DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

primjeri seminarskih zadataka iz gradiva *Osnove linearnoga programiranja*

za ocjenu dovoljan (2)

1. Francika želi zadovoljiti minimum dnevnih potreba za kalcijem, bjelančevinama i vitaminima kupujući i konzumirajući dvije namirnice: *A* i *B*. 1 komad namirnice *A* sadrži 10 jedinica kalcija, 5 jedinica bjelančevina i 2 jedinice vitamina. Namirnica *B* sadrži 4 jedinice kalcija, 5 jedinica bjelančevina i 6 jedinica vitamina. Minimalne Francikine dnevne potrebe za kalcijem, odnosno bjelančevinama iznose po 20 jedinica za svaku vrstu, a za vitaminima 12 jedinica. Cijena jednoga komada namirnice *A* iznosi 6 kn, a jednoga komada namirnice B 10 kn. Treba napraviti optimalan plan dnevne potrošnje obiju namirnica tako da ukupni troškovi nabave budu minimalni i da se zadovolji dnevna potreba za svakom pojedinom vrstom hranjivih tvari.

a) Formirajte matematički model promatranoga problema uz pretpostavku da se komad svake pojedine vrste namirnica može podijeliti na proizvoljno mnogo manjih dijelova. Riješite dobiveni problem grafičkom metodom i interpretirajte dobivena rješenja.

b) Formirajte matematički model promatranoga problema uz pretpostavku da komad svake pojedine vrste namirnica nije moguće podijeliti na manje dijelove. Riješite dobiveni problem pomoću računalnoga programa *WinQSB* i interpretirajte dobiveno rješenje.

za ocjenu: dobar (3)

1. Tvornica bezalkoholnih pića *Fani* d.o.o. proizvodi bezalkoholno piće *Nara–tonic* miješanjem dvaju sokova: *Nara–sode* i *Nara–juice*. Svaki decilitar *Nara–sode* sadrži 0.5 dag šećera i 1 mg vitamina C. Svaki decilitar *Nara–juicea* sadrži 0.25 dag šećera i 3 mg vitamina C. Ukupni troškovi proizvodnje jednog decilitra *Nara–sode* iznose 2 n.j., a ukupni troškovi proizvodnje jednoga decilitra *Nara–juicea* iznose 3 n.j.

Marketinški odjel tvrtke *Fani* d.o.o. odlučio je da svaka litra soka *Nara–tonic* mora sadržavati najmanje 20 mg vitamina C i najviše 4 dag šećera. Potrebno je napraviti optimalan plan proizvodnje jednolitrenih pakovanja *Nara–tonica* tako da budu ispunjeni svi postavljeni zahtjevi i da ukupan trošak proizvodnje bude minimalan.

a) Formirajte matematički model promatranoga problema i riješite ga grafičkom metodom. (*Napomena*: 1 litra = 10 decilitara.)

b) Koristeći računalni program *WinQSB* ispitajte bi li na dobiveno optimalno rješenje utjecao dodatan zahtjev da količina svakoga pojedinoga sastojka smjese mora biti cjelobrojna. Ako je Vaš odgovor potvrdan, odredite smjer i iznos relativne promjene količine svakoga sastojka u odnosu na optimalan plan iz **a)** podzadatka.

za ocjenu: vrlo dobar (4)

1. Tvrtka *Muljažić–korporacija* d.d. proizvodi četiri proizvoda: P_1, P_2, P_3 i P_4. Prije isporuke svaki proizvod mora proći kroz sljedeće odjele: ugradnja žica, bušenje, sastavljanje i kontrola. Tehnološke karakteristike i jedinične dobiti navedene su u sljedećoj tablici.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

primjeri seminarskih zadataka iz gradiva *Osnove linearnoga programiranja*

Proizvod	Trajanje obrade u odjelu [sati/komad]				Minimalna količina proizvodnje [komada]	Jedinična dobit [kn]
	Ugradnja žica	Bušenje	Sastavljanje	Kontrola		
P_1	0.5	3	2	0.5	150	9
P_2	1.5	1	4	1	100	12
P_3	1.5	2	1	0.5	300	15
P_4	1	3	2	0.5	400	11
Kapacitet odjela [sati]	15000	17000	26000	12000		

Treba napraviti optimalan plan proizvodnje tako da ukupna dobit od svih četiriju proizvoda bude maksimalna i da svi tehnološki uvjeti budu zadovoljeni.

a) Formirajte matematički model promatranoga problema. (*Napomena*: Svaki komad pojedinoga proizvoda nije moguće podijeliti na manje dijelove.)

b) Bez rješavanja matematičkoga modela odredite je li moguće proizvoditi 3000 komada proizvoda P_1, 4000 komada proizvoda P_2, 5000 komada proizvoda P_3 i 1000 komada proizvoda P_4 tako da svi tehnološki uvjeti budu zadovoljeni. Obrazložite svoj odgovor.

c) Bez rješavanja matematičkoga modela izračunajte ukupnu dobit ako bi se svaki proizvod proizvodio u minimalnim propisanim količinama, te postotak iskorištenosti kapaciteta svakoga odjela u tom slučaju.

d) Riješite matematički model iz **a)** podzadatka pomoću računalnoga programa *WinQSB*. Interpretirajte svaku komponentu dobivenoga rješenja i dobivenu vrijednost funkcije cilja.

za ocjenu: izvrstan (5)

1. Tvrtka za preradu rajčica *Rajčičko* d.o.o. iz Piškorevaca ima na raspolaganju 5 tona rajčice kvalitete *A* i 3 tone rajčice kvalitete *B* od kojih će raditi konzervirane pelate rajčica i koncentrat rajčice. Maseni udio rajčice kvalitete *A* u svakom pelatu treba biti najmanje 80%, a u koncentratu rajčice najmanje 10%.
Cijena jednoga kg pelata iznosi 8 lipa a cijena jednoga kg koncentrata rajčice 5 lipa. Treba odrediti optimalan plan proizvodnje pelata i koncentrata rajčice tako da ukupni prihodi budu maksimalni.

a) Formulirajte matematički model promatranoga problema i riješite ga pomoću računalnoga programa *WinQSB*. (*Napomena*: 1 tona = 1000 kg.)

b) Doda li se dodatni zahtjev da se istodobno moraju zadovoljiti potražnja za pelatima u iznosu od 1 tone i potražnja za koncentratom rajčice u iznosu od 5 tona, formirajte novi matematički model i riješite ga pomoću računalnoga programa *WinQSB*. Utvrdite smjer i iznos relativne promjene svake komponente novoga optimalnoga rješenja u odnosu na optimalno rješenje dobiveno u **a)** podzadatku.

c) Doda li se zahtjev da ukupna masa dvaju navedenih proizvoda od rajčica mora biti 20 tona, formirajte novi matematički model i pomoću računalnoga programa *WinQSB* utvrdite ima li taj model rješenje.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

primjeri seminarskih zadataka iz gradiva *Osnove linearnoga programiranja*

Rezultati zadataka

za ocjenu dovoljan (2)

Neka su x_1 broj komada namirnice A i x_2 broj komada namirnice B.

a) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 6 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2$$

pod uvjetima

$$\begin{aligned} &10 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 20, \\ &5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 20, \\ &2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 12, \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Rješavanjem se dobiva $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (3,\ 1)$ i $z^* = 28$. Dakle, Francika dnevno treba konzumirati 3 komada namirnice A i 1 komad namirnice B. Pripadni optimalni troškovi nabave iznose 28 kn.

b) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 6 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2$$

pod uvjetima

$$\begin{aligned} &10 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 20, \\ &5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 20, \\ &2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 12, \\ &x_1, x_2 \in \mathbf{N}_0 \end{aligned}$$

Rješavanjem se dobiva $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (3,\ 1)$ i $z^* = 28$. Dakle, Francika dnevno treba konzumirati 3 komada namirnice A i 1 komad namirnice B. Pripadni optimalni troškovi nabave iznose 28 kn. Očito, dobili smo isto rješenje kao i u **a)** zadatku, što znači da uvjet $x_1, x_2 \in \mathbf{N}_0$ nema utjecaja na optimalne vrijednosti.

za ocjenu: dobar (3)

Neka su x_1 obujam *Nara-sode* (iskazan u decilitrima) i x_2 obujam *Nara–juicea* (iskazan u decilitrima).

a) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

pod uvjetima

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 10, \\ &0.5 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 \leq 4, \\ &x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 20, \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Rješavanjem se dobiva $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (5, 5)$ i $z^* = 2.5$. Dakle, za pravljenje 1 litre mješavine treba uzeti po 5 decilitara svake vrste soka. Pripadni optimalni troškovi proizvodnje iznose 25 n.j.

b) U **a)** podzadatku smo već dobili cjelobrojna rješenja, pa dodatni uvjet ne bi utjecao niti na promjenu optimalnoga rješenja niti na promjenu optimalnih troškova proizvodnje.

za ocjenu: vrlo dobar (4)

Za svaki $i = 1, 2, 3, 4$ neka je x_i broj komada proizvoda P_i.

a) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 9 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 11 \cdot x_4$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered}
0.5 \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2 + 1.5 \cdot x_3 + x_4 \leq 15000, \\
3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \leq 17000, \\
2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 26000, \\
0.5 \cdot x_1 + x_2 + 0.5 \cdot x_3 + 0.5 \cdot x_4 \leq 12000, \\
x_1 \geq 150,\ x_2 \geq 100,\ x_3 \geq 300,\ x_4 \geq 400, \\
x_i \in \mathbf{N}_0, \text{ za svaki } i = 1, 2, 3, 4.
\end{gathered}$$

b) Nije moguće jer za $x_1 = 3000$, $x_2 = 4000$, $x_3 = 5000$ i $x_4 = 1000$ vrijedi:

$$3 \cdot 3000 + 4000 + 2 \cdot 5000 + 3 \cdot 1000 = 26000 > 17000,$$

pa nije zadovoljen drugi uvjet iz uvjeta navedenih u matematičkom modelu pod **a)**.

c) Uvrstimo $x_1 = 150$, $x_2 = 100$, $x_3 = 300$ i $x_4 = 400$ u funkciju cilja z, pa dobijemo $z = 11\ 450$. Dakle, ukupna dobit bila bi 11 450 kn. Iste vrijednosti uvrstimo u svaki od prvih četiriju uvjeta, pa dobijemo:

$$\begin{gathered}
0.5 \cdot 150 + 1.5 \cdot 100 + 1.5 \cdot 300 + 400 = 1075, \\
3 \cdot 150 + 100 + 2 \cdot 300 + 3 \cdot 400 = 2350, \\
2 \cdot 150 + 4 \cdot 100 + 300 + 2 \cdot 400 = 1800, \\
0.5 \cdot 150 + 100 + 0.5 \cdot 300 + 0.5 \cdot 400 = 525.
\end{gathered}$$

Traženi postotci iskorištenosti kapaciteta pojedinih odjela su:

- odjel za ugradnju žica: $\approx 7.17\%$
- odjel za bušenje: $\approx 13.82\%$
- odjel za sastavljanje: $\approx 6.92\%$
- odjel za kontrolu: 4.375%.

d) Rješavanjem matematičkoga modela dobivenoga u **a)** zadatku dobije se $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right) = (151, 4019, 5664, 400)$, te $z^* = 138\ 947$. Dakle, treba proizvesti 151 komad proizvoda P_1, 4019 komada proizvoda P_2, 5664 komada proizvoda P_3 i 400 komada proizvoda P_4. Optimalna ukupna dobit iznosi 138 947 kn.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

primjeri seminarskih zadataka iz gradiva *Osnove linearnoga programiranja*

za ocjenu: izvrstan (5)

Neka su x_1 masa rajčice kvalitete A u pelatima, x_2 masa rajčice kvalitete B u pelatima, x_3 masa rajčice kvalitete A u koncentratu rajčice i x_4 masa rajčice kvalitete B u koncentratu rajčice. Sve mase iskazane su u kilogramima. U rješavanju zadatka primjenjujemo postotni račun od sto.

a) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 0.08 \cdot x_1 + 0.08 \cdot x_2 + 0.05 \cdot x_3 + 0.05 \cdot x_4$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered} 0.20 \cdot x_1 - 0.80 \cdot x_2 \geq 0, \\ 0.90 \cdot x_3 - 0.10 \cdot x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_3 \leq 5000, \\ x_2 + x_4 \leq 1000, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{gathered}$$

Rješavanjem se dobiva $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (4800, 1200, 200, 1800) i z^* = 580. Dakle, radi dobivanja pelata treba pomiješati 4.8 tona rajčice A i 1.2 tone rajčice B, a radi dobivanja koncentrata rajčice treba pomiještati 0.2 tone rajčice A i 1.8 tona rajčice B. Optimalni ukupni prihod iznosi 580 kn.

b) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 0.08 \cdot x_1 + 0.08 \cdot x_2 + 0.05 \cdot x_3 + 0.05 \cdot x_4$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered} 0.20 \cdot x_1 - 0.80 \cdot x_2 \geq 0, \\ 0.90 \cdot x_3 - 0.10 \cdot x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_3 \leq 5000, \\ x_2 + x_4 \leq 1000, \\ x_1 + x_2 \geq 1000, \\ x_3 + x_4 \geq 10000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{gathered}$$

Rješavanjem se dobiva $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (800, 200, 4200, 800) i z^* = 330. Dakle, radi dobivanja pelata treba pomiješati 0.8 tona rajčice A i 0.2 tone rajčice B, a radi dobivanja koncentrata rajčice treba pomiještati 4.2 tone rajčice A i 0.8 tona rajčice B. Optimalni ukupni prihod iznosi 330 kn.

c) Iz zadanih podataka dobivamo matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 0.08 \cdot x_1 + 0.08 \cdot x_2 + 0.05 \cdot x_3 + 0.05 \cdot x_4$$

pod uvjetima

$$\begin{gathered} 0.20 \cdot x_1 - 0.80 \cdot x_2 \geq 0, \\ 0.90 \cdot x_3 - 0.10 \cdot x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_3 \leq 5000, \\ x_2 + x_4 \leq 1000, \end{gathered}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20000,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Rješavanjem dobivamo poruku *The problem is infeasible*, tj. problem nema mogućih rješenja. To se lako vidi i iz navedenoga modela: zbrojimo li treći i četvrti uvjet, dobivamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5000 + 1000 = 6000,$$

što znači da ukupna masa pelata i koncentrata od rajčice ne može biti strogo veća od 6 tona. Taj zaključak je u proturječju s petim uvjetom prema kojemu navedena ukupna masa treba biti 20 tona.