a}{-1}\right)^{-1}, \ \forall a < 1,$$
$$0 < \frac{a^{-4}}{(-1)^{-4}} < \frac{a^{-3}}{(-1)^{-3}} < \frac{a^{-2}}{(-1)^{-2}} < \frac{a^{-1}}{(-1)^{-1}},$$
$$0 < a^{-4} < -a^{-3} < a^{-2} < -a^{-1}.$$

Odavde izravno slijede nejednakosti:

$$0 < a^{-4} < a^{-2},$$
$$-a^{-3} < -a^{-1},$$
$$0 < a^{-4} < -a^{-3}.$$

Dijeljenjem druge nejednakosti s (–1) dobivamo:

$$a^{-1} < a^{-3}.$$

Dijeljenjem treće nejednakosti s (–1) dobivamo:

$$a^{-3} < -a^{-4} < 0.$$

Tako smo dobili nejednakosti:

$$a^{-1} < a^{-3} < 0 < a^{-4} < a^{-2}, \ \forall a < -1,$$

pa traženi uzlazno sortirani poredak zadanih brojeva glasi:

$$a^{-1}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-2}.$$

30. 1.) $\frac{3}{4} = 0.75$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&2 - \frac{7 \cdot m + 1}{5} = m, \qquad / \cdot 5 \\
&10 - (7 \cdot m + 1) = 5 \cdot m, \\
&10 - 7 \cdot m - 1 = 5 \cdot m, \\
&-7 \cdot m - 5 \cdot m = -10 + 1, \\
&(-12) \cdot m = -9, \qquad / : (-12) \\
&m = \frac{-9}{-12} = \\
&\quad = \frac{-9 : (-3)}{-12 : (-3)} = \\
&\quad = \frac{3}{4} = 0.75.
\end{aligned}$$

2.) 18. Udaljenost od šest kilometara jednaka je udaljenosti od 6000 metara. Budući da je vrijeme jednako količniku prijeđenoga puta i prosječne brzine, zaključujemo da je Marko trčao ukupno

$$\frac{6000}{200} = 30 \text{ minuta},$$

kao i da je Luka vozio bicikl ukupno

$$\frac{6000}{500} = 12 \text{ minuta}.$$

Dakle, Marko je trčao $30 - 12 = 18$ minuta više nego što je Luka vozio bicikl.

31. 1.) 112 cm. Iz tablice se vidi da je najviše djece (ukupno četvero) visoko 112 cm. Zbog toga je mod promatranoga niza visina jednak 112 cm.

2.) 116. Nakon što je upisano dijete visoko 123 cm, ukupan broj djece u promatranoj vrtićkoj skupini jednak je:

$$N = 3 + 4 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 15.$$

Broj 15 nije djeljiv s 2, pa je traženi medijan jednak:

$$\begin{aligned} x_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} &= x_{\lceil \frac{15}{2} \rceil} = \\ &= x_{\lceil 7.5 \rceil} = \\ &= x_8 = \\ &= 116. \end{aligned}$$

(Polazni niz visina je već uzlazno sortiran i njegov 8. član po redu je 116.)

32. 1.) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ **jed. duljine.** Jednadžbu zadanoga pravca najprije zapišimo u implicitnom obliku:

$$p \ldots\ 4 \cdot x - y - 8 = 0.$$

Tako je tražena udaljenost jednaka:

$$\begin{aligned} d(T, p) &= \frac{|4 \cdot 2 - (-1) - 8|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \\ &= \frac{|8 + 1 - 8|}{\sqrt{16 + 1}} = \\ &= \frac{|1|}{\sqrt{17}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}} \frac{\cdot \sqrt{17}}{\cdot \sqrt{17}} = \\ &= \frac{\sqrt{17}}{17} \text{ jed. duljine.} \end{aligned}$$

2.) 8 kv. jed. Zadanu jednadžbu pravca najprije napišimo u segmentnom obliku:

$$\begin{aligned} &(-4) \cdot x + y = -8, \quad / : (-8) \\ &\frac{x}{2} + \frac{y}{-8} = 1. \end{aligned}$$

Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot |2 \cdot (-8)| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |-16| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 = \\ &= 8 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$

33. 1.) $\frac{\pi}{3}$ rad. $= 60^\circ$. Primijenimo definicijsku relaciju skalarnoga umnoška

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

pa dobijemo:

$$\begin{aligned}\angle(\vec{a}, \vec{b}) &= \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{25}{5 \cdot 10}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{3} \text{ rad.} = 60^\circ.\end{aligned}$$

2.) $5 \cdot \sqrt{3}$. Primijenimo kosinusov teorem i gore navedenu definiciju skalarnoga umnoška, pa odmah dobivamo:

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})} = \\ &= \sqrt{5^2 + 10^2 - 2 \cdot 25} = \\ &= \sqrt{25 + 100 - 50} = \\ &= \sqrt{75} = \\ &= \sqrt{25 \cdot 3} = \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \\ &= 5 \cdot \sqrt{3} \text{ jed. duljine.}\end{aligned}$$

34. 1.) $x = -2$ **ili** $x + 2 = 0$. Traženi pravac je pravac usporedan s osi ordinata koji prolazi tjemenom T grafa funkcije f. Njegova jednadžba ima oblik $x = A$, pri čemu je $A \in \mathbb{R}$ konstanta. U našemu je slučaju A jednaka prvoj koordinati tjemena T grafa funkcije f.

$$\begin{aligned}A &= \frac{-12}{2 \cdot 3} = \\ &= \frac{-12}{6} = \\ &= -2.\end{aligned}$$

Dakle, traženi pravac je $x = -2$.

2.) $\langle -5,1 \rangle$. Riješimo nejednadžbu:

$$f(x) < 0.$$

Budući da je vodeći koeficijent funkcije f strogo pozitivan realan broj (preciznije, 3), skup svih rješenja ove nejednadžbe bit će otvoreni interval omeđen nultočkama funkcije f. Zbog toga riješimo jednadžbu

$$f(x) = 0.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 15 = 0, \quad / : 3 \\
&x^2 + 4 \cdot x - 5 = 0, \\
&x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \\
&\qquad = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-20)}}{2} = \\
&\qquad = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \\
&\qquad = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \\
&\qquad = \frac{-4 \pm 6}{2}, \\
&x_1 = \frac{-4 - 6}{2} = \frac{-10}{2} = -5, \\
&x_2 = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, traženi skup je otvoreni interval $\langle -5,1 \rangle$.

35. 1.) $\log_a \left(\frac{a}{9} \right)$. Koristeći osnovna svojstva logaritama imamo redom:

$$\begin{aligned}
1 - 2 \cdot \log_a 3 &= \log_a a - \log_a \left(3^2 \right) = \\
&= \log_a \left(\frac{a}{3^2} \right) = \\
&= \log_a \left(\frac{a}{9} \right).
\end{aligned}$$

2.) 64. Traženi je broj jednak najmanjem prirodnom rješenju nejednadžbe

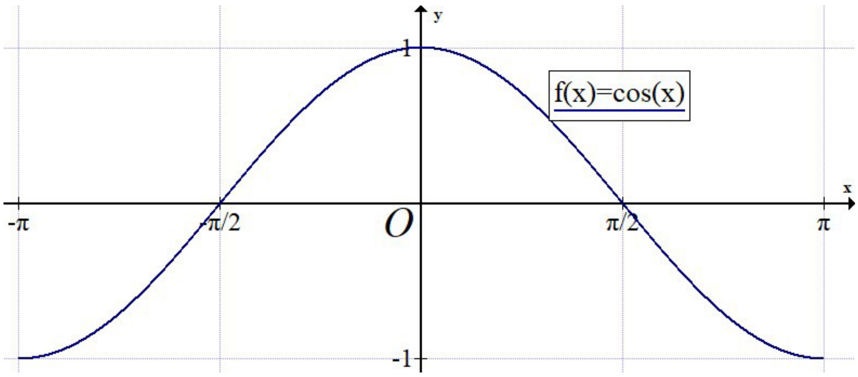
$$B(d) \geq 1135.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$50 \cdot 1.05^d \geq 1135, \quad / : 50$$
$$1.05^d \geq 22.7, \quad / \log_{1.05}$$
$$d \geq \log_{1.05} 22.7 = \frac{\log 22.7}{\log 1.05} \approx 63.996.$$

Najmanji prirodan broj koji zadovoljava posljednju nejednadžbu je $d_{\min} = 64$. Dakle, mrežna stranica će prvi put imati 1135 posjeta 64. dan od objave.

36. 1.) **Bilo koji graf osnosimetričan s obzirom na os ordinata.** Parne funkcije su npr. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \cos x$ i dr. Na donjoj je slici prikazan graf funkcije f_3 na segmentu $[-\pi, \pi]$.



Slika 1.

2.) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{6\}$. Zadana je funkcija definirana kad god je logaritmand strogo pozitivan. Primijetimo da vrijedi nejednakost:

$$(x-6)^4 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zbog toga u prirodnu domenu zadane funkcije *ne* pripadaju svi realni brojevi (i samo oni) za koje vrijedi jednakost:

$$(x-6)^4 = 0.$$

Ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$x - 6 = 0.$$

Ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 6$. Prema tome, tražena prirodna domena je skup $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

37. Iz slike vidimo da je najveća vrijednost funkcije f jednaka 2. Najveća vrijednost izraza $A \cdot \sin\left(B \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) + D$ jednaka je $A + D$, pa dobivamo jednadžbu:

$$A + D = 2.$$

Nadalje, iz slike vidimo da je najmanja vrijednost funkcije f jednaka –4. Najveća vrijednost izraza $A \cdot \sin\left(B \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) + D$ jednaka je $-A + D$, pa dobivamo jednadžbu:

$$-A + D = -4.$$

Naposljetku, iz slike vidimo da je temeljni period funkcije f jednak

$$13 - 1 = 12.$$

(To se najlakše utvrdi uoči li se da graf prolazi točkama (1, 2) i (13, 2).) Znamo da je temeljni period funkcije $A \cdot \sin\left(B \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) + D$ dan izrazom

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{B}.$$

Zbog toga mora vrijediti jednakost:

$$\frac{2 \cdot \pi}{B} = 12.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} A + D = 2, \\ -A + D = -4, \\ \dfrac{2 \cdot \pi}{B} = 12. \end{cases}$$

1.) $\frac{\pi}{6}$. Iz treće jednadžbe gornjega sustava odmah slijedi:

$$B = \frac{2 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

2.) −1. Zbrajanjem prvih dviju jednadžbi dobivenoga sustava dobivamo

$$\begin{aligned} 2\cdot D &= -2, \qquad / : 2 \\ D &= -1. \end{aligned}$$

38. 1.) $c_1 = \sqrt{\frac{45}{13}} \approx 1.860521$ cm, $c_2 = \sqrt{\frac{85}{13}} \approx 2.557042$ cm. Određenosti radi, pretpostavimo da su $a = 1$ cm i $b = 2$ cm, uz standardne oznake u trokutu. Tada iz

$$P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma$$

slijedi

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{2\cdot P}{a\cdot b} = \\ &= \frac{2\cdot\frac{12}{13}}{1\cdot 2} = \\ &= \frac{12}{13}. \end{aligned}$$

U zadatku nije naveden podatak nasuprot kojega se kuta nalazi najveća (ili najkraća) stranica trokuta, a iz zadanih podataka to nije moguće zaključiti. Zbog toga postoje dvije mogućnosti za kosinus kuta γ:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma} = \\ &= \pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \\ &= \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \\ &= \pm\sqrt{\frac{169-144}{169}} = \\ &= \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \\ &= \pm\frac{5}{13}. \end{aligned}$$

Ako je $\cos\gamma = \frac{5}{13}$, onda primjenom kosinusova teorema slijedi:

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} = \\ &= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{5}{13}} = \\ &= \sqrt{1+4-\frac{20}{13}} = \\ &= \sqrt{5-\frac{20}{13}} = \\ &= \sqrt{\frac{13\cdot 5-20}{13}} = \\ &= \sqrt{\frac{65-20}{13}} = \\ &= \sqrt{\frac{45}{13}} \approx 1.860521 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Ako je $\cos\gamma = \frac{-5}{13}$, onda ponovnom primjenom kosinusova teorema slijedi:

$$\begin{aligned} c_2 &= \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} = \\ &= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\left(\frac{-5}{13}\right)} = \\ &= \sqrt{1+4+\frac{20}{13}} = \\ &= \sqrt{5+\frac{20}{13}} = \\ &= \sqrt{\frac{13\cdot 5+20}{13}} = \\ &= \sqrt{\frac{65+20}{13}} = \\ &= \sqrt{\frac{85}{13}} \approx 2.557042 \text{ cm.} \end{aligned}$$

2.) $P \approx 239.67$. Uočimo pravokutan trokut kojemu su jedna kateta polovica osnovice piramide, druga kateta visina piramide, a hipotenuza visina jedne pobočke. U tom pravokutnom trokutu znamo dvije veličine:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\cdot a = \frac{1}{2}\cdot 12.6 = 6.3 \text{ cm}, \\ \alpha &= 48^\circ 31'. \end{aligned}$$

Duljina visine pobočke jednaka je duljini hipotenuze uočenoga trokuta:

$$v = \frac{a_1}{\cos\alpha} = \frac{6.3}{\cos 48^\circ 31'}.$$

Zbog toga je tražena površina pobočja jednaka:

$$\begin{aligned} P &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot v = \\ &= 2 \cdot 12.6 \cdot \frac{6.3}{\cos 48^\circ 31'} = \\ &= \frac{158.76}{\cos 48^\circ 31'} \approx \\ &\approx 239.6731323 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

39. 1.) $\frac{-1}{2}$. Primijetimo najprije da je prirodna domena zadane funkcije skup $\mathbb{R}$ jer je nazivnik pravila kojim je zadana funkcija uvijek strogo pozitivan.

Odredimo prvu derivaciju zadane funkcije. Primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija imamo redom:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4 \cdot x - a)' \cdot (x^2+1) - (4 \cdot x - a) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(4 \cdot 1 - 0) \cdot (x^2+1) - (4 \cdot x - a) \cdot (2 \cdot x + 0)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{4 \cdot (x^2+1) - (4 \cdot x - a) \cdot 2 \cdot x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{4 \cdot x^2 + 4 - 8 \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(-4) \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + 4}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{-2}{(x^2+1)^2} \cdot (2 \cdot x^2 - a \cdot x - 2). \end{aligned}$$

Prema Fermatovu teoremu, vrijednost u kojoj derivabilna funkcija postiže lokalni ekstrem mora biti stacionarna točka te funkcije, odnosno nultočka prve derivacije te funkcije. U našem slučaju to znači da točke u kojima zadana funkcija postiže lokalne ekstreme moraju biti realna rješenja jednadžbe

$$2\cdot x^2 - a\cdot x - 2 = 0.$$

Naime, očito vrijedi nejednakost

$$\frac{-2}{\left(x^2+1\right)^2} < 0,\ \forall x \in D(f) = \mathbb{R},$$

pa je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je:

$$2\cdot x^2 - a\cdot x - 2 = 0.$$

Prema Vièteovim formulama umnožak obaju rješenja te jednadžbe jednak je $\frac{-2}{2} = -1$. Prema podacima iz zadatka, jedno od tih rješenja (vrijednost za koju f postiže lokalni ekstrem) jednako je 2, pa je drugo, preostalo rješenje (druga vrijednost za koju f postiže lokalni ekstrem) jednako:

$$x = \frac{-1}{2}.$$

Preostaje provjeriti da za dobivenu vrijednost funkcija f doista postiže lokalni minimum. U tu svrhu najprije ponovnom primjenom Vièteovih formula odredimo vrijednost parametra a:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{2} = 2 + \left(\frac{-1}{2}\right), \quad /\cdot 2\\
&a = 4 - 1,\\
&a = 3.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$f'(x) = \frac{-2}{\left(x^2+1\right)^2}\cdot\left(2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2\right).$$

Sastavimo tablicu:

$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
f'	$-$		$+$		$-$	
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

(Lako se provjeri da vrijede npr. sljedeće nejednakosti:

$$f'(-1) < 0,$$
$$f'(0) > 0,$$
$$f'(3) < 0.)$$

Dakle, f strogo pada na intervalima $\left\langle -\infty, \frac{-1}{2} \right\rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$, a strogo raste na intervalu $\left\langle \frac{-1}{2}, 2 \right\rangle$. Prema tome, f doista postiže lokalni minimum za $x = \frac{-1}{2}$.

2.) 9. Neka su d promjer najmanje kovanice (iskazan u mm), a n ukupan broj svih kovanica. Promjeri kovanica tvore aritmetički niz s razlikom 1.5 (mm). Prvi član toga niza jednak je $d_1 = d$, a posljednji, n-ti:

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 + (n-1) \cdot 1.5 = \\ &= d + (n-1) \cdot 1.5. \end{aligned}$$

Prema podacima u zadatku, najveći je promjer za 60% veći od najmanjega, pa mora vrijediti jednakost:

$$d_n = d + \frac{60}{100} \cdot d.$$

Lijeve strane prethodnih dviju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i njihove desne strane. Izjednačavanjem tih strana dobivamo:

$$\begin{aligned} &d + (n-1) \cdot 1.5 = d + \frac{60}{100} \cdot d, \\ &(n-1) \cdot 1.5 = \frac{60}{100} \cdot d, \\ &(n-1) \cdot 1.5 = \frac{3}{5} \cdot d, \quad / \cdot \frac{5}{3}, \\ &d = 2.5 \cdot (n-1), \\ &d = 2.5 \cdot n - 2.5. \end{aligned}$$

Prosječan promjer svih kovanica jednak je količniku zbroja svih n članova aritmetičkoga niza $d_1, \ldots, d_n$ i ukupnoga broja tih članova (n). Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{\frac{n}{2}\cdot(d+d_n)}{n}=26,$$

iz koje kraćenjem s n i množenjem s 2 slijedi:

$$d+d_n=52.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za d i d_n dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&2.5\cdot n-2.5+2.5\cdot n-2.5+(n-1)\cdot 1.5=52,\\
&5\cdot n-5+1.5\cdot n-1.5=52,\\
&6.5\cdot n=52+5+1.5,\\
&6.5\cdot n=58.5, \quad /:6.5\\
&n=9.
\end{aligned}$$

Dakle, u setu je ukupno 9 kovanica.

40. ≈ 122.72. Primijetimo najprije da se dio otoka koji nije pokriven signalom nalazi unutar kvadrata *KLMN*. Zbog toga njegovu površinu možemo izračunati tako da od površine kvadrata *KLMN* oduzmemo površinu dijela toga kvadrata prekrivenoga krugovima polumjera 30 km čija su središta u vrhovima kvadrata.

Konstruiramo li kružnicu polumjera 30 km čije je središte u jednom vrhu kvadrata, onda će se unutar kvadrata nalaziti točno četvrtina kruga omeđenoga tom kružnicom. Naime, pripadni kružni isječak ima središnji kut jednak kutu kojega zatvaraju dvije susjedne stranice kvadrata. Taj kut je pravi kut koji tvori jednu četvrtinu punoga kuta, pa je zbog toga površina dijela kruga unutar kvadrata jednaka četvrtini površine cijeloga kruga.

Ovu konstrukciju provedemo za svaki od četiriju vrhova kvadrata. Složimo li dobivene dijelove kruga jedan uz drugi, dobit ćemo cijeli krug polumjera 30 km (jer slažemo ukupno četiri četvrtine toga kruga).

Da je presjek krugova čija su središta u dvama susjednim vrhovima kvadrata skup površine nula (preciznije, ili prazan skup ili točka u ravnini), onda bismo površinu dijela kvadrata izvan kruga – a time i traženu površinu - dobili oduzimanjem površine kruga polumjera 30 km od površine kvadrata stranice 50 km. Međutim, a kako se vidi i sa slike, presjek dvaju takvih krugova je ravninski lik čija je površina strogo pozitivna. Pri oduzimanju površine kruga od površine kvadrata površinu svakoga takvoga ravninskoga lika uračunavamo dvaput (prilikom računanja površine svake od dviju pripadnih četvrtina krugova). Budući da se i površina toga ravninskoga lika može uračunati samo jednom, razlici površine kvadrata i površine kruga moramo dodati ukupnu površinu presjeka opisanih ravninskih likova. Njih također ima ukupno četiri i međusobno su sukladni, pa je dovoljno izračunati površinu točno jednoga od njih.

Radi određenosti, pogledajmo četvrtine krugova čija su središta u točkama K i L. Označimo sa S sjecište pripadnih kružnica koje se nalazi unutar kvadrata $KLMN$. (Te kružnice se očito sijeku u dvjema različitim točkama u ravnini, ali drugo sjecište ne pripada kvadratu $KLMN$, pa ga zanemarujemo.) Nadalje, neka je T sjecište kružnice sa središtem u točki K i stranice $\overline{KL}$, a N nožište okomice povučene iz točke S na stranicu $\overline{KL}$.

Razmatranje potpuno analogno gornjem razmatranju možemo provesti i za kružnicu čije je središte u točki L. U tom razmatranju ponovno dobivamo *iste* točke S i N, dok umjesto točke T dobivamo točku koju označimo s T_1. Budući da sve četiri kružnice imaju jednake polumjere, lik čiju površinu želimo izračunati je osnosimetričan s obzirom na pravac SN. Zbog toga je polovica toga lika jednaka razlici kružnoga isječka KST i trokuta KSN (ili, ekvivalentno, razlici kružnoga isječka KST_1 i trokuta KSN). Odatle zaključujemo da je površina cijeloga lika dvostruko veća od razlike površine kružnoga isječka KST i površine trokuta KSN.

Odredimo osnovne veličine potrebne za izračun površine trokuta KSN. Taj trokut je pravokutan s pravim kutom u vrhu N. No, on je i polovica jednakokračnoga trokuta KSL u kojemu znamo duljine svih triju stranica. Duljina osnovice $\overline{KL}$ jednaka je 50 km, a duljine krakova $\overline{KS}$ i $\overline{LS}$ jednake su 30 km. Zbog toga je duljina visine $\overline{SN}$, a prema Pitagorinu teoremu, jednaka:

$$\begin{aligned}|\overline{SN}| &= \sqrt{|\overline{KS}|^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot|\overline{KL}|\right)^2} = \\ &= \sqrt{30^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 50\right)^2} = \\ &= \sqrt{900-625} = \\ &= \sqrt{275} = \\ &= \sqrt{25\cdot 11} = \\ &= 5\cdot\sqrt{11}\text{ km.}\end{aligned}$$

Prema tome, površina trokuta KSN jednaka je polovici površine trokuta KSL:

$$\begin{aligned} P_{\Delta KSN} &= \frac{1}{2} \cdot P_{\Delta KSL} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left| \overline{KL} \right| \cdot \left| \overline{SN} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 50 \cdot 5 \cdot \sqrt{11} = \\ &= \frac{125}{2} \cdot \sqrt{11} \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Odredimo osnovne veličine potrebne za izračun površine isječka *KST*. Polumjer toga isječka znamo:

$$r = \left| \overline{KS} \right| = \left| \overline{KT} \right| = 30 \text{ km}.$$

Preostaje odrediti mjeru pripadnoga središnjega kuta. U tu ćemo svrhu uočiti da je taj kut *isti* kao i unutrašnji kut pri vrhu *K* trokuta *KSN*. Označimo mjeru toga kuta s α (iskazanu u radijanima). Iz trokuta *KSN* zaključujemo da je:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{\left| \overline{SN} \right|}{\left| \overline{KN} \right|} = \\ &= \frac{5 \cdot \sqrt{11}}{\frac{1}{2} \cdot 50} = \\ &= \frac{\sqrt{11}}{5}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{5} \right).$$

Zbog toga je površina isječka *KST* jednaka:

$$\begin{aligned} P_{\widehat{KST}} &= \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{KS} \right|^2 \cdot \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 30^2 \cdot \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{11} \right) = \\ &= 450 \cdot \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{11} \right) \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Sad napokon možemo izračunati traženu površinu nepokrivenoga dijela otoka (**oprez pri računanju:** mjera kuta α je iskazana u radijanima!):

$$P = P_{\square} - P_{\bigcirc} + 4 \cdot (2 \cdot (P_{\widehat{KST}} - P_{\Delta KSN})) =$$

$$= 50^2 - 30^2 \cdot \pi + 8 \cdot \left(450 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right) - \frac{125}{2} \cdot \sqrt{11}\right) =$$

$$= 2500 - 900 \cdot \pi + 3600 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right) - 500 \cdot \sqrt{11} \approx$$

$$\approx 122.72217303722961545 \approx$$

$$\approx 122.72 \text{ km}^2.$$

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač