TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	**Matematika na državnoj maturi**	**rješenja probnoga ispita iz travnja 2022. (osnovna razina)**

1. **B**. Broj –2 pripada skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. $0.3=\frac{3}{10}$ je racionalan broj jer se može zapisati u obliku $\frac{m}{n}$, gdje su $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$. 1 je prirodan broj. Međutim, 0 nije iracionalan broj. 0 pripada skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, pa samim tim i skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Dakle, tvrdnja **B** nije istinita.

2. **C.** Računamo:

$$\sqrt{45}\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{45^3}\cdot\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[6]{45^3\cdot 6^2}=\sqrt[6]{91125\cdot 36}=\sqrt[6]{3280500}\approx 12.18961551\approx 12.19.$$

3. **D**. Tražena je vrijednost jednaka razlici 13.8 milijardi i 4.5 milijardi. Budući da je 1 milijarda jednaka 10^9, slijedi:

$$\Delta t=(13.8-4.5)\cdot 10^9=9.3\cdot 10^9=9.3\cdot 10^3\cdot 10^6=9300\cdot 10^6.$$

Dakle, od nastanka svemira do nastanka Zemlje prošlo je $9300\cdot 10^6$ godina.

4. **D**. Uvrstimo koordinate svake točke u zadanu jednadžbu pravca, pa provjerimo u kojemu ćemo slučaju dobiti istinitu jednakost. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&0=2\cdot(-1)-1\Leftrightarrow 0=-3,\\
&2=2\cdot(-1)-1\Leftrightarrow 2=-3,\\
&1=2\cdot 0-1\Leftrightarrow 1=-1,\\
&1=2\cdot 1-1\Leftrightarrow 1=1.
\end{aligned}$$

Primjećujemo da smo istinitu jednakost dobili u slučaju točke $(1,1)$, pa zaključujemo da ta točka pripada zadanom pravcu.

5. **A**. Razlika d zadanoga aritmetičkoga niza jednaka je razlici drugoga i prvoga člana toga niza:

$$d=a_2-a_1=2-(-7)=9.$$

Zbog toga je traženi peti član niza jednak

$$a_5=a_1+(5-1)\cdot d=-7+4\cdot 9=-7+36=29.$$

6. **D**. Prosječna mjesečna temperatura zraka u prosincu iznosila je $-6^\circ\mathrm{C}$, dok je prosječna mjesečna temperatura zraka u veljači iznosila $-8^\circ\mathrm{C}$. Dakle, u prosincu je u prosjeku bilo za $2^\circ\mathrm{C}$ toplije nego u veljači, pa odatle zaključujemo da tvrdnja **A** za navedeni grad nije točna.

Četiri prosječno najtoplija mjeseca su svibanj, lipanj, srpanj i kolovoz. U svibnju je prosječna mjesečna temperatura zraka bila manja od $14^\circ\mathbf{C}$, dok je u svakom od ostalih triju mjeseci prosječna mjesečna temperatura zraka bila veća od $14^\circ\mathbf{C}$. Odatle zaključujemo da tvrdnja **B** za navedeni grad nije točna.

Neka je T_i prosječna mjesečna temperatura zraka u i-tom mjesecu, za svaki $i = 1, 2, ..., 12$. Iz zadanoga grafikona zaključujemo da vrijede (ne)jednakosti:

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2, x_3, x_{11}, x_{12} < 0,\\
&x_4 = 6,\\
&x_5 < 14,\\
&x_6, x_7, x_8 \le 18,\\
&x_9 < 12,\\
&x_{10} < 6.
\end{aligned}$$

Zbrojimo posebno lijeve, a posebno desne strane tih (ne)jednakosti:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} + x_{11} + x_{12} < 5 \cdot 0 + 6 + 14 + 18 + 12 + 6 = 56, \quad /:12\\
&\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} + x_{11} + x_{12}}{12} < \frac{56}{12} < \frac{60}{12} = 5 < 15.
\end{aligned}$$

Dakle, prosječna godišnja temperatura zraka u tom gradu bila je strogo manja od $5^\circ\mathbf{C}$, a time i od $15^\circ\mathbf{C}$. Zbog toga ni tvrdnja **C** za navedeni grad nije točna.

Najhladniji mjesec je siječanj (prvi mjesec) i za njegovu prosječnu mjesečnu temperaturu zraka vrijedi nejednakost $-10 < x_1 < -8$. Najtopliji mjesec je srpanj (sedmi mjesec) i za njegovu prosječnu mjesečnu temperaturu zraka vrijedi jednakost $x_7 = 18$. Iz tih dviju relacija dobivamo:

$$\begin{aligned}
&8 < -x_1 < 10,\\
&18 + 8 < x_7 - x_1 < 18 + 10,\\
&26 < x_7 - x_1 < 28.
\end{aligned}$$

Dakle, razlika u prosječnoj temperaturi najtoplijega i najhladnijega mjeseca bila je strogo veća od $26^\circ\mathbf{C}$, a time i od $22^\circ\mathbf{C}$. Zbog toga je tvrdnja **D** točna.

7. B. Uočimo da je $z(0) = 900 - 10 \cdot 0 = 900$. To znači da cijena svjetiljke iznosi 900 kn u trenutku kad je do kraja aukcije preostalo 0 minuta, tj. kad je aukcija završena. Odatle zaključujemo da konačna cijena svjetiljke iznosi 900 kn.

8. C. Početna točka vektora $\vec{v}$ je $(3,12)$, a krajnja $(9,3)$. Zbog toga je tražena duljina jednaka

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(9-3)^2+(3-12)^2} = \sqrt{6^2+(-9)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ jed. duljine.}$$

9. C. Središte svakom trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala njegovih unutrašnjih kutova. Udaljenost toga sjecišta od svake stranice trokuta jednaka je duljini polumjera upisane kružnice. Dakle, tražena je točka sjecište simetrala unutrašnjih kutova toga trokuta.

10. D. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$c = \sqrt{7^2+18^2-2\cdot 7\cdot 18\cdot\cos\left(158^\circ\right)} = \sqrt{49+324-252\cdot\cos\left(158^\circ\right)} =$$
$$= \sqrt{373-252\cdot\cos\left(158^\circ\right)} \approx 24.630272661 \approx 24.6 \text{ cm.}$$

11. C. Prisjetimo se da su dijagonale svakoga romba međusobno okomite. Dijagonala povučena iz bilo kojega vrha toga romba je ujedno i simetrala pripadnoga kuta. Označimo li traženu mjeru kuta s α, dobivamo:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{26}{2}}{\frac{38}{2}} = \frac{13}{19},$$
$$\alpha = 2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{13}{19}\right) \approx 1.2001 \text{ rad.} = \frac{1.2001\cdot 180^\circ}{\pi} \approx 68.76^\circ = 68^\circ 45' 6'' \approx 68^\circ 46'.$$

12. C. Neka je a duljina brida kocke (iskazana u cm). Dijagonalni presjek kocke je pravokutnik čije su stranice duge a i $a\cdot\sqrt{2}$. Njegova je površina jednaka $P = a\cdot a\cdot\sqrt{2} = a^2\cdot\sqrt{2}$, pa iz jednadžbe

$$a^2\cdot\sqrt{2} = 64\cdot\sqrt{2}$$

slijedi $a^2 = 64$, odnosno $a = \sqrt{64} = 8$. Dakle, tražena duljina brida kocke je 8 cm.

13. B. Imamo redom:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{2\cdot x-2\cdot y} = \frac{1}{x-y}+\frac{1}{2\cdot(x-y)} = \frac{1}{x-y}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x-y}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2\cdot(x-y)}.$$

14. D. Imamo redom:

$$2\cdot a^3-3\cdot a^2-18\cdot a+27=a^2\cdot(2\cdot a-3)-9\cdot(2\cdot a-3)=(2\cdot a-3)\cdot\left(a^2-9\right)=$$
$$=(2\cdot a-3)\cdot\left(a^2-3^2\right)=(2\cdot a-3)\cdot(a-3)\cdot(a+3).$$

Primjećujemo da se u dobivenoj faktorizaciji ne pojavljuje član $2\cdot a+3$, pa je taj binom ispravno rješenje zadatka.

15. C. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&6^x=12, \quad /\log\\
&\log\left(6^x\right)=\log 12,\\
&x\cdot\log 6=\log 12, \quad /:\log 6\\
&x=\frac{\log 12}{\log 6}\approx 1.3868528072\approx 1.39.
\end{aligned}$$

16. D. Ukupan broj načina na koji n ljudi može sjesti oko okrugloga stola jednak je $(n-1)!$. Dakle, ukupan broj svih mogućih ishoda jednak je $(4-1)!=3!=6$.

Ukupan broj povoljnih ishoda dobit ćemo shvatimo li Anu i Jakova kao jedan „objekt“, a sve ostale kao zasebne „objekte“. Dakle, imamo ukupno tri „objekta“ koje razmještamo za okrugli stol. To možemo napraviti na $(3-1)!=2!=2$ načina. Potom Anu i Jakova razdvojimo i razmjestimo na preostala slobodna mjesta na ukupno 2 načina. Dakle, ukupan broj povoljnih ishoda jednak je $2\cdot 2=4$.

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

17. A. Neka su $č$ i k redom cijena jednoga čaja, odnosno cijena jedne kave. Cijena 5 kava i 2 čaja iznosi $5\cdot k+2\cdot č$ kn. Analogno, cijena 3 kave i 4 čaja iznosi $3\cdot k+4\cdot č$ kn, a cijena 3 kave i 12 čajeva $3\cdot k+12\cdot č$ kn. Prema zadanim podacima dobivamo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}5\cdot k+2\cdot č=(3\cdot k+4\cdot č)+6,\\ 3\cdot k+12\cdot č=2\cdot(3\cdot k+4\cdot č).\end{cases}$$

Riješimo taj sustav na uobičajen način. Imamo redom:

$$\begin{cases}2\cdot k-2\cdot č=6,\\ 3\cdot k=4\cdot č\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k-č=3,\\ k=\frac{4}{3}\cdot č\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{3}\cdot č-č=3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot č=3\Leftrightarrow č=9.$$

18. A. Neka su a, b i c redom polazna duljina, širina i visina staroga akvarija. Neka je c_1 visina novoga akvarija. Budući da volumen akvarija mora ostati nepromijenjen, mora vrijediti jednakost:

$$a \cdot b \cdot c = \left(a + \frac{1}{3} \cdot a\right) \cdot \left(b - \frac{40}{100} \cdot b\right) \cdot c_1.$$

Iz te jednakosti redom slijedi:

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot b \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) \cdot c_1,$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right)\right) \cdot c_1, \quad / : (a \cdot b)$$

$$c = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot c_1,$$

$$c = \frac{4}{5} \cdot c_1, \quad / : \frac{4}{5}$$

$$c_1 = \frac{5}{4} \cdot c = 1.25 \cdot c = c + 0.25 \cdot c = c + \frac{25}{100} \cdot c = c + 25\% \cdot c.$$

Dakle, visina novoga akvarija je za 25% veća od visine staroga akvarija.

19. B. Primijenit ćemo činjenicu da je prva koordinata tjemena parabole $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ aritmetička sredina nultočaka kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Naime, ta je koordinata jednaka $x_T = \frac{-b}{2 \cdot a}$, dok prema Viète ovim formulama vrijedi $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$. Iz te dvije jednakosti slijedi $x_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$, a to smo i tvrdili.

Iz jednadžbe parabole lagano očitamo nultočke pripadne kvadratne funkcije. To su $x_1 = 3,\ x_2 = -k$. Tako iz jednadžbe

$$\frac{3 + (-k)}{2} = 5$$

slijedi

$$k = 3 - 10 = -7.$$

20. B. Prvi pribrojnik ima ukupno $1 + (n+1) = n + 2$ znamenaka od kojih je prva 5, a posljednja nula. Drugi pribrojnik ima ukupno $1 + (n-1) = n$ znamenaka od kojih je

prva 3, a posljednja nula. Treći pribrojnik je jednak 7. Zbroj tih triju pribrojnika ima ukupno $n+2$ znamenaka od kojih je prva 5, a posljednja 7. Dakle, traženi broj je jednak $n+2$.

21.1.) -1. Imamo redom:

$$\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(5-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5\cdot 3-2}{3}=\frac{8}{5}-\frac{15-2}{5}=\frac{8}{5}-\frac{13}{5}=\frac{-5}{5}=-1.$$

2.) **Da; da.** Vrijede nejednakosti:

$$\pi>3.141>3.14,$$
$$\frac{7}{4}=1.75>1.74.$$

Dakle, obje nejednakosti su istinite.

22.1.) **3**. Unija zadanih intervala je interval $\langle -7,-3\rangle$. U tom se intervalu nalaze točno tri cijela broja: $-6,-5$ i -4. Dakle, traženi je broj jednak 3.

2.) $\pm\sqrt{s^2-r^2}$. Imamo redom:

$$r=\sqrt{s^2-p^2},\quad /^2$$
$$r^2=s^2-p^2,$$
$$p^2=s^2-r^2,\quad /\sqrt{\ }$$
$$p=\pm\sqrt{s^2-r^2}.$$

23.1.) $3\cdot a^2-1$. Odmah dobivamo:

$$2\cdot a^2+\frac{1}{a^{-2}}-a^0=2\cdot a^2+a^2-1=3\cdot a^2-1.$$

2.) $a^{\frac{25}{6}}$. Imamo redom:

$$\sqrt[3]{a^2}:\sqrt{a^{-7}}=a^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{-7}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{2}\right)}=a^{\frac{2}{3}+\frac{7}{2}}=a^{\frac{2\cdot 2+3\cdot 7}{6}}=a^{\frac{4+21}{6}}=a^{\frac{25}{6}}.$$

24.1.) **15 225.** Iz podatka da je dobit podijeljena u omjeru 8 : 9 : 12 zaključujemo da postoji jedinstven $k>0$ takav da dijelovi iznose $8\cdot k$, $9\cdot k$ i $12\cdot k$. Najveći od njih je $12\cdot k$, a najmanji $8\cdot k$. Njihova razlika treba biti jednaka 2100 kn, pa dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom

$$12\cdot k-8\cdot k=2100.$$

Odatle je $4\cdot k=2100,$ odnosno $k=\frac{2100}{4}=525.$ Sada lako izračunamo ukupnu dobit:

$$D=8\cdot k+9\cdot k+12\cdot k=29\cdot k=29\cdot 525=15\ 225\ \text{kn}.$$

2.) $542\ 373.\dot{3}\ \text{AJ}\approx 5.4\cdot 10^5\,\text{AJ}.$. Iz zadanih podataka zaključujemo:

$$1\ \text{gs}=9.46\cdot 10^{12}\text{km}=\frac{9.46\cdot 10^{12}}{1.5\cdot 10^8}\text{AJ}=\frac{946}{150}\cdot 10^4\,\text{AJ}=\frac{473}{75}\cdot 10^4\,\text{AJ},$$

$$8.6\ \text{gs}=8.6\cdot\frac{473}{75}\cdot 10^4\,\text{AJ}=542\ 373.\dot{3}\ \text{AJ}\approx 5.4\cdot 10^5\,\text{AJ}.$$

25.1.) $\langle -5,5\rangle$. Primijetimo da je funkcija $f(x)=(x-5)\cdot(x+5)$ polinom 2. stupnja kojemu je vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) strogo pozitivan. Ta funkcija poprima strogo negativne vrijednosti na otvorenom intervalu određenom njezinim nultočkama. Iz jednadžbi $x-5=0$ i $x+5=0$ lako slijede $x_1=-5,\ x_2=5,$ pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe $\langle -5,5\rangle$.

2.) Manje od 21 000 cvjetova. Neka je n broj cvjetova prodan 2020. godine. Tada je broj cvjetova prodan 2019. godine jednak $\frac{1}{5}\cdot n,$ dok je broj cvjetova prodan 2021. godine jednak $n+\frac{1}{5}\cdot n+\frac{3}{4}\cdot\left(n+\frac{1}{5}\cdot n\right).$ Ukupan broj cvjetova prodanih u svim trima godinama je

$$\frac{1}{5}\cdot n+n+n+\frac{1}{5}\cdot n+\frac{3}{4}\cdot\left(n+\frac{1}{5}\cdot n\right)=\left(n+\frac{1}{5}\cdot n\right)\cdot\left(1+1+\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{5}\cdot n\cdot\frac{11}{4}=\frac{33}{10}\cdot n.$$

Iz nejednadžbe $\frac{33}{10}\cdot n<69300$ slijedi $n<69300\cdot\frac{10}{33}=21000.$ Dakle, 2020. godine prodano je manje od 21 000 cvjetova.

26.1.) **84**. Prema Pitagorinu poučku, duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta čije su katete duge 5 i 12 jednaka je

$$c=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13.$$

Prema istomu poučku zaključujemo da je tražena vrijednost t jednaka:

$$t=\sqrt{85^2-13^2}=\sqrt{7225-169}=\sqrt{7056}=84.$$

2.) $\approx 29^\circ 35' 37''$. Nijedan od preostalih kutova trokuta ne može imati mjeru strogo veću od 99° jer bi u suprotnom zbroj svih triju mjera kutova trokuta bio strogo veći od $2 \cdot 99^\circ = 198^\circ$, što je nemoguće. (Zbroj tih mjera mora biti jednak 180°.) Dakle, kut čija je mjera 99° je najveći kut trokuta i nalazi se nasuprot najduljoj stranici trokuta. Kut čiju mjeru tražimo nalazi se nasuprot najkraćoj stranici trokuta. Označimo li njegovu mjeru s α, primjenom sinusova poučka zaključujemo da se sinusi najvećega i najmanjega kuta trokuta odnose kao duljine tim kutovima nasuprotnih stranica. Prema podacima u zadatku, taj je omjer jednak 2 : 1, pa dobivamo redom:

$$\frac{\sin 99^\circ}{\sin \alpha} = 2,$$
$$\sin \alpha = \frac{\sin 99^\circ}{2},$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin 99^\circ}{2}\right) \approx 29.59356246^\circ \approx 29^\circ 35' 37''.$$

27.1.) 58. Traženi je broj jednak zbroju apsolutnih frekvencija koje odgovaraju plavim stupcima. Te frekvencije redom iznose 13, 28 i 17, pa je njihov zbroj jednak

$$13 + 28 + 17 = 58.$$

2.) $4.61\overline{36} \approx 4.61$. Traženu prosječnu ocjenu, tj. aritmetičku sredinu svih ocjena maturanata, dobit ćemo tako da apsolutnu frekvenciju svake ocjene (koju možemo pročitati iz stupčastoga dijagrama) pomnožimo s tom ocjenom, zbrojimo dobivene rezultate i podijelimo ih sa zbrojem apsolutnih frekvencija. Dakle, imamo:

$$s = \frac{29 \cdot 5 + 13 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{29 + 13 + 2} = \frac{145 + 52 + 6}{44} = \frac{203}{44} = 4.61\overline{36} \approx 4.61.$$

28.1.) $4 \cdot x + y - 1 = 0$ **ili** $y = (-4) \cdot x + 1$**.** Jednadžba traženoga pravca ima oblik $4 \cdot x + y + C = 0$, gdje je $C \in \mathbb{R}$. Budući da pravac mora prolaziti točkom $(-1, 5)$, uvrstimo koordinate te točke u jednadžbu pravca, pa dobivamo:

$$4 \cdot (-1) + 5 + C = 0,$$
$$C = -5 + 4 = -1.$$

Dakle, traženi je pravac

$$p \ldots\ 4 \cdot x + y - 1 = 0,$$
$$y = (-4) \cdot x + 1.$$

2.) $-9\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}$. Imamo redom:

$$\vec{a}+2\cdot\vec{b}-3\cdot\vec{c}=4\cdot\vec{i}+2\cdot\left((-2)\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)-3\cdot\left(3\cdot\vec{i}-\vec{j}\right)=$$
$$=4\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-9\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}=-9\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}.$$

29.1.) $3\cdot x-1$. Iz tablice očitamo da je $f(0)=-1$. Međutim, $f(0)=k\cdot 0+l=0+l=l$, pa izjednačavanjem dobivenih jednakosti slijedi $l=-1$.

Nadalje, očitamo da je $f(2)=5$. Međutim, $f(2)=k\cdot 2+l=2\cdot k+l$, pa izjednačavanjem dobivenih jednakosti slijedi $2\cdot k+l=5$.

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} l=-1, \\ 2\cdot k+l=5. \end{cases}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobivamo $2\cdot k-1=5$, a odatle je $k=\frac{6}{2}=3$.

Dakle, traženo pravilo funkcije f glasi: $f(x)=3\cdot x-1$.

2.) $\langle 3,+\infty\rangle$. Logaritamska funkcija je definirana ako i samo ako je logaritmand strogo pozitivan realan broj. Izraz x^2+1 je strogo pozitivan za svaki $x\in\mathbb{R}$, pa zaključujemo da mora vrijediti nejednakost

$$x-3>0.$$

Odavde je $x>3$, pa je tražena prirodna domena $\langle 3,+\infty\rangle$.

30.1.) $-5\cdot a^2+2468\cdot a$. Imamo redom:

$$(1234-2\cdot a)\cdot(1234+2\cdot a)-(a-1234)^2=$$
$$=1234^2-(2\cdot a)^2-\left(a^2-2\cdot a\cdot 1234+1234^2\right)=$$
$$=1234^2-4\cdot a^2-a^2+2468\cdot a-1234^2=$$
$$=-5\cdot a^2+2468\cdot a.$$

2.) $\frac{24}{5}=4.8$. Neka su $A_1, B_1\in\overline{BC}$, $C_1\in\overline{AC}$, $D_1\in\overline{AB}$ vrhovi upisanoga kvadrata. Površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokutova BA_1D_1, B_1CC_1, C_1D_1A i površine kvadrata $A_1B_1C_1D_1$. Označimo $a:=\left|\overline{A_1B_1}\right|=\left|\overline{B_1C_1}\right|=\left|\overline{C_1D_1}\right|=\left|\overline{D_1A_1}\right|$. Prema podacima u zadatku vrijede i jednakosti $\left|\overline{BC}\right|=12$, $v_{\overline{BC}}=8$. Tako redom dobivamo:

$$P_{BA_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BA_1}\right| \cdot \left|\overline{A_1D_1}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BA_1}\right| \cdot a,$$

$$P_{B_1CC_1} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{B_1C}\right| \cdot \left|\overline{B_1C_1}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{B_1C}\right| \cdot a,$$

$$P_{AC_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{C_1D_1}\right| \cdot v_{\overline{C_1D_1}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(v_{\overline{BC}} - a\right) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (8 - a),$$

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = a^2,$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BC}\right| \cdot v_{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Zbog toga je:

$$48 = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BA_1}\right| \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{B_1C}\right| \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (8 - a) + a^2,$$

$$48 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\left|\overline{BA_1}\right| + \left|\overline{B_1C}\right|\right) + 4 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a^2 + a^2,$$

$$48 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\left|\overline{BC}\right| - \left|\overline{A_1B_1}\right|\right) + 4 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2,$$

$$48 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (12 - a) + 4 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2,$$

$$48 = 6 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a^2 + 4 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2,$$

$$10 \cdot a = 48,$$

$$a = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} = 4.8.$$

Dakle, duljina stranice upisanoga kvadrata iznosi 4.8 cm.

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač