	Matematika na državnoj maturi	rješenja zadataka iz kolovoza 2023. (osnovna razina)
TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB		

1. **A**. Broj $0.4\overline{67}$ jednak je broju $\frac{4}{10}+\frac{67}{990}=\frac{4\cdot 99+67}{990}=\frac{463}{990}$. Brojnik i nazivnik toga razlomka su prirodni brojevi, pa je taj broj racionalan.
   Brojnik i nazivnik razlomka $\frac{1}{2}$ su prirodni brojevi, pa je taj broj racionalan, a ne iracionalan.
   Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan broj jer 2 nije kvadrat nijednoga racionalnoga broja. Količnik bilo kojega iracionalnoga broja i prirodnoga broja je uvijek iracionalan broj. Zbog toga je i broj $\frac{\sqrt{2}}{3}$ - kao količnik iracionalnoga broja i prirodnoga broja - iracionalan, a ne racionalan broj.
   Broj 3.456 jednak je broju $\frac{3456}{1000}=\frac{432}{125}$. Brojnik i nazivnik toga razlomka su prirodni brojevi, pa je taj broj racionalan, a ne iracionalan.

2. **A**. Dva realna broja su suprotna ako i samo ako je njihov zbroj jednak nuli. Dakle, točna jednakost je jednakost pod **A**.
   Jednakost **B**. je definicijska jednakost recipročnih realnih brojeva.
   Jednakosti **C**. i **D**. su ekvivalentne kad god je $b\neq 0$. One se pojavljuju prilikom definiranja pojma jednakosti dvaju realnih brojeva.

3. **A**. Imamo redom:

$$\begin{aligned}\left(-a^2\right)^3 &= \left((-1)\cdot a^2\right)^3 = \\ &= (-1)^3\cdot\left(a^2\right)^3 = \\ &= (-1)\cdot a^{2\cdot 3} = \\ &= -a^6.\end{aligned}$$

4. **D**. Koristeći jednakost

$$125=5^3$$

   dobivamo redom:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[4]{125}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \\ &= \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \\ &= 5^{\frac{-3}{4}}.\end{aligned}$$

5. B. Neka je C početna cijena ulaznice. Tada je cijena ulaznice nakon povećanja od 25% jednaka

$$\begin{aligned} C_1 &= C + \frac{25}{100} \cdot C = \\ &= \left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot C = \\ &= (1 + 0.25) \cdot C = \\ &= 1.25 \cdot C. \end{aligned}$$

Konačna cijena ulaznice treba biti za 15% veća u odnosu na početnu cijenu, odnosno

$$\begin{aligned} C_2 &= C + \frac{15}{100} \cdot C = \\ &= \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot C = \\ &= (1 + 0.15) \cdot C = \\ &= 1.15 \cdot C. \end{aligned}$$

Zbog toga je traženi postotak smanjenja jednak:

$$\begin{aligned} p &= \frac{100 \cdot (C_1 - C_2)}{C_1} = \\ &= \frac{100 \cdot (1.25 \cdot C - 1.15 \cdot C)}{1.25 \cdot C} = \\ &= \frac{100 \cdot (1.25 - 1.15) \cdot C}{1.25 \cdot C} = \\ &= \frac{100 \cdot 0.1}{1.25} = \\ &= \frac{10}{1.25} = \\ &= 8. \end{aligned}$$

6. C. Imamo redom:

$$\begin{aligned} (1 - 2 \cdot y)^2 &= ((-1) \cdot (2 \cdot y - 1))^2 = \\ &= (-1)^2 \cdot (2 \cdot y - 1)^2 = \\ &= 1 \cdot (2 \cdot y - 1)^2 = \\ &= (2 \cdot y - 1)^2. \end{aligned}$$

7. B. Drugo rješenje tražene kvadratne jednadžbe je

$$x_2=\frac{3+\sqrt{9-4\cdot c}}{2},$$

pa koristeći Vièteove formule dobivamo:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2&=\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}+\frac{3+\sqrt{9-4\cdot c}}{2}=\\
&=3,\\
x_1\cdot x_2&=\left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)=\\
&=\frac{\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)\cdot\left(3+\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{2\cdot 2}=\\
&=\frac{3^2-\left(\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{4}=\\
&=\frac{9-(9-4\cdot c)}{4}=\\
&=\frac{9-9+4\cdot c}{4}=\\
&=\frac{4\cdot c}{4}=\\
&=c.
\end{aligned}$$

Prema tome, tražena jednadžba je:

$$x^2-3\cdot x+c=0.$$

Napomena: Zadatak se alternativno mogao riješiti i ovako. Odredimo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)^2&=\frac{\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)^2}{2^2}=\\
&=\frac{3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{9-4\cdot c}+\left(\sqrt{9-4\cdot c}\right)^2}{4}=\\
&=\frac{9-6\cdot\sqrt{9-4\cdot c}+9-4\cdot c}{4}=\\
&=\frac{18-6\cdot\sqrt{9-4\cdot c}-4\cdot c}{4}=
\end{aligned}$$

$$=\frac{6\cdot\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)-4\cdot c}{4}=$$
$$=\frac{6\cdot\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{4}-\frac{4\cdot c}{4}=$$
$$=\frac{3\cdot\left(3-\sqrt{9-4\cdot c}\right)}{2}-c=$$
$$=3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)-c.$$

Odatle slijedi:

$$\left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{9-4\cdot c}}{2}\right)+c=0,$$

pa je tražena jednadžba

$$x^2-3\cdot x+c=0.$$

8. C. Primijetimo da zadana kvadratna jednadžba ima točno jedno rješenje

$$x=-6.$$

Kvadratna jednadžba ima točno jedno rješenje ako i samo ako je njezina diskriminanta jednaka nuli. Dakle, tražena vrijednost je jednaka 0.

9. C. Skup svih mogućih ishoda slučajnoga pokusa *bacanje kockice* je

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

On ima točno šest različitih elemenata, pa je

$$\text{card}(\Omega)=6.$$

Skup svih povoljnih ishoda je unija skupa svih neparnih prirodnih brojeva jednakih ili manjih od 6 i skupa svih prirodnih brojeva strogo manjih od 4:

$$A=\{1,3,5\}\cup\{1,2,3\}=$$
$$=\{1,2,3,5\}.$$

(Oprez: Prilikom ispisivanja svih elemenata unije dvaju skupova svaki element obavezno navodimo točno jednom.) On ima točno četiri različita elementa, pa je:

$$\text{card}(A) = 4.$$

Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \\ = \frac{4}{6} = \\ = \frac{2}{3}.$$

10. C. Nakon prvih pet odigranih utakmica ekipa je postigla ukupno

$$21 \cdot 5 = 105$$

golova. Da bi nakon šest odigranih utakmica prosječan broj golova po jednoj utakmici bio jednak 22, u tih šest utakmica ekipa mora postići ukupno

$$22 \cdot 6 = 132$$

gola. Tako zaključujemo da je traženi broj golova jednak:

$$132 - 105 = 27.$$

11. C. U $2022 - 2017 = 5$ godina godišnja proizvodnja meda se povećala za $150 - 50 = 100$ tona, odnosno za

$$\frac{100}{5} = 20$$

tona godišnje. To znači da se za godinu dana proizvodnja povećala za $1 \cdot 20$ tona, za dvije godine $2 \cdot 20$ tona, za tri godine $3 \cdot 20$ tona itd., pa zaključujemo da će se za t godina računajući od 2017. godine proizvodnja povećati za $t \cdot 20$ tona u odnosu na proizvodnju iz 2017. godine. Dakle, traženo pravilo je:

$$m(t) = 50 + 20 \cdot t = \\ = 20 \cdot t + 50, \ t \in \mathbb{N}.$$

Napomena: Budući da t označava vrijeme proteklo od 2017. godine, vrijednosti godišnje proizvodnje meda tvore aritmetički niz čiji je nulti član 50, a peti član 150. Razlika d toga niza jednaka je

$$d = \frac{150 - 50}{5} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{100}{5} = \\ &= 20, \end{aligned}$$

pa je traženo pravilo funkcije m

$$\begin{aligned} m(t) &= m(0) + t \cdot d = \\ &= 50 + t \cdot 20 = \\ &= 20 \cdot t + 50, \ t \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

12. B. Graf zadane funkcije je pravac čija je jednadžba

$$y = (-2) \cdot x + 4 .$$

Zapišimo tu jednadžbu u segmentnom obliku:

$$\begin{aligned} &2 \cdot x + y = 4, \quad / : 4 \\ &\frac{2 \cdot x}{4} + \frac{y}{4} = 1, \\ &\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da traženi pravac prolazi točkama (2, 0) i (0, 4). Jedini pravac koji ima to svojstvo prikazan je na slici B.

13. D. Koordinate točke T moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, pa imamo:

$$\begin{aligned} x - 5 \cdot 1 - 11 &= 0, \\ x - 5 - 11 &= 0, \\ x &= 5 + 11 = \\ &= 16. \end{aligned}$$

14. D. Završna točka zadanoga vektora $\vec{a}$ ima koordinate (4, 2). Budući da i vektor $\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$ ima ishodište pravokutnoga sustava u ravnini kao početnu točku, odmah zaključujemo da završna točka vektora $\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$ ima koordinate

$$\left(\frac{3}{2} \cdot 4, \frac{3}{2} \cdot 2 \right) = (6, 3).$$

15. D. Simetrale stranica svakoga trokuta sijeku se u središtu tom trokutu opisane kružnice.

Težište trokuta je sjecište težišnica trokuta.
Ortocentar trokuta je sjecište visina trokuta.
Središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala unutrašnjih kutova trokuta.

16. **B**. Omjer površine većega i površine manjega trokuta jednak je kvadratu koeficijenta sličnosti. Zbog toga je površina manjega trokuta jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \frac{80}{2^2} = \\ &= \frac{80}{4} = \\ &= 20 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

17. **B**. Spojimo dužinom vrhove kutova α i β. Dobivamo tetivu zadane kružnice kojoj pripadni središnji kut ima mjeru

$$360^\circ - 220^\circ = 140^\circ,$$

a pripadni obodni kut mjeru

$$\frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ.$$

Sada promotrimo četverokut čiji unutrašnji kutovi imaju mjere α, β, 220° i 70°. Zbroj mjera svih unutrašnjih kutova toga četverokuta mora biti jednak 360°, pa odmah dobivamo:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 220^\circ + 70^\circ &= 360^\circ, \\ \alpha + \beta &= 360^\circ - \left(220^\circ + 70^\circ\right) = \\ &= 360^\circ - 290^\circ = \\ &= 70^\circ. \end{aligned}$$

18. **B.** Najmanji kut trokuta nalazi se nasuprot najmanjoj stranici toga trokuta. U ovom je slučaju riječ o stranici, odnosno kateti duljine 11 cm jer je hipotenuza pravokutnoga trokuta dulja od svake katete zasebno.

Označimo li traženu mjeru s α, onda iz jednadžbe

$$\text{tg } \alpha = \frac{11}{17}$$

slijedi

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{11}{17}\right) \approx$$
$$\approx 0.57430483 \text{ rad.} \approx$$
$$\approx 32^{\circ}54'19''.$$

19. **C.** Osnovno svojstvo aritmetičkoga niza je da je svaki njegov član, osim prvoga, aritmetička sredina svojega prethodnika i svojega sljedbenika. Tako za niz **A.** imamo istinite jednakosti:

$$-2 = \frac{-5+1}{2},$$
$$1 = \frac{-2+4}{2},$$

za niz **B**. istinite jednakosti

$$-2 = \frac{-3+(-1)}{2},$$
$$-1 = \frac{-2+0}{2},$$

a za niz **D**. istinite jednakosti

$$1 = \frac{3+(-1)}{2},$$
$$-1 = \frac{1+(-3)}{2}.$$

Međutim, za niz **C.** vrijede relacije:

$$-1 \neq \frac{1+1}{2},$$
$$1 \neq \frac{(-1)+(-1)}{2},$$

pa taj niz nije aritmetički niz.

20. **D**. Sve četiri funkcije su prave racionalne funkcije. Prirodna domena racionalne funkcije je skup $\mathbb{R}$ ako i samo ako je nazivnik te funkcije različit od nule za svaku realnu vrijednost nezavisne varijable.

Vrijednost izraza $x-5$ jednaka je nuli ako i samo ako je $x=5$.
Vrijednost izraza $x+5$ jednaka je nuli ako i samo ako je $x=-5$.

Vrijednost izraza x^2-5 jednaka je nuli ako i samo ako je $x \in \{-5, 5\}$.

Vrijednost izraza x^2+5 nije jednaka nuli ni za jedan $x \in \mathbb{R}$. Ta je vrijednost jednaka ili veća od 5 jer je prvi pribrojnik nenegativan, a drugi jednak 5.

Dakle, funkcija pod **D**. ima skup $\mathbb{R}$ za svoju prirodnu domenu.

21. 1.) ≈ 13.2. Dijeljenjem prosječnoga polumjera Saturna prosječnim polumjerom Venere dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1.4294\cdot 10^9}{1.08208\cdot 10^8} &= \frac{1.4294}{1.08208}\cdot 10^{9-8} = \\ &= 1.32097442\cdot 10^1 = \\ &= 13.2097442 \approx \\ &\approx 13.2.\end{aligned}$$

2.) $4.3918\cdot 10^9$. Budući da su

$$\begin{aligned}108.2 \text{ milijuna } &= 108.2\cdot 10^6 = \\ &= 0.1082\cdot 10^3\cdot 10^6 = \\ &= 0.1082\cdot 10^9, \\ 4.5 \text{ milijardi} &= 4.5\cdot 10^9,\end{aligned}$$

tražena je razlika jednaka:

$$\begin{aligned}4.5\cdot 10^9 - 0.1082\cdot 10^9 &= (4.5-0.1082)\cdot 10^9 = \\ &= 4.3918\cdot 10^9 \text{ km.}\end{aligned}$$

22. 1.) $a\cdot b = x^2\cdot y^2$. Koristeći pravilo za množenje potencija s jednakim bazama imamo:

$$\begin{aligned}a\cdot b &= \left(\frac{1}{4}\cdot x^3\cdot y^{-1}\right)\cdot\left(4\cdot x^{-1}\cdot y^3\right) = \\ &= \left(\frac{1}{4}\cdot 4\right)\cdot\left(x^3\cdot x^{-1}\right)\cdot\left(y^{-1}\cdot y^3\right) = \\ &= 1\cdot x^{3+(-1)}\cdot y^{-1+3} = \\ &= x^2\cdot y^2.\end{aligned}$$

2.) $16\cdot x^{-6}\cdot y^2$. Koristeći pravilo za potenciranje potencije imamo redom:

$$\begin{aligned}a^{-2} &= \left(4^{-1}\cdot x^3\cdot y^{-1}\right)^{-2} = \\ &= 4^{(-1)\cdot(-2)}\cdot x^{3\cdot(-2)}\cdot y^{(-1)\cdot(-2)} =\end{aligned}$$

$$=4^2\cdot x^{-6}\cdot y^2=$$
$$=16\cdot x^{-6}\cdot y^2.$$

23.

1.) a^3+8 **ili** $8+a^3$. Primjenom formule za zbroj kubova odmah dobivamo:

$$\left(4-2\cdot a+a^2\right)\cdot(a+2)=\left(2^2-2\cdot a+a^2\right)\cdot(a+2)=$$
$$=2^3+a^3=$$
$$=8+a^3=$$
$$=a^3+8.$$

2.) $\frac{b^2}{2}$. Imamo redom:

$$\frac{b^2-3\cdot b}{2}:\frac{b-3}{b}=\frac{b\cdot(b-3)}{2}\cdot\frac{b}{b-3}$$
$$=\frac{b\cdot b}{2}=$$
$$=\frac{b^2}{2}.$$

24. 1.) 3; 2. Iz prve jednadžbe zaključujemo da mora vrijediti nejednakost $y\neq 0$. Zbog toga tu jednadžbu smijemo pomnožiti s y i dobiti:

$$3\cdot x+1=5\cdot y.$$

Iz druge jednadžbe je

$$y=2\cdot x-4.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u jednakost $3\cdot x+1=5\cdot y$ slijedi:

$$3\cdot x+1=5\cdot(2\cdot x-4),$$
$$3\cdot x+1=10\cdot x-20,$$
$$3\cdot x-10\cdot x=-20-1,$$
$$(-7)\cdot x=-21, \quad /:(-7)$$
$$x=3.$$

Uvrštavanjem $x=3$ u jednakost

$$y=2\cdot x-4$$

slijedi

$$\begin{aligned} y &= 2\cdot 3-4= \\ &= 6-4= \\ &= 2. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadanoga sustava je

$$(x, y)=(3,2).$$

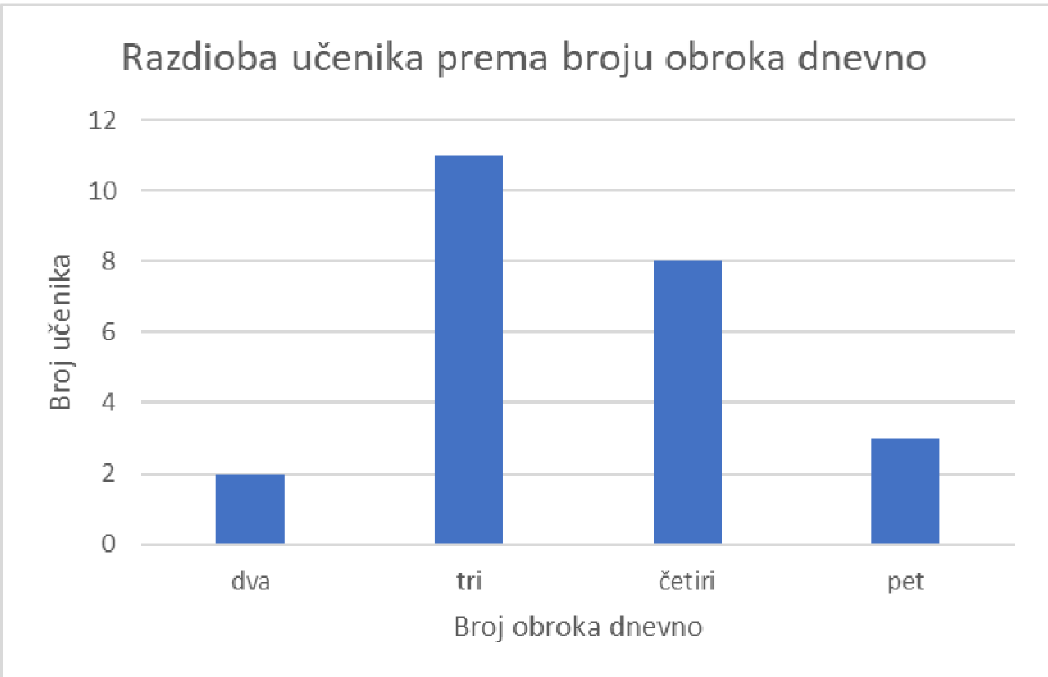
2.) 156. Iznos od 676 € podijelimo u omjeru 3 : 4 : 6. Pripadni omjerni koeficijent jednak je

$$\begin{aligned} k &= \frac{676}{3+4+6}= \\ &= \frac{676}{13}= \\ &= 52. \end{aligned}$$

Zbog toga je iznos koji je dobio Luka jednak

$$3\cdot 52=156\ €.$$

25. 1.) Vidjeti sliku 1. Treba nacrtati tri stupca. Visina svakoga od njih jednaka je pripadnom broju učenika. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

2.) $\frac{275}{3}\% = 91.\dot{6}\%$. Ukupan broj promatranih učenika jednak je

$$2+11+8+3=24.$$

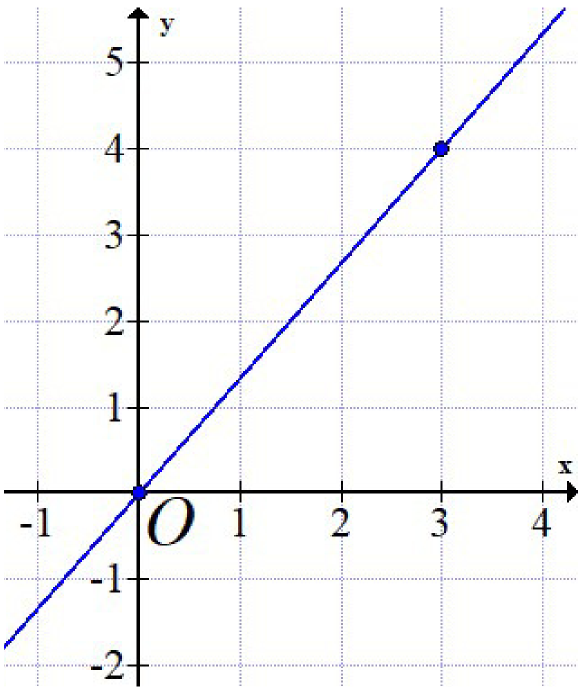
Broj učenika koji imaju točno dva obroka dnevno jednak je 2. Zbog toga je traženi postotak jednak:

$$\begin{aligned} p &= \frac{24-2}{24}\cdot 100 = \\ &= \frac{22}{24}\cdot 100 = \\ &= \frac{275}{3}\% = \\ &= 91.\dot{6}\%. \end{aligned}$$

26. 1.) **Vidjeti sliku 2.** Traženi pravac prolazi ishodištem jer je njegov odsječak na osi ordinata jednak 0. Za crtanje toga pravca potrebna je još (barem) jedna točka. Odaberemo npr. $x=3$, pa dobijemo:

$$y = \frac{4}{3}\cdot 3 = 4.$$

Ucrtamo točku (3, 4) u zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa je pravcem spojimo s ishodištem. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

2.) **Bilo koji pravac čija jednadžba ima ili oblik** $y=\frac{4}{3}\cdot x+l$ **ili oblik** $4\cdot x-3\cdot y+l=0$ **ili oblik** $\frac{x}{\frac{l}{4}}+\frac{y}{\frac{-l}{3}}=1$, **gdje je** $l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Traženi pravac ima koeficijent smjera jednak koeficijentu smjera zadanoga pravca, odnosno $\frac{4}{3}$. On **neće** prolaziti ishodištem ako i samo ako je njegov odsječak na osi ordinata različit od nule. Dakle, njegova jednadžba ima oblik

$$y=\frac{4}{3}\cdot x+l,$$

pri čemu je l realan broj različit od nule. Npr. $y=\frac{4}{3}\cdot x+1$ je jedan takav pravac.

Napomena: U zadatku se ne zahtijeva da tražena jednadžba pravca bude napisana u eksplicitnom obliku. Zbog toga ispravna rješenja zadatka predstavljaju i jednadžba $y=\frac{4}{3}\cdot x+l$ **zapisana u implicitnom obliku (taj oblik je** $4\cdot x-3\cdot y+l=0$**) i jednadžba** $y=\frac{4}{3}\cdot x+l$ **zapisana u segmentnom obliku (taj oblik je** $\frac{x}{\frac{l}{4}}+\frac{y}{\frac{-l}{3}}=1$**.)**

27. 1.) 9.6. Tražena je vrijednost (izražena u metrima) jednaka najvećoj vrijednosti funkcije *h*. Prvi pribrojnik u pravilu te funkcije je nepozitivan realan broj (jednak ili manji od nule). Njegova je najveća vrijednost jednaka 0 i postiže se za $x=8$. Tako zaključujemo da je tražena vrijednost jednaka

$$\begin{aligned} h_{\max} &= 0+9.6= \\ &=9.6. \end{aligned}$$

2.) 16. Tražena je vrijednost jednaka strogo pozitivnom rješenju jednadžbe

$$h(x)=0.$$

Naime, za $x=0$ lopta se nalazi na tlu jer je ispucana s tla. Zbog toga će $x=0$ sigurno biti jedno rješenje jednadžbe $h(x)=0$. Međutim, to rješenje ćemo zanemariti i potražiti rješenje koje je strogo veće od nule, odnosno strogo pozitivno rješenje.

Prilikom rješavanja jednadžbe koristit ćemo jednakost

$$\sqrt{a^2} = |a|, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&-0.15 \cdot (x-8)^2 + 9.6 = 0, \\
&-0.15 \cdot (x-8)^2 = -9.6, \quad / : (-0.15) \\
&(x-8)^2 = 64, \quad / \sqrt{\ } \\
&|x-8| = \sqrt{64}, \\
&|x-8| = 8, \\
&x-8 = 8 \text{ ili } x-8 = -8, \\
&x = 8+8 \text{ ili } x = -8+8, \\
&x = 16 \text{ ili } x = 0.
\end{aligned}$$

Kako smo i rekli, rješenje $x = 0$ zanemarujemo, pa preostaje $x = 16.$ Dakle, tražena je udaljenost jednaka 16 metara.

28. 1.) $\arcsin\left(\frac{5}{18} \cdot \sqrt{2}\right) \approx 0.40371469 \text{ rad.} \approx 23^\circ 7' 52''.$ Kut čija je mjera jednaka 135° može biti jedino nasuprot stranici trokuta čija je duljina 9 cm. Naime, znamo da se nasuprot većoj stranici trokuta nalazi kut veće mjere. Ako bi kut čija je mjera 135° bio nasuprot stranici duljine 5 cm, onda bi nasuprot stranici duljine 9 cm bio kut čija je mjera strogo veća od 135°. U tom slučaju bi zbroj kutova u zadanom trokutu bio strogo veći od $135^\circ + 135^\circ = 270^\circ$, što je suprotno jednom od osnovnih svojstava svakoga trokuta (zbroj mjera svih unutrašnjih kutova u trokutu jednak je 180°). Odatle slijedi prva tvrdnja u ovom odjeljku.

Radi određenosti, uz standardne pretpostavke vezane uz oznake u trokutu (nasuprot stranici duljine a nalazi se kut mjere α itd.), označimo:

$$\begin{aligned}
&a = 5, \\
&b = 9, \\
&\beta = 135^\circ.
\end{aligned}$$

Primjenom teorema o sinusima (sinusova teorema) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{9}{\sin 135^\circ}, \\
&\sin\alpha = \frac{5}{9} \cdot \sin 135^\circ,
\end{aligned}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\alpha = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{18}.$$

Kut α mora biti šiljast jer nijedan trokut ne može imati barem dva tupa kuta (a zadani trokut već ima tupi kut čija je mjera 135°). Zbog toga je

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{5}{18}\cdot\sqrt{2}\right) \approx$$
$$\approx 0.40371469 \text{ rad.} \approx$$
$$\approx 23^\circ 7' 52''.$$

2.) $\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$. Povučena visina na treću stranicu zadanoga trokuta i manja stranica zadanoga trokuta su kateta, odnosno hipotenuza pravokutnoga trokuta. Mjera kuta nasuprot povučenoj visini u tom pravokutnom trokutu jednaka je

$$\delta = 180^\circ - 135^\circ =$$
$$= 45^\circ.$$

Tako odmah slijedi da je tražena duljina visine na treću stranicu zadanoga trokuta jednaka

$$v_c = a\cdot\sin\delta =$$
$$= 5\cdot\sin 45^\circ =$$
$$= \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2} \text{ cm.}$$

29. 1.) 4620. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su katete zadanoga pravokutnoga trokuta označene tako da vrijedi nejednakost $a \le b$. Primjenom Pitagorina teorema najprije odredimo duljinu druge (kraće) katete (iskazanu u cm):

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} =$$
$$= \sqrt{37^2 - 35^2} =$$
$$= \sqrt{1369 - 1225} =$$
$$= \sqrt{144} =$$
$$= 12.$$

Tako odmah slijedi da je traženi volumen prizme jednak:

$$V = B \cdot h = \frac{a \cdot b}{2} \cdot h = \frac{12 \cdot 35}{2} \cdot 22 = 4620 \text{ cm}^3.$$

2.) 2520 · π. Rotacijom zadanoga trokuta oko njegove kraće katete nastaje uspravni kružni stožac. Njegov je polumjer osnovke jednak duljoj kateti, visina jednaka kraćoj kateti, a izvodnica jednaka hipotenuzi zadanoga trokuta. Zbog toga je traženo oplošje jednako:

$$\begin{aligned} O &= B + P = \\ &= b^2 \cdot \pi + b \cdot \pi \cdot c = \\ &= 35^2 \cdot \pi + 35 \cdot \pi \cdot 37 = \\ &= 1225 \cdot \pi + 1295 \cdot \pi = \\ &= 2520 \cdot \pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

30. 1.) $x = 4$. Uočimo da je prirodna domena zadane funkcije skup $\mathbb{R}$. Zbog toga trebamo odrediti sva realna rješenja jednadžbe:

$$f(x) = 0.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned} &10^{2 \cdot x - 8} - 1 = 0, \\ &10^{2 \cdot x - 8} = 1, \\ &10^{2 \cdot x - 8} = 10^0, \\ &2 \cdot x - 8 = 0, \\ &2 \cdot x = 8, \quad / : 2 \\ &x = 4. \end{aligned}$$

Dakle, zadana funkcija ima točno jednu nultočku i to je $x = 4$.

2.) $\langle -1, +\infty \rangle$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &10^{2 \cdot x - 8} > 0, \\ &10^{2 \cdot x - 8} - 1 > 0 - 1, \\ &f(x) > -1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da je tražena slika interval $\langle -1, +\infty \rangle$.