VELEUČILIŠTE U POŽEGI

SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ TRGOVINSKO POSLOVANJE

SEMINARSKI RAD IZ PREDMETA KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

PRIMJENA INPUT-OUTPUT ANALIZE I LINEARNOGA PROGRAMIRANJA NA PROBLEME IZ TRGOVINSKOGA POSLOVANJA

MENTOR: mr. sc. Bojan Kovačić

STUDENT: Maja Validžić, indeks 43

U Požegi, siječanj 2012.

Sadržaj:

1. Uvod

U ovom seminarskom radu obrađene su dvije primjene kvantitativnih metoda na probleme iz područja trgovinskoga poslovanja. Prva primjena odnosi se na input–output analizu, a druga na rješavanje problema iz područja trgovinskoga poslovanja metodama linearnoga programiranja. U rješavanju zadataka korišteni su računalni programi *Eigenmath* i *WinQSB*.

2. Input–output analiza

2.1. Zadatak

Zadana je input-output tablica trosektorske ekonomije Kraljevine Niškoristije:

Q_i	Q_{ij}			q_{ij}
300	90	80	x	70
350	80	y	90	80
400	z	90	150	90

a) Dopunite tablicu podatcima koji nedostaju. Interpretirajte svaki od nedostajućih podataka.

b) Novim gospodarskim planom u drugom sektoru predviđeno je smanjenje ukupnoga outputa u prvom sektoru za 25%, povećanje ukupne finalne potražnje u drugom sektoru za 20%, te povećanje ukupnoga outputa u trećem sektoru za 10%. Sastavite novu input-output tablicu. (Napišite analitičke izraze pomoću kojih ste računali svaki pojedini element. Ukoliko je potrebno, rezultate u traženoj input-output tablici zaokružite na dvije decimale.)

2.2. Rješenje

a) Odredimo nepoznate elemente x, y i z:

$x = 300 - (90 + 80 + 70) = 60$ $\qquad$ $Q_{13} = 60$

$y = 350 - (80 + 90 + 80) = 100$ $\qquad$ $Q_{22} = 100$

$z = 400 - (90 + 150 + 90) = 70$ $\qquad$ $Q_{31} = 70$

Q_i	Q_{ij}			q_{ij}
300	90	80	60	70
350	80	100	90	80
400	70	90	150	90

Q_{13} = 60 - količina proizvoda iz sektora 1 koja prelazi u sektor 3 radi normalnog odvijanja procesa proizvodnje u tom sektoru

Q_{22} = 100 - količina proizvoda koja ostaje u tom sektoru radi normalnog odvijanja procesa proizvodnje

Q_{31} = 70 - količina proizvoda iz sektora 3 koja prelazi u sektor 1 radi normalnog odvijanja procesa proizvodnje u tom sektoru.

b) Računamo elemente matrice normativa A:

$$a_{11} = \frac{Q_{11}}{Q_1} = \frac{90}{300} = 0.3$$

$$a_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_2} = \frac{80}{350} = 0.23$$

$$a_{13} = \frac{Q_{13}}{Q_3} = \frac{60}{400} = 0.15$$

$$a_{21} = \frac{Q_{21}}{Q_1} = \frac{80}{300} = 0.27$$

$$a_{22} = \frac{Q_{22}}{Q_2} = \frac{100}{350} = 0.29$$

$$a_{23} = \frac{Q_{23}}{Q_3} = \frac{90}{400} = 0.23$$

$$a_{31} = \frac{Q_{31}}{Q_1} = \frac{70}{300} = 0.23$$

$$a_{32} = \frac{Q_{32}}{Q_2} = \frac{90}{350} = 0.26$$

$$a_{33} = \frac{Q_{33}}{Q_3} = \frac{150}{400} = 0.38$$

Tako se dobije:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.23 & 0.15 \\ 0.27 & 0.29 & 0.23 \\ 0.23 & 0.26 & 0.38 \end{bmatrix}$$

Smanjenjem ukupnog outputa u 1. sektoru za 25% dobije se novi ukupni output toga sektora:

$$Q_1 = 300 - \frac{25}{100} \cdot 300 = 225$$

Povećanjem ukupne finalne potražnje u 2. sektoru za 20% dobije se nova finalna potražnja toga sektora:

$$q_2 = 80 + \frac{20}{100} \cdot 80 = 96$$

Povećanjem ukupnoga outputa u 3. sektoru za 10% dobije se novi ukupni output toga sektora:

$$Q_3 = 400 + \frac{10}{100} \cdot 400 = 440$$

Označimo:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Računamo matricu tehnologije T prema formuli: $T = E - A$. Dobijemo:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.23 & -0.15 \\ -0.27 & 0.71 & -0.23 \\ -0.23 & -0.26 & 0.62 \end{bmatrix}$$

Novi vektor ukupnih outputa je:

$$Q = \begin{bmatrix} 225 \\ x \\ 440 \end{bmatrix}$$

Računamo vektor novih ukupnih finalnih potražnji prema formuli: $q = T \cdot Q$. Dobijemo:

$$q = \begin{bmatrix} 91.5 - 0.23 \cdot x \\ -161.95 + 0.71 \cdot x \\ 221.05 - 0.26 \cdot x \end{bmatrix}$$

Prema uvjetima zadatka, druga komponenta ovog vektora treba biti jednaka 96. Stoga nepoznanicu x određujemo iz jednadžbe:

$$-161.95 + 0.71 \cdot x = 96$$

$$0.71 \cdot x = 96 + 161.95$$

$$0.71 \cdot x = 257.95 / 0.71$$

$$x = 363.31$$

Dakle, novi vektor ukupnih outputa je:

$$Q = \begin{bmatrix} 225 \\ 363.31 \\ 440 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti x u vektor q slijedi:

$$q = \begin{bmatrix} 91.5 - 0.23 \cdot 363.31 \\ 96 \\ 221.05 - 0.26 \cdot 363.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.94 \\ 96 \\ 126.59 \end{bmatrix}.$$

Računamo nove vrijednosti veličina Q_{ij} prema formuli $Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j$:

$$Q_{11} = a_{11} \cdot Q_1 = 0{,}3 \cdot 225 = 67{,}5$$
$$Q_{12} = a_{12} \cdot Q_2 = 0{,}23 \cdot 363{,}31 = 83{,}56$$
$$Q_{13} = a_{13} \cdot Q_3 = 0{,}15 \cdot 440 = 66$$

$$Q_{21} = a_{21} \cdot Q_1 = 0{,}27 \cdot 225 = 60{,}75$$
$$Q_{22} = a_{22} \cdot Q_2 = 0{,}29 \cdot 363{,}31 = 105{,}36$$
$$Q_{23} = a_{23} \cdot Q_3 = 0{,}23 \cdot 440 = 101{,}2$$

$$Q_{31} = a_{31} \cdot Q_1 = 0{,}23 \cdot 225 = 51{,}75$$
$$Q_{32} = a_{32} \cdot Q_2 = 0{,}26 \cdot 363{,}31 = 94{,}46$$
$$Q_{33} = a_{33} \cdot Q_3 = 0{,}38 \cdot 440 = 167{,}2$$

Nova input-output tablica glasi:

Q_i	Q_{ij}			q_i
225	67,5	83.56	66	7.94
363.31	60.75	105.36	101.2	96
440	51.75	94.46	167.2	126.59

3. Primjena linearnoga programiranja na problem iz trgovinskoga poslovanja

3.1. Zadatak

Tvrtka *Muljažić-korporacija* d.d. proizvodi 4 vrste proizvoda: $P_1, P_2, P_3 i P_4$. Prije isporuke svaki proizvod mora proći sljedeće odjele: ugradnja žica, bušenje, sastavljanje i kontrola. Tehnološke karakteristike i jedinične dobiti navedene su u sljedećoj tablici.

Proizvod	Trajanje obrade u odjelu (sati/komad)				Minimalna količina proizvodnje (komad)	Jedinična dobit (kn)
	Ugradnja žica	Bušenje	Sastavljanje	Kontrola		
P_1	0.75	4	3	0.4	200	10
P_2	1.25	1	4	1	150	13
P_3	1.25	3	2	0.6	400	14
P_4	1	4	1	0.6	500	12
Kapacitet odjela (sati)	14000	18000	24000	13000		

Treba napraviti optimalan plan proizvodnje tako da ukupna dobit od svih četiriju proizvoda bude maksimalna i da svi tehnološki uvjeti budu zadovoljeni.

a) Formirajte matematički model promatranog modela. (*Napomena:* Svaki komad pojedinoga proizvoda nije moguće podijeliti na manje dijelove.)

b) <u>Bez rješavanja matematičkog modela</u> odredite je li moguće proizvoditi po 2500 proizvoda **svake** vrste da svi tehnološki uvjeti budu zadovoljeni. Obrazložite svoj odgovor.

c) Bez rješavanja matematičkog modela izračunajte ukupnu dobit ako bi se svaki proizvod proizvodio u minimalnim propisanim količinama, te postotak iskorištenosti kapaciteta svakog odjela u tom slučaju.

d) Riješite matematički model iz **a)** podzadatka pomoću računalnog programa *WinQSB*. Interpretirajte **svaku** komponentu dobivenoga rješenja i dobivenu vrijednost funkcije cilja.

3.2. Rješenje

a) Neka su:

x_1 = broj komada proizvoda P_1

x_2 = broj komada proizvoda P_2

x_3 = broj komada proizvoda P_3

x_4 = broj komada proizvoda P_4

Ukupan prihod od prodaje proizvoda P_1 je: $10 \cdot x_1$ kn

Ukupan prihod od prodaje proizvoda P_2 je: $13 \cdot x_2$ kn

Ukupan prihod od prodaje proizvoda P_3 je: $14 \cdot x_3$ kn

Ukupan prihod od prodaje proizvoda P_4 je: $12 \cdot x_4$ kn

Ukupna dobit od prodaje sva četiri proizvoda je:

$$\mathbf{10 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 \ kn}$$

Vrijeme ugradnje žice u proizvod P_1 je: $0.75 \cdot x_1$ sati

Vrijeme ugradnje žice u proizvod P_2 je: $1.25 \cdot x_2$ sati

Vrijeme ugradnje žice u proizvod P_3 je: $1.25 \cdot x_3$ sati

Vrijeme ugradnje žice u proizvod P_4 je: $1 \cdot x_4$ sati

Ukupno vrijeme ugradnje žice u sva četiri proizvoda je:

$$\mathbf{0.75 \cdot x_1 + 1.25 \cdot x_2 + 1.25 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \text{ sati}}$$

Vrijeme bušenja za proizvod P_1 je: $4 \cdot x_1$ sati

Vrijeme bušenja za proizvod P_2 je: $1 \cdot x_2$ sati

Vrijeme bušenja za proizvod P_3 je: $3 \cdot x_3$ sati

Vrijeme bušenja za proizvod P_4 je: $4 \cdot x_4$ sati

Ukupno vrijeme bušenja za sva četiri proizvoda je:

$$\mathbf{4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \text{ sati}}$$

Vrijeme sastavljanja proizvoda P_1 je: $3 \cdot x_1$ sati

Vrijeme sastavljanja proizvoda P_2 je: $4 \cdot x_2$ sati

Vrijeme sastavljanja proizvoda P_3 je: $2 \cdot x_3$ sati

Vrijeme sastavljanja proizvoda P_4 je: $1 \cdot x_4$ sati

Ukupno vrijeme sastavljanja sva četiri proizvoda je:

$$\mathbf{3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \text{ sati}}$$

Vrijeme kontrole proizvoda P_1 je: $0.4 \cdot x_1$ sati

Vrijeme kontrole proizvoda P_2 je: $1 \cdot x_2$ sati

Vrijeme kontrole proizvoda P_3 je: $0.6 \cdot x_3$ sati

Vrijeme kontrole proizvoda P_4 je: $0.6 \cdot x_4$ sati

Ukupno trajanje kontrole sva četiri proizvoda je:

$$\mathbf{0.4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0.6 \cdot x_3 + 0.6 \cdot x_4 \text{ sati}}$$

Stoga matematički model promatranoga problema glasi:

$$\text{maksimizirati } z = 10 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4$$

pod uvjetima:

$$0.75 \cdot x_1 + 1.25 \cdot x_2 + 1.25 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \leq 14000$$

$$4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 18000$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \leq 24000$$

$$0.4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0.6 \cdot x_3 + 0.6 \cdot x_4 \leq 13000$$

$$x_1 \geq 200,\ x_2 \geq 150,\ x_3 \geq 400\ ,\ x_4 \geq 500$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots.\}$$

b) Uvrstimo $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2500$ u svaki pojedini uvjet iz matematičkoga modela, pa utvrdimo jesu li dobivene nejednakosti istinite. Za prvi uvjet dobijemo:

$$0.75 \cdot 2500 + 1.25 \cdot 2500 + 1.25 \cdot 2500 + 1 \cdot 2500 = 10625 \leq 14000$$

Stoga je prvi uvjet ispunjen. Za drugi uvjet dobijemo:

$$4 \cdot 2500 + 1 \cdot 2500 + 3 \cdot 2500 + 4 \cdot 2500 = 30000 > 18000,$$

pa drugi uvjet nije ispunjen. Za treći uvjet dobijemo:

$$3 \cdot 2500 + 4 \cdot 2500 + 2 \cdot 2500 + 1 \cdot 2500 = 25000 > 24000,$$

pa ni treći uvjet nije ispunjen. Za četvrti uvjet dobijemo:

$$0.4 \cdot 2500 + 1 \cdot 2500 + 0.6 \cdot 2500 + 0.6 \cdot 2500 = 6500 \leq 13000,$$

pa je četvrti uvjet ispunjen.

Zaključak: Nije moguće proizvoditi po 2500 proizvoda svake vrste tako da svi tehnološki uvjeti budu zadovoljeni jer bi kod bušenja i sastavljanja proizvoda bio prekoračen kapacitet odjela.

c) Ako bi se svaki proizvod proizvodio u minimalnim količinama ukupna dobit bi iznosila:

$$z = 200 \cdot 10 + 150 \cdot 13 + 400 \cdot 14 + 500 \cdot 12 = \underline{\mathbf{15.550{,}00\ kuna}}$$

Računamo postotak iskorištenosti kapaciteta svakog odjela u tom slučaju.

Na odjelu ugradnje žica iskoristili bismo ukupno:

$$0.75 \cdot 200 + 1.25 \cdot 150 + 1.25 \cdot 400 + 1 \cdot 500 = 1337.5 \text{ sati},$$

pa bi postotak iskorištenosti kapaciteta toga odjela bio jednak:

$$\frac{1337.5}{14000} \cdot 100 = \underline{\mathbf{9.55357\%}}.$$

Na odjelu bušenja iskoristili bismo ukupno:

$$4 \cdot 200 + 1 \cdot 150 + 3 \cdot 400 + 4 \cdot 500 = 4150 \text{ sati},$$

pa bi postotak iskorištenosti kapaciteta toga odjela bio jednak:

$$\frac{4150}{18000} \cdot 100 = \underline{\mathbf{23.05555\%}}.$$

Na odjelu sastavljanja iskoristili bismo ukupno:

$$3 \cdot 200 + 4 \cdot 150 + 2 \cdot 400 + 1 \cdot 500 = 2500 \text{ sati},$$

pa bi postotak iskorištenosti kapaciteta toga odjela bio jednak:

$$\frac{2500}{24000} \cdot 100 = \underline{\mathbf{10.41666\%.}}$$

Na odjelu kontrole iskoristili bismo ukupno:

$$0.4 \cdot 200 + 1 \cdot 150 + 0.6 \cdot 400 + 0.6 \cdot 500 = 770 \text{ sati},$$

pa bi postotak iskorištenosti kapaciteta toga odjela bio jednak:

$$\frac{770}{13000} \cdot 100 = \underline{\mathbf{5.92307\%}}.$$

d) Rješavanjem postavljenog matematičkoga modela dobije se:

$$x_1^* = 200,\ x_2^* = 3830,\ x_3^* = 3790,\ z^* = 110.850,00$$

Optimalan plan proizvodnje je:

Proizvesti:

- **200 komada proizvoda P_1**
- **3830 komada proizvoda P_2**
- **3790 komada proizvoda P_3**
- **500 komada proizvoda P_4.**

Optimalna ukupna dobit iznosi **110.850,00 kuna.**

4. Literatura

1. L. Neralić, B. Šego: *Matematika*, Element, Zagreb, 2009.
2. L. Neralić: *Uvod u matematičko programiranje* 1, Element, Zagreb, 2003.
3. nastavni materijali dostupni na http://bkovacic.weebly.com

prihvaćeno 04.01.2012.