REPETITORIJ MATEMATIKE

za studente elektrotehnike

Bojan Kovačić
Luka Marohnić
Tihana Strmečki

Tehničko veleučilište u Zagrebu

Predgovor

Ovaj priručnik namijenjen je studentima 1. godine stručnih studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu kao pomoć prigodom polaganja pisanog dijela ispita iz predmeta Matematika 1 i Matematika 2. Priručnik je pisan tako da redoslijed tematskih cjelina odgovara redoslijedu obrade tih cjelina u navedenim predmetima. Radi boljeg razumijevanja obrađene materije, osim matematičkih formula i postupaka, čije se poznavanje provjerava na ispitu, navedene su i teorijske činjenice. To ni u kojemu slučaju ne znači da ovaj priručnik može zamijeniti nastavne materijale prema kojima se održavaju predavanja i auditorne vježbe, nego mu je osnovna svrha poslužiti kao koristan podsjetnik na definicije, svojstva i formule koji se na ispitu možda zaborave.

Ugodna nam je dužnost zahvaliti svima koji su nam na bilo koji način pomogli u nastajanju ovog priručnika. Tu ponajprije mislimo na recenzente prof.dr.sc. Šimu Ungara i prof.dr.sc. Jurja Šiftara čije su nam vrlo korisne primjedbe, prijedlozi i savjeti bili od neprocjenjive koristi. Zahvalnost na objavi priručnika dugujemo i dekanici Tehničkog veleučilišta u Zagrebu prof.dr.sc. Slavici Ćosović Bajić i pročelniku Elektrotehničkog odjela Tehničkog veleučilišta u Zagrebu prof.dr.sc. Krešimiru Meštroviću. Posebno zahvaljujemo svim studentima koji su svojim pitanjima na nastavi i konzultacijama utjecali da u priručnik uvrstimo i neke tematske cjeline bitne za druge predmete na stručnim studijima elektrotehnike, informatike i računarstva.

Pokude za sve „preživjele" nenamjerne pogreške, kojih u priručniku nesumnjivo ima i nakon višestrukih korektura, preuzimamo isključivo na sebe. Unaprijed zahvaljujemo svima koji nas obavijeste o svakoj uočenoj pogreški ili nekom drugom propustu.

Svim korisnicima priručnika želimo uspješno korištenje.

Autori

U Zagrebu, listopada 2014.

Sadržaj

Poglavlje 1

Kompleksni brojevi

1.1 Skup kompleksnih brojeva

Elemente skupa $\mathbb{R}^2 := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, tj. uređene parove realnih brojeva, možemo zbrajati i množiti koristeći formule:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{i} \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1\, a_2 - b_1\, b_2, a_1\, b_2 + a_2\, b_1).$$

Skup $\mathbb{R}^2$ obogaćen ovim dvjema operacijama označavamo s $\mathbb{C}$ i nazivamo **skup kompleksnih brojeva**.

Posebno, za kompleksne brojeve $(a, 0)$ i $(b, 0)$ vrijedi

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{i} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (a\, b, 0).$$

Prema tome smisleno je i uobičajeno umjesto $(a, 0)$ pisati jednostavno a za sve $a \in \mathbb{R}$, budući da se za takve kompleksne brojeve gore definirane operacije svode na zbrajanje i množenje realnih brojeva. U skladu s time skup $\mathbb{R}$ možemo promatrati kao podskup skupa $\mathbb{C}$, odnosno smatrati da vrijedi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Drugim riječima, svaki realan broj ujedno je i kompleksan broj.

Među „pravim” kompleksnim brojevima, tj. onima koji nisu realni, ističe se broj

$$i := (0, 1)$$

kojega nazivamo **imaginarna jedinica**. Vrijedi:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Kako je rezultat kvadriranja imaginarne jedinice realan broj, jednostavno pišemo

$$i^2 = -1.$$

1.2 Algebarski oblik kompleksnog broja

Svaki kompleksni broj $z = (a, b)$ može se jednoznačno zapisati u obliku

$$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

odnosno kraće

$$z = a + b\,i, \tag{1.1}$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$. Zapis (1.1) naziva se **algebarski** ili **standardni** oblik kompleksnog broja z. Pritom definiramo:

- $\mathrm{Re}(z) := a$ je **realni dio** kompleksnog broja z,
- $\mathrm{Im}(z) := b$ je **imaginarni dio** kompleksnog broja z.

Kompleksan broj z je realan ako i samo ako vrijedi $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Grafički prikaz skupa $\mathbb{C}$ je **Gaussova** ili **kompleksna** ravnina. U toj se ravnini uvodi standardni pravokutni koordinatni sustav u kojemu se os apscisa naziva **realna os**, a os ordinata **imaginarna os**. U tako uvedenom koordinatnom sustavu kompleksnom je broju $z = a + b\,i$ pridružena točka $Z = (a, b)$.

Jednakost kompleksnih brojeva: Kompleksni brojevi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ jednaki su ako i samo ako vrijedi

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).$$

Algebarske operacije s kompleksnim brojevima zapisanim u algebarskom obliku: Neka su $z_1 = a_1 + b_1\,i$ i $z_2 = a_2 + b_2\,i$, pri čemu su $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$,
- $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$,
- $z_1\,z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,i$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2\,b_1 - a_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i$, uz uvjet $z_2 \neq 0$.

Konjugat broja z je kompleksan broj $\overline{z} = a - b\,i$. Točka u Gaussovoj ravnini pridružena kompleksnom broju $\overline{z}$ je $\overline{Z} = (a, -b)$. Točke pridružene brojevima z i $\overline{z}$ međusobno su simetrične s obzirom na realnu os.

Konjugiranje kompleksnih brojeva ima sljedeća svojstva:

1. $\overline{z} = 0$ ako i samo ako $z = 0$,
2. $\overline{z} = z$ ako i samo ako $z \in \mathbb{R}$,
3. $\overline{z} = -z$ ako i samo ako $z = b\,i$ za neki $b \in \mathbb{R}$,
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
5. $\overline{\overline{z}} = z$,
6. $\overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$,
7. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ za $n \in \mathbb{N}$,
8. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ako je $z_2 \neq 0$.

Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnog broja je nenegativan realan broj r definiran s

$$r := |z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Broj r obično se interpretira kao udaljenost točke pridružene broju z od ishodišta O Gaussove ravnine.

Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:

1. $|z| \geq 0$,
2. $|z| = 0$ ako i samo ako je $z = 0$,
3. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
4. $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ako je $z_2 \neq 0$,
6. $|\overline{z}| = |z|$,
7. $|z^n| = |z|^n$,
8. $z\,\overline{z} = |z|^2$.

Napomena: Za $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ takve da je $z_2 \neq 0$ vrijedi jednakost $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Skup $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, gdje je $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r \geq 0$, u Gaussovoj ravnini predstavlja kružnicu sa središtem u točki z_0 i polumjerom r.

1.3 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Pridružimo li kompleksnom broju z točku Z u Gaussovoj ravnini, onda kut $\varphi \in [0, 2\,\pi\rangle$ kojega pravac OZ zatvara s pozitivnim dijelom realne osi nazivamo **glavni argument** kompleksnog broja z. Pišemo: $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$.

Argument kompleksnog broja z je bilo koji element skupa $S = \{\operatorname{Arg}(z) + 2\,k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a označava se s $\arg(z)$.

Ako je $z = a + b\,i$ algebarski oblik zapisa kompleksnog broja $z \neq 0$, onda je pripadni glavni argument φ jednoznačno određen jednadžbama:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Argument kompleksnog broja ima sljedeća svojstva:

1. za svaki $\alpha > 0$ vrijedi $\arg(\alpha\, z) = \arg(z)$,
2. za svaki $\alpha < 0$ vrijedi $\arg(\alpha\, z) = \arg(z) + \pi$,
3. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$,
4. $\arg(z_1\, z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$,
5. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$,
6. za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\arg(z^k) = k\,\arg(z)$.

Trigonometrijski oblik zapisa kompleksnog broja z je:

$$z = r\ \mathrm{cis}\,\varphi := r\,(\cos\varphi + i\ \sin\varphi).$$

Pritom su r apsolutna vrijednost (modul), a φ glavni argument kompleksnog broja z.

Pretvorba oblika zapisa kompleksnih brojeva:

1. *Algebarski → trigonometrijski*
   Ako je $z = a + b\,i$ algebarski oblik zapisa kompleksnog broja z, algoritam je sljedeći:

   Korak 1. Izračunati apsolutnu vrijednost (modul) r broja z koristeći definiciju.

   Korak 2. Odrediti glavni argument φ iz jednadžbi (1.2).

   Korak 3. Zapisati $z = r\ \mathrm{cis}\,\varphi$.

2. *Trigonometrijski → algebarski*
   Ako je $z = r\ \mathrm{cis}\,\varphi$ trigonometrijski oblik zapisa kompleksnog broja z, algoritam je sljedeći:

   Korak 1. Izračunati $a = r\ \cos\varphi$.

   Korak 2. Izračunati $b = r\ \sin\varphi$.

   Korak 3. Zapisati $z = a + b\,i$.

Algebarske operacije s kompleksnim brojevima zapisanima u trigonometrijskom obliku: Zbrajanje i oduzimanje izvode se pretvorbom zapisa pribrojnika iz trigonometrijskoga u algebarski oblik.

Za $z_1 = r_1\ \mathrm{cis}\,\varphi_1$ i $z_2 = r_2\ \mathrm{cis}\,\varphi_2$ vrijede formule:

1. $z_1\,z_2 = (r_1\,r_2)\ \mathrm{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$,
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \mathrm{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$, uz uvjet $z_2 \neq 0$.

Potenciranje kompleksnog broja: Za $z = r\ \mathrm{cis}\,\varphi$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi **De Moivrèova formula za potenciranje**:

$$z^n = r^n\ \mathrm{cis}(n\,\varphi).$$

Pretpostavimo da je $z \neq 0$. Definiramo $z^{-1} = \frac{1}{z}$. Tada vrijedi:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Korjenovanje kompleksnog broja: Za $z = r\ \mathrm{cis}\,\varphi$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ skup svih kompleksnih rješenja jednadžbe $x^n = z$ je

$$S = \left\{ \sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n}\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Svi elementi skupa S tvore vrhove pravilnoga n-terokuta upisanoga u središnju kružnicu polumjera $\sqrt[n]{r}$.

1.4 Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Osnova eksponencijalnoga oblika zapisa kompleksnog broja je Eulerova formula:

$$e^{i\,\varphi} = \operatorname{cis}\varphi.$$

Eksponencijalni oblik zapisa kompleksnog broja z je

$$z = r\,e^{i\,\varphi}.$$

Pritom su r apsolutna vrijednost (modul) i φ argument kompleksnog broja z.

Pretvorba oblika zapisa kompleksnih brojeva:

1. *Eksponencijalni → trigonometrijski*
   Ako je $z = r\,e^{i\,\varphi}$ eksponencijalni oblik zapisa kompleksnog broja z, onda je pripadni trigonometrijski oblik zapisa toga broja $z = r\ \operatorname{cis}\varphi$.

2. *Trigonometrijski → eksponencijalni*
   Ako je $z = r\ \operatorname{cis}\varphi$ trigonometrijski oblik zapisa kompleksnog broja z, onda je pripadni eksponencijalni oblik zapisa toga broja $z = r\,e^{i\,\varphi}$.

3. *Eksponencijalni → algebarski*
   Kompleksan broj zapisan u eksponencijalnom obliku najprije treba zapisati u trigonometrijskom obliku. Potom se dobiveni trigonometrijski oblik pretvara u algebarski oblik koristeći algoritam naveden na stranici 4.

4. *Algebarski → eksponencijalni*
   Kompleksan broj zapisan u algebarskom obliku najprije treba zapisati u trigonometrijskom obliku koristeći algoritam naveden na stranici 4. Potom se dobiveni trigonometrijski oblik pretvara u eksponencijalni oblik.

Algebarske operacije s kompleksnim brojevima zapisanima u eksponencijalnom obliku:
Zbrajanje i oduzimanje provodi se pretvorbom iz eksponencijalnoga u algebarski oblik.

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva $z_1 = r_1\,e^{i\,\varphi_1}$ i $z_2 = r_2\,e^{i\,\varphi_2}$ izvodi se prema sljedećim formulama:

1. $z_1\,z_2 = (r_1\,r_2)\,e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}$,
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}$, uz uvjet $z_2 \neq 0$.

Poglavlje 2

Osnove matričnog računa

2.1 Operacije s matricama

Realna matrica tipa (r, s) je pravokutna tablica realnih brojeva s ukupno r redaka i s stupaca, pri čemu su $r, s \in \mathbb{N}$. Matrica se uobičajeno označava velikim tiskanim slovom: $A, B, C, \ldots$. Skup svih realnih matrica tipa (r, s) označava se s $M_{r,s}(\mathbb{R})$.

Element matrice A na presjeku i-tog retka i j-tog stupca označava se s a_{ij}. Matricu A obično zapisujemo u obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rs} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rs} \end{pmatrix},$$

odnosno u skraćenom obliku: $A = [a_{ij}]$.

Matrica A je **kvadratna matrica** reda n (u daljnjem tekstu: matrica reda n) ako vrijedi $r = s = n$. Skup svih realnih matrica reda n označava se s $M_n(\mathbb{R})$.

Neka je A matrica reda n. Elementi a_{ii} tvore **glavnu dijagonalu**, a elementi $a_{n-i+1,i}$ tvore **sporednu dijagonalu** matrice A.

Dvije matrice su međusobno jednake ako su istog tipa i ako na istim mjestima imaju međusobno jednake elemente.

Zbrajanje i oduzimanje matrica definira se isključivo za matrice koje su istog tipa. Ako su A i B matrice tipa (r, s), onda je:

- zbroj matricâ A i B jednak matrici C tipa (r, s) takvoj da je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- razlika matricâ A i B jednaka matrici D tipa (r, s) takvoj da je $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Umnožak realnog broja α i realne matrice A tipa (r, s) je realna matrica B tipa (r, s) takva da vrijedi $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ za sve i, j. Pišemo: $B = \alpha \cdot A$.

Matrice A i B su **ulančane** ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. Ako su A i B ulančane matrice, onda matrice B i A općenito ne moraju biti ulančane.

Množenje matrica definira se isključivo za ulančane matrice. Umnožak matrice A tipa (r, s) i matrice B tipa (s, t) je matrica C tipa (r, t) takva da vrijedi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,\ j = 1, 2, \ldots, t.$$

Pišemo: $C = A \cdot B$.

Množenje matrica je asocijativno, ali nije komutativno. Preciznije, vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Ako postoji umnožak $A \cdot B$, to općenito **ne** znači da postoji umnožak $B \cdot A$. Ako umnošci $A \cdot B$ i $B \cdot A$ postoje, oni općenito **nisu** jednaki.
2. Jednakost $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ vrijedi kad god su ti umnošci definirani.

Neki posebni tipovi matrica:

- **Nulmatrica** (oznaka: 0) je svaka matrica čiji su svi elementi jednaki 0.
- **Jedinična matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0, tj. vrijedi

  $$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

  Jedinična matrica reda n označava se s E_n ili I_n.
- **Dijagonalna matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $A \in M_n(\mathbb{R})$ je dijagonalna ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$.
- **Gornja trokutasta matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0, tj. $A \in M_n(\mathbb{R})$ je gornja trokutasta ako je $a_{ij} = 0$ za sve $j < i$.
- **Donja trokutasta matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0, tj. $A \in M_n(\mathbb{R})$ je donja trokutasta ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i < j$.

Transponirana matrica matrice A tipa (r, s) je matrica B tipa (s, r) takva da je $b_{ij} = a_{ji}$. Transponirana matrica uobičajeno se označava s A^T.

Transponiranje matrica ima sljedeća svojstva:

1. $\left(A^T\right)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$, ako su matrice A i B istog tipa.
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, ako su matrice A i B ulančane.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je **simetrična** ako za sve i, j vrijedi jednakost $a_{ij} = a_{ji}$, tj. ako vrijedi jednakost $A^T = A$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je **antisimetrična** ako za sve i, j vrijedi jednakost $a_{ij} = -a_{ji}$, tj. ako vrijedi jednakost $A^T = -A$. Ako je A antisimetrična matrica, onda su svi elementi njezine glavne dijagonale jednaki 0.

2.2 Determinanta i inverz matrice

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R})$. **Determinanta** matrice A (oznaka: $\det(A)$) je realan broj definiran formulom:

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

U ovom slučaju kažemo da je $\det(A)$ determinanta reda 2.

Ako je $A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R})$, determinanta matrice A definira se formulom:

$$\begin{aligned} \det(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &:= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - \\ &\quad - (a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{13}\, a_{22}\, a_{31}) \end{aligned}$$

U ovom slučaju kažemo da je $\det(A)$ determinanta reda 3.

Vrijednost determinante bilo koje matrice $A = [a_{ij}]$ reda 3 može se izračunati i koristeći sljedeću shemu, poznatu pod imenom **Sarrusovo pravilo**:

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Elemente matrice A treba ispisati u uobičajenom poretku, pa zatim s desne strane dopisati prva dva stupca. Elemente dobivene „proširene matrice” spojene ispunjenim linijama treba pomnožiti i dobivene umnoške zbrojiti, pa zatim od tog broja oduzeti umnoške elemenata spojenih isprekidanim linijama. Dobiveni broj jednak je $\det(A)$.

Napomena: Sarrusovo pravilo vrijedi samo za determinante reda 3 i ne može se primjenjivati na računanje determinanti drugih redova.

Pojam determinante definiran je i za kvadratnu matricu proizvoljnog reda, ali ta definicija izlazi iz okvira ovog priručnika i ovdje neće biti navedena.

Napomena: Radi jednostavnosti, pri radu s determinantom govorimo o recima i stupcima determinante misleći pritom na retke i stupce pripadne matrice.

Vrijednost determinante reda n može se računati i **Laplaceovim razvojem**. Neka su $A \in M_n(\mathbb{R})$ i D njezina determinanta. Odabere se jedan redak ili stupac determinante D, npr. i-ti redak. Neka je D_{ik} vrijednost determinante reda $n-1$ dobivene izostavljanjem i-tog retka i k-tog stupca determinante D. Tada se determinanta D može izračunati prema formuli:

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, D_{ik}.$$

Svojstva determinante:

1. Ako bilo koji redak (stupac) determinante tvore isključivo nule, njezina je vrijednost jednaka nuli.
2. Ako determinanta sadrži barem dva jednaka retka (stupca), njezina je vrijednost jednaka nuli.
3. Zamjenom dvaju redaka ili dvaju stupaca determinante njezina se vrijednost množi s -1.
4. Dodavanjem odabranog retka (stupca) determinante nekom drugom retku (stupcu), vrijednost determinante se ne mijenja.
5. Pomnoži li se svaki element nekog retka (stupca) determinante nekim realnim brojem pa se tako dobiveni redak (stupac) determinante doda nekom drugom retku (stupcu), vrijednost determinante se ne mijenja.
6. Determinanta bilo koje gornje trokutaste, donje trokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je umnošku svih elemenata glavne dijagonale te matrice.
7. $\det(A) = \det(A^T)$, za bilo koju kvadratnu matricu A.

Binet–Cauchyjev poučak: Za $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vrijedi jednakost:

$$\det(A \cdot B) = \det(A)\,\det(B).$$

Posebno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

Inverz matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ je matrica $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$. Ako matrica A ima inverz, on je nužno jedinstven. Posebno, $E_n^{-1} = E_n$.

Napomena: Pojam inverza matrice nema smisla za matrice koje nisu kvadratne.

Regularna matrica je svaka kvadratna matrica koja ima inverz. **Singularna matrica** je svaka kvadratna matrica koja nema inverz. Vrijede sljedeći kriteriji:

1. Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je regularna ako i samo ako vrijedi $\det(A) \neq 0$.
2. Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je singularna ako i samo ako vrijedi $\det(A) = 0$.

Invertiranje regularnih matrica ima sljedeća svojstva:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, za regularnu matricu A.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, za regularne matrice A i B istog reda.
3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$, za regularnu matricu A.

Elementarne transformacije nad recima matrice A su

1. zamjena dvaju redaka,
2. množenje jednog retka realnim brojem različitim od nule,
3. zbrajanje dvaju redaka i zamjena jednog od tih dvaju redaka dobivenim zbrojem (umjesto dotičnog retka).

U nastavku navodimo dva algoritma za određivanje inverza regularne matrice.

Napomena: Prije primjene svakog algoritma treba utvrditi je li zadana matrica regularna, odnosno je li njezina determinanta različita od nule.

Algoritam za određivanje inverza regularne matrice A reda n pomoću elementarnih transformacija:

Korak 1. Formirati matricu $B = [A \mid E_n]$ tipa $(n, 2\,n)$.

Korak 2. Elementarnim transformacijama nad recima matrice B transformirati matricu A u jediničnu matricu, odnosno svesti matricu B na oblik $B' = [E_n|X]$. To je moguće učiniti jer je A regularna matrica.

Korak 3. Inverz matrice A je matrica X, tj. $A^{-1} = X$.

Algoritam za određivanje inverza regularne matrice A reda n pomoću adjunkte:

Korak 1. Za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ izračunati vrijednost b_{ij} definiranu s:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij},$$

pri čemu je D_{ij} determinanta matrice koja se dobije izostavljanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice A.

Korak 2. Formirati matricu $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

Korak 3. Odrediti matricu $\tilde{A} := B^T$. Matricu $\tilde{A}$ nazivamo **adjunkta** matrice A.

Korak 4. Inverz matrice A jednak je $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$.

Napomena: Ako je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, vrijedi $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Poglavlje 3

Sustavi linearnih jednadžbi

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. **Linearni sustav reda** n (u daljnjem tekstu: sustav) je sustav od n linearnih jednadžbi s n (različitih) **nepoznanica** $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1, \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n, \end{array}$$

pri čemu su $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ konstante za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Brojeve a_{ij} nazivamo **koeficijenti**, a brojeve b_i **slobodni članovi** sustava.

Matricu $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, nazivamo **matrica sustava**.

Matricu $B = [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, nazivamo **matrica slobodnih članova**.

Matricu $X = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, nazivamo **matrica nepoznanica**.

Svaka uređena n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ realnih brojeva, takva da zamjenom $x_k = \gamma_k$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ u svim jednadžbama sustava te jednadžbe prelaze u numeričke jednakosti, predstavlja (jedno) **rješenje sustava**. Kraće kažemo da je uređena n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ rješenje sustava ako i samo ako zadovoljava sve jednadžbe sustava.

Ovisno o ukupnom broju međusobno različitih rješenja, sustave dijelimo na:

1. proturječne (nemaju niti jedno rješenje),
2. Cramerove (imaju točno jedno rješenje),
3. sustave s beskonačno mnogo različitih rješenja.

Determinanta sustava (oznaka: D) je determinanta matrice sustava.

k-ta pomoćna matrica sustava je matrica $A_k \in M_n(\mathbb{R})$ koja se dobije kad se k-ti stupac matrice sustava A zamijeni matricom slobodnih članova.

k-ta pomoćna determinanta sustava (oznaka: D_k) je determinanta matrice A_k.

Sustav je Cramerov ako i samo ako je $D \neq 0$.

Svaki se sustav može zapisati kao matrična jednadžba $A \cdot X = B$, gdje su A matrica sustava, X matrica nepoznanica i B matrica slobodnih članova. Ako je sustav Cramerov, njegovo je rješenje dano izrazom:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Odavde slijedi sljedeći postupak za određivanje rješenja Cramerova sustava.

Cramerovo pravilo: Rješenje $(x_1, \ldots, x_n)$ bilo kojeg Cramerova sustava reda n određeno je izrazima

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Homogeni sustav je sustav u kojemu su svi slobodni članovi jednaki nuli. Takav sustav ili ima jedinstveno (trivijalno) rješenje $(0, \ldots, 0)$ ili ima beskonačno mnogo različitih rješenja.

Poglavlje 4

(Radij)vektori

4.1 Pojam radijvektora i osnovna svojstva

Neka je O ishodište pravokutnoga koordinatnog sustava u euklidskom prostoru E^3 čije točke poistovjećujemo s uređenim trojkama realnih brojeva. Posebno, $O = (0, 0, 0)$. **Radijvektor** točke $T \in E^3$ je usmjerena dužina kojoj je početak točka O, a kraj točka T. Svaki radijvektor je jednoznačno određen svojom završnom točkom T. Ako je $T = (x_T, y_T, z_T)$, piše se: $\overrightarrow{OT} = (x_T, y_T, z_T)$.

Posebno se izdvajaju četiri radijvektora: $\vec{0} = (0, 0, 0)$, $\vec{\imath} := (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} := (0, 1, 0)$, $\vec{k} := (0, 0, 1)$. Skup svih radijvektora u prostoru E^3 standardno se označava s $V^3(O)$. Ako se ne istakne drugačije, pretpostavlja se da su razmatrani radijvektori elementi skupa $V^3(O)$.

Napomena: U ostatku teksta ovoga poglavlja, pod pojmom „vektor" podrazumijevat ćemo radijvektor.

Algebarske operacije s vektorima: Za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ operacije zbrajanja i oduzimanja vektora, te množenja vektora skalarom definirane su s:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &:= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3), \\ \alpha \cdot \vec{a} &:= (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3). \end{aligned}$$

Napomena: $\alpha \cdot \vec{a} = 0$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$.

Duljina vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je nenegativan realan broj

$$|\vec{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **kolinearni** ako je jedan od njih nulvektor $\vec{0}$ ili ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$. Ako je $\alpha > 0$, kolinearni vektori **imaju istu orijentaciju**. Ako je $\alpha < 0$, kolinearni vektori **imaju suprotnu orijentaciju**.

Ako je $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$, onda je $|\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{b}|$. Pritom su $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$ duljine vektora, a $|\alpha|$ apsolutna vrijednost realnoga broja.

4.2 Skalarno i vektorsko množenje vektora

Skalarni umnožak (oznaka: $\cdot$) dvaju vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je realan broj s definiran s

$$s := \vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3.$$

Skalarno množenje je komutativna operacija (svejedno je u kojem poretku množimo vektore).

Mjera kuta između dvaju vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je realan broj $\varphi \in [0, \pi]$ određen trigonometrijskom jednadžbom:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Dva vektora su međusobno **okomita** ako zatvaraju kut od $90°$, odnosno $\frac{\pi}{2}$ radijana. Po definiciji, nulvektor je okomit na svaki vektor.

Dva vektora (različita od nulvektora) su međusobno okomita ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

Vektorski umnožak (oznaka: $\times$) dvaju vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je vektor $\vec{c}$ definiran s

$$\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2, a_3\, b_1 - a_1\, b_3, a_1\, b_2 - a_2\, b_1).$$

Vektorsko množenje ima sljedeća svojstva:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
2. Duljina vektorskog umnoška dvaju vektora jednaka je površini paralelograma kojega razapinju ti vektori.
3. Vektorski umnožak dvaju vektora je okomit na svaki od tih vektora. Ako je $\vec{c} \neq 0$, onda se smjer vektora $\vec{c}$ određuje tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u danom poretku tvore **desni sustav**. Praktično, ako kažiprst desne ruke usmjerimo u smjeru vektora $\vec{a}$, a srednji prst u smjeru vektora $\vec{b}$, onda će palac pokazivati u smjeru vektorskog umnoška $\vec{c}$.
4. Vektorski umnožak dvaju vektora jednak je nulvektoru ako i samo ako su ti vektori kolinearni.
5. Vektorsko množenje je **antikomutativno**, tj. vrijedi:
$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1) \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$
6. Vektorsko množenje ima svojstvo distributivnosti prema zbrajanju, tj. vrijede jednakosti:
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Napomena: U sljedećoj su tablici navedeni međusobni vektorski umnošci vektora, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ i $\vec{k}$.

$\times$	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{\jmath}$
$\vec{\jmath}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{\imath}$
$\vec{k}$	$\vec{\jmath}$	$-\vec{\imath}$	$\vec{0}$

Mješoviti umnožak triju vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ je realan broj M definiran s

$$M := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Obujam paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednak je $|M|$. Obujam tetraedra razapetog tim vektorima jednak je $\frac{1}{6}\,|M|$. Obujam trostrane prizme razapete tim vektorima jednak je $\frac{1}{2}\,|M|$.

Mješoviti umnožak triju vektora jednak je nuli ako i samo ako je jedan od vektora nulvektor ili ako su sva tri vektora **komplanarna** (tj. ako pripadaju istoj ravnini).

4.3 Linearna nezavisnost i zavisnost skupa vektora

Neka su $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k} \in V^3(O)$ bilo koji vektori, a $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ bilo koji brojevi. Tada vektor

$$\vec{b} = \alpha_1\, \vec{a_1} + \alpha_2\, \vec{a_2} + \cdots + \alpha_k\, \vec{a_k}$$

nazivamo **linearna kombinacija vektora** $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ **s koeficijentima** $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k$.

Za konačan skup vektora $S = \{\vec{a_1}, \vec{a_2} \ldots, \vec{a_k}\} \subset V^3(O)$ kažemo da je **linearno nezavisan** ako iz jednakosti

$$\vec{0} = \alpha_1\, \vec{a_1} + \alpha_2\, \vec{a_2} + \cdots + \alpha_k\, \vec{a_k} \tag{*}$$

slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, tj. ako se nul-vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz skupa S na točno jedan, tzv. *trivijalan* način.

Ako postoje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi (*) i ako je barem jedan od tih brojeva različit od nule, kažemo da je skup S **linearno zavisan**.

Jednočlan skup $S \subset V^3(O)$ je linearno zavisan ako i samo je $S = \{\vec{0}\}$.

Dvočlani skup $S \subset V^3(O)$ je linearno zavisan ako i samo ako su njegovi elementi kolinearni.

Tročlani skup $S \subset V^3(O)$ je linearno zavisan ako i samo ako je mješoviti umnožak njegovih elemenata (u bilo kojem poretku) jednak nuli.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, n-člani skup vektora iz skupa $V^3(O)$ je linearno zavisan.

Svaki skup $S \subset V_3(O)$ koji sadrži barem dva vektora je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan vektor iz S može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S.

Baza prostora $V^3(O)$ je svaki linearno nezavisan podskup skupa $V^3(O)$ takav da se svaki element skupa $V^3(O)$ može napisati kao linearna kombinacija svih elemenata skupa S. Skup $S \subset V^3(O)$ je baza prostora $V^3(O)$ ako i samo ako je S tročlani linearno nezavisan skup. Najjednostavnija baza prostora $V^3(O)$ je kanonska baza $S = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ jer za općeniti vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vrijedi $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{\imath}) \cdot \vec{\imath} + (\vec{a} \cdot \vec{\jmath}) \cdot \vec{\jmath} + (\vec{a} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} = a_1\, \vec{\imath} + a_2\, \vec{\jmath} + a_3\, \vec{k}$.

Poglavlje 5

Realne funkcije jedne realne varijable

5.1 Opći pojmovi

Neka su $X, Y \subset \mathbb{R}$. **Realna funkcija jedne realne varijable** $f : X \to Y$ je svako pridruživanje koje *svakom* elementu $x \in X$ pridružuje *točno jedan* element $y \in Y$. Tada pišemo $x \overset{f}{\mapsto} y$ ili, jednostavnije, $y = f(x)$.

Skup X naziva se **područje definicije (domena)** funkcije f, a skup Y **područje vrijednosti (kodomena)** funkcije f.

Skup $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ naziva se **slika** funkcije f ili **skup svih vrijednosti funkcije** f. Slika funkcije uvijek je podskup kodomene te funkcije, odnosno vrijedi $f(X) \subset Y$.

Kad god se ne istakne drugačije, pretpostavljat ćemo da je f realna funkcija jedne realne varijable, dakle $f\colon X \to \mathbb{R}$ za neki podskup $X \subseteq \mathbb{R}$.

Svaka funkcija je potpuno određena zadavanjem skupova X i Y te pravila pridruživanja f koje svakom $x \in X$ pridružuje $y = f(x) \in Y$. Dvije funkcije f i g su **jednake** ako imaju zajedničku domenu X i zajedničku kodomenu Y, te vrijedi $f(x) = g(x)$ za sve $x \in X$.

Kompozicija realnih funkcija $f : X \to Y$ i $g : X' \to Y'$ za koje vrijedi $Y' \subset X$ je realna funkcija $h : X' \to Y$ definirana s

$$h(x) := (f \circ g)(x) := f\left(g(x)\right), \quad x \in X'.$$

Komponiranje funkcija općenito **nije komutativno**.

Funkcija $f : X \to Y$ je **injekcija** ako iz jednakosti $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$ za sve $x_1, x_2 \in X$.

Funkcija $f : X \to Y$ je **surjekcija** ako za svaki $y \in Y$ postoji barem jedan $x \in X$ takav da vrijedi $y = f(x)$.

Funkcija f je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Inverz bijekcije $f : X \to Y$ je funkcija $f^{-1} : Y \to X$ takva da za svaki $x \in X$ i svaki $y \in Y$ vrijedi

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{i} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Pravilo inverza bijekcije f može se odrediti tako da se jednadžba $y = f(x)$ riješi po varijabli x.

Graf funkcije f je skup $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$. On se obično predočava u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini tako da se na os apscisa nanesu vrijednosti nezavisne varijable x, a na os ordinata funkcijske vrijednosti $f(x)$.

Ravninska krivulja K je graf neke funkcije ako i samo ako svaki pravac usporedan s osi ordinata siječe krivulju K u najviše jednoj točki.

Napomena: Nisu sve ravninske krivulje grafovi funkcija. Primjeri takvih ravninskih krivulja su kružnica, elipsa i hiperbola.

Ravninska krivulja K je graf neke bijekcije ako i samo ako svaki pravac usporedan s osi apscisa i svaki pravac usporedan s osi ordinata siječe krivulju K u najviše jednoj točki. Graf inverza bijekcije f može se dobiti zrcaljenjem grafa bijekcije f s obzirom na pravac čija je jednadžba $y = x$.

Nultočka funkcije f je svaki $x \in X$ takav da je $f(x) = 0$. Nultočka se grafički interpretira kao sjecište grafa funkcije f i osi apscisa. Skup svih nultočaka funkcije f označavamo s $N(f)$.

Funkcija $f : X \to Y$ je **omeđena odozdo** ako postoji barem jedan $m \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi $f(x) \geq m$.

Funkcija $f : X \to Y$ je **omeđena odozgo** ako postoji barem jedan $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi $f(x) \leq M$.

Funkcija $f : X \to Y$ je omeđena ako je omeđena i odozdo i odozgo.

Neka je $f : X \to Y$. Ako za sve $x_1, x_2 \in X$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi

1. $f(x_1) \leq f(x_2)$, tada je funkcija f **rastuća**.
2. $f(x_1) < f(x_2)$, tada je funkcija f **strogo rastuća**.
3. $f(x_1) \geq f(x_2)$, tada je funkcija f **padajuća**.
4. $f(x_1) > f(x_2)$, tada je funkcija f **strogo padajuća**.

Svaka strogo rastuća (strogo padajuća) funkcija je injekcija. (Obratna tvrdnja nije točna.)

Funkcija $f : X \to Y$ je **parna** ako za svaki $x \in X$ vrijedi $-x \in X$ i $f(-x) = f(x)$. Graf svake parne funkcije je osno simetričan s obzirom na os ordinata.

Funkcija $f : X \to Y$ je **neparna** ako za svaki $x \in X$ vrijedi $-x \in X$ i $f(-x) = -f(x)$. Graf svake neparne realne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Neka je $X \subset \mathbb{R}$. Funkcija $f : X \to Y$ je **periodična** ako postoji $P \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in X$ za koje je $x + P \in X$ vrijedi $f(x + P) = f(x)$.

Broj P naziva se **period** funkcije f. Najmanji strogo pozitivan period T (ako postoji) funkcije f naziva se **temeljni period**.

5.2 Polinomi i racionalne funkcije

Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. **Polinom stupnja** n je funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Broj a_n naziva se **vodeći koeficijent**, a broj a_0 **slobodni član** polinoma p. Stupanj polinoma p označava se s $\mathrm{st}(p)$ ili $\deg(p)$. Monom $a_n\, x^n$ naziva se **vodeći član** polinoma p.

Za $n = 0$ dobiva se **konstantna funkcija**, za $n = 1$ **linearna funkcija**, za $n = 2$ **kvadratna funkcija**, a za $n = 3$ **kubna funkcija**.

Polinom p takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $p(x) = 0$ nazivamo **nulpolinom**. Njegov se stupanj obično ne definira.

Polinomi $p(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_0$ i $q(x) = b_m\, x^m + \cdots + b_0$ su **jednaki** ako i samo ako vrijedi $m = n$ i ako je $a_k = b_k$ za svaki $k = 0, 1, \ldots, n$.

Svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu nultočku. Odavde slijedi da je svaki polinom neparnog stupnja surjekcija na skup $\mathbb{R}$. Polinom stupnja n koji ima barem $n + 1$ nultočaka nužno je nulpolinom.

Korijen polinoma p je svako kompleksno rješenje jednadžbe $p(x) = 0$.

Poučak 5.2.1 (Osnovni poučak algebre)**.** *Neka je p polinom stupnja $n \geq 1$ s kompleksnim koeficijentima. Tada jednadžba $p(x) = 0$ ima barem jedno rješenje koje pripada skupu $\mathbb{C}$.*

Poučak 5.2.2 (Drugi osnovni poučak algebre)**.** *Svaki polinom p stupnja $n \geq 1$ s kompleksnim koeficijentima ima točno n ne nužno međusobno različitih kompleksnih korijena $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pritom vrijedi*

$$p(z) = a_n\, (z - z_1)\, (z - z_2)\, \ldots\, (z - z_n),$$

gdje je a_n vodeći koeficijent polinoma p.

Kratnost korijena x_k polinoma p je ukupan broj svih korijena polinoma p koji su jednaki x_k.

Ako su koeficijenti polinoma p realni brojevi, tada je $z \in \mathbb{C}$ korijen polinoma p ako i samo ako je $\overline{z}$ također korijen polinoma p.

Poučak 5.2.3 (Bèzout)**.** *Neka je p polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je vodeći koeficijent jednak* 1*. Ako jednadžba $p(z) = 0$ ima rješenje $z_0 \in \mathbb{Z}$, onda je a_0 djeljiv s z_0. Drugim riječima, svi kandidati za cjelobrojne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom* 1 *su nužno djelitelji slobodnog člana tog polinoma.*

Algebarske operacije s polinomima svode se na algebarske operacije s potencijama.

Polinom p je **djeljiv** polinomom q ako postoji polinom h takav da vrijedi $p = q\, h$. U tom je slučaju $\mathrm{st}\, p = \mathrm{st}\, q + \mathrm{st}\, h$. Kažemo još da q **dijeli** p i pišemo $q \mid p$.

Algoritam za dijeljenje polinoma: Neka su p i q polinomi takvi da je $\mathrm{st}\, q \leq \mathrm{st}\, p$. Polinom p možemo podijeliti polinomom q, pri čemu polinom p nazivamo djeljenik, a polinom q djelitelj. Postupak je sljedeći:

Korak 1. Označiti $p_1 = p$ i staviti $k = 1$.

Korak 2. Podijeliti vodeći član polinoma p_k vodećim članom djelitelja q. Time se dobiva monom m_k.

Korak 3. Odrediti polinom $p_{k+1} = p_k - q\, m_k$.

Korak 4. Ukoliko je $\operatorname{st} p_{k+1} < \operatorname{st} q$, algoritam je završen i vrijedi:

$$h = m_1 + \cdots + m_k, \quad r = p_{k+1}.$$

Inače, uvećati k za 1 i ići na korak 2.

Rezultat ovog algoritma su jedinstveni polinomi h i r takvi da vrijedi:

$$p = q\,h + r \quad \text{i} \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} q.$$

Polinom h nazivamo **količnik**, a polinom r **ostatak** pri dijeljenju polinoma p i q.

Napomena: Polinom p je djeljiv polinomom q ako i samo ako je r nulpolinom.

Polinom d je **zajednička mjera** polinoma p i q ako su p i q djeljivi s d.

Polinom h je **najveća zajednička mjera** polinoma p i q (oznaka: $\mathrm{NZM}(p,q)$) ako je njegov vodeći koeficijent jednak 1 i ako je djeljiv sa svakom zajedničkom mjerom polinoma p i q.

Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere polinoma p i q, $\operatorname{st} q \leq \operatorname{st} p$:

Korak 1. Označiti $p_1 = p$ i $q_1 = q$, te staviti $k = 1$.

Korak 2. Podijeliti polinome p_k i q_k koristeći algoritam za dijeljenje polinoma (vidjeti str. 21). Dobiju se količnik h_k i ostatak r_k.

Korak 3. Ukoliko je $r_k = 0$, odnosno ukoliko q_k dijeli p_k, tada vrijedi $\mathrm{NZM}(p,q) = q_k$ i algoritam je završen. Inače, ići na Korak 4.

Korak 4. Označiti $p_{k+1} = q_k$ i $q_{k+1} = r_k$, uvećati k za 1 te ići na Korak 2.

Ako je $\mathrm{NZM}(p,q) = 1$, tada kažemo su polinomi p i q **relativno prosti**. Za takve polinome vrijedi $N(p) \cap N(q) = \emptyset$, odnosno oni nemaju zajedničkih nultočaka.

Neka su p i q relativno prosti polinomi takvi da vrijedi $\operatorname{st} p < \operatorname{st} q$. **Prava racionalna funkcija** je realna funkcija f definirana pravilom

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \tag{5.1}$$

za sve x takve da je $q(x) \neq 0$. Domena funkcije f je skup $R \setminus N(q)$. Skup svih nultočaka funkcije f je skup $N(p)$.

Pol racionalne funkcije f je svaki element skupa $N(q)$. Svaki pol je, dakle, korijen polinoma q pa ima svoju kratnost, koja se naziva **red pola**.

Neprava racionalna funkcija je funkcija f definirana formulom (5.1) pri čemu je $\operatorname{st} p \geq \operatorname{st} q$. Takva se funkcija uvijek može napisati kao zbroj polinoma (stupnja $\operatorname{st} p - \operatorname{st} q$) i prave racionalne funkcije. Prirodno područje definicije, nultočke i polovi pritom se određuju kao i kod prave racionalne funkcije.

5.3 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Ako se u točki $T = (1,0)$ povuče tangenta na jediničnu kružnicu i ta tangenta shvati kao brojevni pravac kojemu je ishodište u točki T, onda se tzv. **namatanjem pravca na kružnicu** svakoj točki pravca, a time i svakom realnom broju x, može pridružiti jedinstvena točka $T' = (x', y')$ na jediničnoj kružnici.

Funkcija koja broju x pridružuje broj x' naziva se **kosinus** (oznaka: cos).

Funkcija koja broju x pridružuje broj y' naziva se **sinus** (oznaka: sin).

Funkcija koja realnom broju x pridružuje ordinatu sjecišta pravca kroz točke O i T' i tangente na jediničnu kružnicu u točki T naziva se **tangens** (oznaka: tg). Vrijedi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Funkcija koja realnom broju x pridružuje apscisu sjecišta pravca kroz točke O i T' i tangente na jediničnu kružnicu u točki $(0, 1)$ naziva se **kotangens** (oznaka: ctg). Vrijedi $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Osnovna svojstva navedenih funkcija navedena su u tablici 5.1 na stranici 26.

Napomena: Funkcije $\operatorname{ctg} x$ i $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ *nisu* jednake jer nemaju jednake domene. Identitet $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ vrijedi ako i samo ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\,\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nijedna od četiri osnovne trigonometrijske funkcije nije bijekcija svoje domene na svoju sliku jer nijedna periodična realna funkcija nije injekcija. Međutim, njihova suženja (restrikcije) na određene intervale jesu injekcije, stoga i bijekcije na slike tih intervala, pa na tim intervalima postoje pripadni inverzi. Ti inverzi nazivaju se **ciklometrijske** ili **arkus funkcije**. Njihov naziv vezan je uz promatranje duljine pripadnog luka jedinične kružnice.

Sve arkus funkcije su omeđene i neperiodične. Pregled arkus funkcija i njihovih osnovnih svojstava naveden je u tablici 5.2 na stranici 26.

Neki osnovni identiteti vezani uz trigonometrijske i ciklometrijske funkcije navedeni su u točki 13.3.

5.4 Harmonijske funkcije

Neka su A, ω i φ realne konstante takve da su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \langle -\pi, \pi]$. **Harmonijska funkcija** je funkcija $f : \mathbb{R} \to [-A, A]$ definirana pravilom

$$f(x) = A\,\sin(\omega\,x + \varphi).$$

Vrijednost A naziva se **amplituda**, vrijednost ω **kružna frekvencija**, a vrijednost φ **fazni pomak** funkcije f.

U daljnjem tekstu pretpostavlja se da su $f, f_1, f_2, \ldots$ harmonijske funkcije.

Napomene:

1. Pretpostavka $A, \omega > 0$ uzima se bez smanjenja općenitosti. Naime, ako vrijedi $A < 0$ i/ili $\omega < 0$, onda se pripadna harmonijska funkcija svodi na razmatrani oblik primjenom identiteta

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x. \end{aligned}$$

2. I funkcija $g(x) = A\,\cos(\omega\,x + \varphi)$ može se razmatrati kao harmonijska funkcija. Da bi se dobio uobičajeni zapis harmonijske funkcije, primjenjuje se identitet $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Temeljni period funkcije f jednak je $T = \frac{2\,\pi}{\omega}$.

Skup svih nultočaka funkcije f je $N_f = \left\{\frac{k\,\pi - \varphi}{\omega} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ako su x_i i x_j dvije uzastopne (susjedne) nultočke funkcije f, onda je

$$|x_i - x_j| = \frac{1}{2}\,T.$$

Segment $I = [-\frac{\varphi}{\omega}, T - \frac{\varphi}{\omega}]$ naziva se **osnovni** ili **temeljni segment** funkcije f. Karakteristične točke funkcije f na njezinom osnovnom segmentu su:

$$T_0 = \left(-\frac{\varphi}{\omega}, 0\right), T_1 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}, A\right), T_2 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{2}, 0\right),$$
$$T_3 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{3\,T}{4}, -A\right) \text{ i } T_4 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + T, 0\right).$$

Funkcija $g(x) = A_1 \sin(\omega\, x) + A_2 \cos(\omega\, x)$ može se zapisati u obliku harmonijske funkcije $f_1(x) = A \sin(\omega\, x + \varphi)$, pri čemu se veličine A i φ određuju iz jednadžbi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{A_1}{A}, \ \sin\varphi = \frac{A_2}{A}.$$

Superpozicija funkcija $f_1(x) = A_1 \sin(\omega\, x + \varphi_1)$ i $f_2(x) = A_2 \sin(\omega\, x + \varphi_2)$ je funkcija $g(x) = A \sin(\omega\, x + \varphi)$, pri čemu se veličine A i φ određuju iz izraza:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}\right).$$

5.5 Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0$, $a \neq 1$, realna konstanta. **Eksponencijalna funkcija s bazom** a je proširenje po neprekidnosti[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije $f_Q : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definirane formulom

$$f_Q(r) = a^r := \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{za sve } r = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pišemo $f(x) = a^x$.

Eksponencijalna funkcija je bijekcija skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}^+ := \langle 0, +\infty\rangle$, te je stoga omeđena odozdo i nema nultočaka. Ta funkcija nije ni parna ni neparna ni periodička. Vodoravna asimptota[2] na njezin graf je pravac $y = 0$ (os apscisa).

Za $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija je strogo padajuća. Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija je strogo rastuća.

U primjenama najčešće korištena eksponencijalna funkcija je $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, gdje je e baza prirodnog logaritma. Broj e je iracionalan broj i približno je jednak $2.7182818\ldots$, a definira se kao granična vrijednost niza[3] $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ čiji je opći član jednak $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Pri računanju vrijednosti eksponencijalne funkcije vrlo često se primjenjuju svojstva potencija navedena u točki 13.1.

[1] Definiciju neprekidne funkcije vidjeti u točki 5.10, stranica 29.
[2] Vidi točku 6.8.
[3] Vidi točku 5.8.

5.6 Logaritamska funkcija

Inverz eksponencijalne funkcije s bazom a naziva se **logaritamska funkcija s bazom** a i označava s $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}^+$ vrijedi $a^{\log_a x} = x$.

Logaritamska funkcija je bijekcija skupa $\mathbb{R}^+$ na skup $\mathbb{R}$, te je stoga neomeđena i ima točno jednu nultočku $x = 1$. Ta funkcija nije ni parna ni neparna ni periodička. Uspravna asimptota[4] na njezin graf je pravac $x = 0$ (os ordinata).

Za $0 < a < 1$ logaritamska funkcija je strogo padajuća. Za $a > 1$ logaritamska funkcija je strogo rastuća.

Za $a = 10$ dobiva se funkcija **dekadskog logaritma** (oznaka: $\log x$). Za $a = \mathrm{e}$ dobiva se funkcija **prirodnog logaritma** (oznaka: $\ln x$).

Pri računanju vrijednosti logaritamske funkcije vrlo često se primjenjuju svojstva logaritama navedena u točki 13.1.

5.7 Hiperbolne i area funkcije

Koristeći eksponencijalnu funkciju $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ definiraju se osnovne **hiperbolne funkcije**. One predstavljaju svojevrstan analogon trigonometrijskih funkcija, pri čemu se umjesto jedinične kružnice promatra jednakostranična hiperbola čija je jednadžba $x^2 - y^2 = 1$. Njihov je pregled naveden u tablici 5.3 na stranici 26.

Graf funkcije ch naziva se još i **lančanica**.

Funkcije sh, th i cth, te suženje funkcije ch na interval $[0, +\infty\rangle$ su injekcije, stoga i bijekcije na slike tih funkcija. Pripadni inverzi nazivaju se **area funkcije**. One predstavljaju svojevrstan analogon ciklometrijskih funkcija, pri čemu se umjesto duljine luka kružnice promatra površina ravninskih likova određenih gore navedenom jednakostraničnom hiperbolom. Njihov je pregled dan u tablici 5.4 na stranici 26.

Osnovni hiperbolni identiteti: Za sve dopustive[5] $x, y \in \mathbb{R}$ vrijede sljedeće jednakosti:

1. $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{\pm x}$,
2. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,
3. $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$,
4. $\operatorname{ch}(2\,x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$,
5. $\operatorname{sh}(2\,x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$,
6. $\operatorname{th}(2\,x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$,
7. $\operatorname{cth}(2\,x) = \frac{\operatorname{cth}^2 x+1}{2 \operatorname{cth} x}$,
8. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$,
9. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$,
10. $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$,
11. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$,
12. $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(2\,x) - 1\right)$,
13. $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(2\,x) + 1\right)$,
14. $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right)$,
15. $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)\right)$,
16. $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right)$.

[4] Definiciju (uspravne) asimptote vidjeti na stranici 38.

[5] Vrijednosti x i y **dopustive** su za izraz I ako je svaki član tog izraza definiran za dotične vrijednosti.

Tablica 5.1: Trigonometrijske funkcije

naziv funkcije	*domena*	*slika*	*temeljni period*	*parnost*
sinus	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π	neparna
kosinus	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π	parna
tangens	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π	neparna
kotangens	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π	neparna

Tablica 5.2: Arkus funkcije

naziv funkcije	*oznaka*	*domena*	*slika*	*neka svojstva*
arkus sinus	arcsin	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	neparna, strogo rastuća
arkus kosinus	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	parna, strogo padajuća
arkus tangens	arctg	$\mathbb{R}$	$\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$	neparna, strogo rastuća
arkus kotangens	arcctg	$\mathbb{R}$	$\langle 0,\pi\rangle$	neparna, strogo padajuća

Tablica 5.3: Hiperbolne funkcije

naziv funkcije	*oznaka*	*domena*	*slika*	*formula*
kosinus hiperbolni	ch	$\mathbb{R}$	$[1,+\infty\rangle$	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
sinus hiperbolni	sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
tangens hiperbolni	th	$\mathbb{R}$	$\langle-1,1\rangle$	$\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ ili $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
kotangens hiperbolni	cth	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$	$\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ ili $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Tablica 5.4: Area funkcije

naziv funkcije	*oznaka*	*domena*	*slika*	*formula*
area kosinus hiperbolni	arch	$[1,+\infty\rangle$	$[0,+\infty\rangle$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
area sinus hiperbolni	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
area tangens hiperbolni	arth	$\langle-1,1\rangle$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$
area kotangens hiperbolni	arcth	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$

5.8 Nizovi i granične vrijednosti (limesi) nizova

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Izraz $a_n := a(n)$ naziva se **opći član** niza. Grafički prikaz niza je skup točaka na brojevnom pravcu.

Niz (a_n) je **aritmetički** ako postoji $d \in \mathbb{R}$ takav za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1} - a_n = d$. Broj d naziva se **razlika** aritmetičkog niza. Opći član tog niza računa se prema formuli

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

Zbroj prvih n članova toga niza (oznaka: S_n) računa se prema formuli

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n).$$

Niz (g_n) je **geometrijski** ako postoji $q \in \mathbb{R}$ takav za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$. Broj q naziva se **količnik** (**kvocijent**) geometrijskog niza. Opći član tog niza računa se prema formuli

$$g_n = a_1\,q^{n-1}.$$

Zbroj prvih n članova toga niza (oznaka: S_n) računa se prema formuli

$$S_n = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Realan broj L je **granična vrijednost** (**limes**) niza (a_n) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq N$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo: $L = \lim\limits_{n} a_n$.

Niz koji ima graničnu vrijednost nazivamo **konvergentnim**.

Svaki konvergentan niz je omeđen. Svaki omeđeni rastući/padajući niz je konvergentan.[6]

Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan**, odnosno da ne konvergira.

Kažemo da niz (a_n) *divergira k* $+\infty$ i pišemo $\lim a_n = +\infty$ ako za svaki broj $E > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n > E$.

Kažemo da niz (a_n) *divergira k* $-\infty$ i pišemo $\lim a_n = -\infty$ ako niz $(-a_n)$ divergira k $+\infty$.

Poučak 5.8.1 (o sendviču)**.** *Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \leq b_n \leq c_n$. Ako su nizovi (a_n) i (c_n) konvergentni i imaju istu graničnu vrijednost $L \in \mathbb{R}$, onda je i niz (b_n) konvergentan i ima graničnu vrijednost L.*

Osnovna svojstva konvergentnih nizova: Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi čije su granične vrijednosti redom jednake L_1 i L_2, pri čemu su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta > 0$ konstante. Tada su nizovi $(a_n \pm b_n)$, $(a_n\,b_n)$ i $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ (za $L_2 \neq 0$), kao i nizovi (a_n^α) (ako je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $L_1 > 0$) i (β^{a_n}), konvergentni i vrijedi:

1. $\lim\limits_{n}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$,
2. $\lim\limits_{n}(a_n\,b_n) = L_1\,L_2$,
3. $\lim\limits_{n} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$,
4. $\lim\limits_{n}(a_n^\alpha) = L_1^\alpha$,

[6] Definicije svojstava omeđenosti, (strogoga) rasta i (strogoga) pada niza analogne su definicijama istih svojstava za realnu funkciju jedne realne varijable.

5. $\lim(\beta^{a_n}) = \beta^{L_1}$.

Granične vrijednosti nekih karakterističnih nizova:

1. $\lim_n \frac{a}{n^k} = 0$, za svaki $a \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$,
2. ako je $b_m \neq 0$, tada vrijedi $\lim_n \frac{\sum_{k=0}^m a_k\, n^k}{\sum_{k=0}^m b_k\, n^k} = \frac{a_m}{b_m}$,
3. $\lim_n(\alpha\, a^n) = \begin{cases} 0, & \text{za } \alpha = 0 \text{ ili } 0 < a < 1, \\ \alpha, & \text{za } a = 1, \\ -\infty, & \text{za } \alpha < 0 \text{ i } a > 1, \\ +\infty, & \text{za } \alpha > 0 \text{ i } a > 1, \end{cases}$
4. $\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$, za $a \in \mathbb{R}$,
5. $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$,
6. $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

5.9 Granične vrijednosti (limesi) funkcije

Neka je f realna funkcija definirana na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ osim možda u točki $c \in I$. Ako za svaki rastući niz (x_n) u I takav da je $\lim_n x_n = c$ niz $(f(x_n))$ ima graničnu vrijednost $L_1 \in \mathbb{R}$, kaže se da je L_1 **granična vrijednost (limes) slijeva funkcije** f u točki c. Piše se: $L_1 = \lim_{x \to c-} f(x)$.

Ako za svaki padajući niz (x_n) u I takav da je $\lim_n x_n = c$ niz $(f(x_n))$ ima graničnu vrijednost $L_2 \in \mathbb{R}$, kaže se da je L_2 **granična vrijednost (limes) zdesna funkcije** f u točki c. Piše se: $L_1 = \lim_{x \to c+} f(x)$.

Ako vrijedi jednakost $L_1 = L_2 =: L$, kaže se da **funkcija** f **ima (obostranu) graničnu vrijednost** odnosno **(obostrani) limes** L **u točki** c. Piše se: $L = \lim_{x \to c} f(x)$.

Ako je za svaki rastući niz (x_n) u I takav da je $\lim_n x_n = c$ niz $(f(x_n))$ divergentan, dogovorno pišemo $\lim_{x \to c-} f(x) = -\infty$ ako je $(f(x_n))$ padajući niz, odnosno $\lim_{x \to c-} f(x) = +\infty$ ako je $(f(x_n))$ rastući niz. Analogne se oznake definiraju za limese zdesna i za obostrane limese.

Ako za svaki rastući divergentni niz (x_n) niz $(f(x_n))$ ima graničnu vrijednost $M_1 \in \mathbb{R}$, tada pišemo: $M_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. U analognom slučaju kada je (x_n) padajući divergentni niz, a $(f(x_n))$ ima graničnu vrijednost $M_2 \in \mathbb{R}$ pišemo: $M_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Pri određivanju graničnih vrijednosti funkcije primjenjuju se ista pravila kao i kod određivanja granične vrijednosti niza. Neka su f i g funkcije čije su granične vrijednosti (slijeva, zdesna ili obostrane) u točki c redom jednake L_1 i L_2, pri čemu su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta > 0$ konstante. Tada funkcije $f \pm g$, $f\,g$ i $\frac{f}{g}$ (za $L_2 \neq 0$), kao i funkcije $(f(x))^\alpha$ (ako je $f(x) > 0$ za sve x), $\beta^{f(x)}$ $(\beta > 0)$ i $f(x)^{g(x)}$ (za $L_1 > 0$) imaju granične vrijednosti u točki c i vrijedi:

1. $\lim_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
2. $\lim_{x \to c}(f(x)\, g(x)) = L_1\, L_2$,
3. $\lim_{x \to c}(a\, f(x)) = a\, L_1$, $a \in \mathbb{R}$,

4. $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$, za $L_2\neq 0$,
5. $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^{\alpha}=L_1^{\alpha}$, ako je $L_1>0$ i $f(x)>0$ za svaki $x\in I\setminus\{c\}$,
6. $\lim\limits_{x\to c}\beta^{f(x)}=\beta^{L_1}$, $\beta>0$,
7. $\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}=L_1^{L_2}$.

Neke karakteristične jednostrane i obostrane granične vrijednosti funkcija:

Kad god nije drugačije navedeno, a je realna konstanta.

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^a}=0$, $a>0$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}=+\infty$, $a<0$,
3. $\lim\limits_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+a\,x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a>0$,
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+a\,x)}{x}=a$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a\,x)}{x}=a$,
8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin(a\,x)}{x}=0$,
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg}x=-\infty$,
10. $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{ctg}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{ctg}x=+\infty$,
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$,
12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0$,
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0, & \text{za svaki } a\in\langle 0,1\rangle,\\ 1, & \text{za } a=1,\\ +\infty, & \text{za svaki } a>1,\end{cases}$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, & \text{za svaki } a>1,\\ 1, & \text{za } a=1,\\ +\infty, & \text{za svaki } a\in\langle 0,1\rangle,\end{cases}$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$,
16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}x=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{cth}x=-1$,
17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{cth}x=1$,
18. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arcth}x=0$.

5.10 Neprekidne funkcije

Neka je $I\subset\mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f:I\to\mathbb{R}$ je **neprekidna u točki** $c\in I$ ako granična vrijednost $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ postoji i jednaka je $f(c)$.

Napomena: Funkcija može biti neprekidna isključivo u onim točkama u kojima je definirana.

Funkcija f je **neprekidna na skupu** $S\subset\mathbb{R}$ ako je neprekidna u svakoj točki tog skupa.

Ako je $S=[a,b\rangle$, onda je f neprekidna na S ako vrijedi sljedeće:

1. f je neprekidna na $\langle a,b\rangle$,
2. postoji limes zdesna funkcije f u točki a i jednak je $f(a)$.

Ako je $S=\langle a,b]$, onda je f neprekidna na S ako vrijedi sljedeće:

1. f je neprekidna na $\langle a,b\rangle$,
2. postoji limes slijeva funkcije f u točki b i jednak je $f(b)$.

Funkcija f je neprekidna na segmentu $[a,b]$ ako i samo ako je f neprekidna na intervalima $[a,b\rangle$ i $\langle a,b]$.

Sve elementarne funkcije (polinomi, (ne)prava racionalna funkcija, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije, hiperbolne i area funkcije itd.) neprekidne su na svojim područjima definicije (domenama).

Neka svojstva neprekidnih funkcija:

1. Neka su f i g funkcije neprekidne u točki c i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada su i funkcije $f \pm g$, $f\,g$ i $\alpha\, f$ neprekidne u točki c.

2. Neka su f i g funkcije takve da je g neprekidna u točki c, a f neprekidna u točki $g(c)$. Tada je i funkcija $f \circ g$ neprekidna u točki c.

Neka svojstva funkcija neprekidnih na segmentu: Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi sljedeće:

1. Slika funkcije f je neki segment $[c, d] \subset \mathbb{R}$. Odavde slijedi da funkcija postiže najmanju vrijednost c i najveću vrijednost d.

2. Za svaki $y \in [c, d]$ postoji barem jedan $x \in [a, b]$ takav da je $y = f(x)$.

3. Ako je $f(a)\, f(b) < 0$, tada postoji barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(c) = 0$. Drugim riječima, ako vrijednosti funkcije f na krajevima segmenta $[a, b]$ imaju različite predznake, onda f ima nultočku u intervalu $\langle a, b\rangle$.

5.11 Vrste prekida funkcije

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima **prekid u točki** $c \in I$ ako nije neprekidna u točki c.

Napomena: Funkcija može imati prekid isključivo u onim točkama u kojima je definirana.

Razlikujemo sljedeće vrste prekida funkcije u točki.

- Ako jednostrani limesi $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ postoje i jednaki su $a \in \mathbb{R}$, te ako je $f(c) \neq a$, kažemo da f ima **uklonjivi prekid** u točki c. Prekid se ukloni tako da se u točki c promijeni vrijednost funkcije definirajući $f(c) := a$.

- Ako gore navedeni jednostrani limesi postoje i različiti su, tada funkcija f u točki c ima prekid **prve vrste**.

- Ako barem jedan od gore navedenih jednostranih limesa ne postoji, tada f ima u točki c prekid **druge vrste**.

Poglavlje 6

Osnove diferencijalnog računa

6.1 Derivacija funkcije

Neka su $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Ako za $x_0 \in I$ postoji granična vrijednost

$$L := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

kažemo da f ima **derivaciju u točki** x_0 jednaku L i pišemo $f'(x_0) := L$.

Vrijednost derivacije funkcije u točki x_0 geometrijski se interpretira kao koeficijent smjera tangente povučene na graf funkcije f u točki $T = (x_0, f(x_0))$. Kaže se da je funkcija f **derivabilna** na I ako f ima derivaciju u svakoj točki. **Derivacija funkcije** f je funkcija koja svakom realnom broju $x \in I$ pridružuje realan broj $f'(x)$. Derivacija funkcije može se definirati i izrazom

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Domena funkcije f' je uvijek podskup domene funkcije f.

Napomena: U poglavlju 7 promatrat ćemo funkcije čija je domena neki segment $[a, b]$. U takvim slučajevima potrebno je definirati derivacije funkcije i u rubnim točkama toga segmenta. Te derivacije su tzv. **jednostrane derivacije** definirane izrazima

$$f'(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(b) := \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivacije elementarnih funkcija navedene su u tablici 6.1. Pritom su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstante i $\alpha \neq 0$.

Tablica 6.1: Derivacije elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
α^x $(\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1)$	$\alpha^x \ln \alpha$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\log_\alpha x$ $(\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln \alpha}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(\alpha\, x + \beta)$	$\alpha\, f'(\alpha\, x + \beta)$

Osnovna pravila deriviranja: Neka su f i g funkcije derivabilne na intervalu I i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $x \in I$ vrijedi sljedeće:

1. $(\alpha\, f(x))' = \alpha\, f'(x)$,
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
3. $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$,
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$ i posebno $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$,
5. $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)\, g'(x)$ tj. $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\, g'(x)$,
6. Ako je funkcija f injekcija, dakle bijekcija na sliku $f(I)$, i inverzna funkcija $f^{-1} \colon f(I) \to I$ je je derivabilna u točki $x \in f(I)$, onda je $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$, tj. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Deriviranje implicitno zadane funkcije $f(x, y) = 0$:

1. Članovi koji sadrže samo varijablu x deriviraju se po toj varijabli na uobičajen način (tj. kao funkcije varijable x).
2. Članovi koji sadrže varijablu y deriviraju se prema osnovnim pravilima deriviranja smatrajući da je $y = y(x)$ funkcija varijable x. Iz tako dobivenog izraza treba izraziti y'.

Logaritamsko deriviranje: Za funkciju $y(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)}$ vrijedi:

$$y'(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)} \left(g'(x)\, \ln\big(f(x)\big) + \frac{g(x)\, f'(x)}{f(x)} \right).$$

Jednadžba tangente na ravninsku krivulju zadanu jednadžbom $y = f(x)$ u točki $T = (x_0, f(x_0))$ glasi:

$$t \ldots y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

Jednadžba tangente na ravninsku krivulju zadanu parametarski izrazom

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \qquad t \in S \subset \mathbb{R}$$

u točki $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ za neki $t_0 \in S$, dana je formulom

$$t \ldots y = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - x_0) + y_0.$$

Jednadžba normale na ravninsku krivulju zadanu jednadžbom $y = f(x)$ u točki $T = (x_0, f(x_0))$ glasi:

$$t \ldots y = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) + f(x_0).$$

6.2 Lokalni i globalni ekstremi

Neka je f realna funkcija neprekidna na intervalu $I = \langle a, b \rangle$[1]. Ako za točku $c \in I$ postoji otvoreni interval $I_c = \langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ takav da je $c \in I_c$ i da za svaki $x \in I_c \setminus \{c\}$ vrijedi

1. $f(x) \geq f(c)$, tada f ima **lokalni minimum u točki** c.
2. $f(x) > f(c)$, tada f ima **strogi lokalni minimum u točki** c.
3. $f(x) \leq f(c)$, tada f ima **lokalni maksimum u točki** c.
4. $f(x) < f(c)$, tada f ima **strogi lokalni maksimum u točki** c.

(Strogi) lokalni minimum i (strogi) lokalni maksimum jednim se imenom nazivaju **(strogi) lokalni ekstremi**.

Neka su $f : X \to Y$ realna funkcija i $c \in X$. Ako za svaki $x \in X \setminus \{c\}$ vrijedi

1. $f(x) \geq f(c)$, tada f ima **globalni minimum u točki** c.
2. $f(x) > f(c)$, tada f ima **strogi globalni minimum u točki** c.
3. $f(x) \leq f(c)$, tada f ima **globalni maksimum u točki** c.
4. $f(x) < f(c)$, tada f ima **strogi globalni maksimum u točki** c.

(Strogi) globalni minimum i (strogi) globalni maksimum jednim se imenom nazivaju **(strogi) globalni ekstremi**.

Stacionarna točka derivabilne funkcije f je svaka nultočka funkcije f'. Svaki lokalni ekstrem derivabilne funkcije je stacionarna točka, ali neka stacionarna točka ne mora biti lokalni ekstrem.

f''-test za određivanje strogih lokalnih ekstrema: Neka je realna funkcija f dvaput derivabilna na intervalu I.

Korak 1. Odrediti prvu derivaciju f'.

Korak 2. Ako f' nema na intervalu I niti jedne nultočke, onda funkcija f na intervalu I nema niti lokalnih niti globalnih ekstrema. U protivnom, odrediti sve nultočke funkcije f' koje pripadaju intervalu I.

[1] U obzir dolaze slučajevi kada je f neprekidna na $\mathbb{R}$ ili na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ ili na intervalu $\langle -\infty, b \rangle$.

Korak 3. Odrediti drugu derivaciju $f'' = (f')'$.

Korak 4. Za svaku nultočku x_0 dobivenu u prethodnom koraku odrediti predznak vrijednosti $f''(x_0)$.

Korak 5. Ako je $f''(x_0) > 0$, onda f u točki x_0 ima strogi lokalni minimum. Ako je $f''(x_0) < 0$, onda f u točki x_0 ima strogi lokalni maksimum. Ako je $f''(x_0) = 0$, tada treba računati, ako postoje, vrijednosti derivacija viših redova[2] u točki x_0, tj. brojeve $f'''(x_0)$, $f^{iv}(x_0)$, $f^{v}(x_0)$ itd. Ako su sve te vrijednosti jednake nuli, f''-test ne daje odluku, pa treba primijeniti algoritam za određivanje lokalnih ekstrema naveden niže. U suprotnom, neka je n najmanji prirodan broj takav da je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ako je n neparan, tada f nema strogi lokalni ekstrem u točki x_0. Ako je n paran, tada f u točki x_0 ima strogi lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(x_0) < 0$, odnosno strogi lokalni minimum ako je $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Određivanje globalnih ekstrema derivabilne funkcije definirane na segmentu $I = [a, b]$:

Korak 1. Odrediti prvu derivaciju f'.

Korak 2. Odrediti sve nultočke funkcije f' koje pripadaju intervalu $\langle a, b\rangle$.

Korak 3. Za svaku nultočku x_0 dobivenu u prethodnom koraku izračunati $f(x_0)$.

Korak 4. Izračunati $f(a)$ i $f(b)$.

Korak 5. Među svim vrijednostima izračunatim u prethodna dva koraka odrediti najmanju, odnosno najveću. Najmanja vrijednost je globalni minimum, a najveća globalni maksimum.

Određivanje intervala monotonosti i strogih lokalnih ekstrema funkcije f: Neka je f realna funkcija derivabilna na intervalu $I = \langle a, b\rangle$[3].

Korak 1. Odrediti prvu derivaciju f'.

Korak 2. Odrediti sve nultočke funkcije f' koje pripadaju intervalu I[4].

Korak 3. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ sve nultočke dobivene u prethodnom koraku označene tako da vrijede nejednakosti $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} := b$. Skup $I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ može se prikazati kao unija točno $n+1$ otvorenih intervala $I_1, I_2, \ldots, I_{n+1}$, pri čemu je $I_k = \langle x_{k-1}, x_k\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Korak 4. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n+1$ odabrati točku $t_k \in I_k$.

Korak 5. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n+1$ odrediti predznak broja $f'(t_k)$. Ako je $f'(t_k) > 0$, onda f strogo raste na intervalu I_k. Ako je $f'(t_k) < 0$, onda f strogo pada na intervalu I_k.

Korak 6. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ vrijede sljedeće tvrdnje:

1. ako je $f'(t_k) < 0$ i $f'(t_{k+1}) > 0$, tada f ima strogi lokalni minimum u točki x_k,
2. ako je $f'(t_k) > 0$ i $f'(t_{k+1}) < 0$, tada f ima strogi lokalni maksimum u točki x_k,
3. ako su brojevi $f'(t_k)$ i $f'(t_{k+1})$ istog predznaka, tada f nema strogi lokalni ekstrem u točki x_k.

---

[2] O derivacijama višeg reda vidjeti točku 6.5 na stranici 35.

[3] Dozvoljavaju se slučajevi $a = -\infty$ ili $b = +\infty$, $I = \mathbb{R}$, te slučaj kada je I unija konačno mnogo otvorenih intervala.

[4] Na ovaj korak treba naročito pripaziti ako su f i f' suženja funkcija koje su inače derivabilne na nadskupu intervala I.

6.3 Neki osnovni poučci diferencijalnog računa

Poučak 6.3.1 (Fermat)**.** *Neka je f realna funkcija definirana na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Ako f ima u točki $c \in I$ lokalni minimum ili lokalni maksimum, te ako postoji $f'(c)$, tada je $f'(c) = 0$. Drugim riječima, ako funkcija f postiže lokalni ekstrem u točki c, onda ili vrijedi $f'(c) = 0$ ili f nema derivaciju u točki c.*

Poučak 6.3.2 (Rolle)**.** *Neka je f realna funkcija neprekidna na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ako je f derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$ i ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.*

Poučak 6.3.3 (Lagrangeov poučak o srednjoj vrijednosti)**.** *Neka je f realna funkcija neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada postoji barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrijski, postoji barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije f u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$.

Poučak 6.3.4 (Cauchyev poučak o srednjoj vrijednosti)**.** *Neka su f i g realne funkcije neprekidne na segmentu $[a, b]$ i derivabilne na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $g'(x) \neq 0$, tada postoji barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

6.4 L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo

Neka su funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle a, b\rangle$, osim eventualno u točki $c \in I$. Pretpostavimo da je $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in I \setminus \{c\}$. Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ ili $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ te ako postoji limes $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$, onda postoji i limes $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jednak je L.

Brojevi a, b i c mogu biti i $\pm\infty$. U slučaju kada je $c = \pm\infty$, umjesto pretpostavke $g(x), g'(x) \neq 0$ za sve $x \in I \setminus \{c\}$, treba pretpostaviti da postoji $M > 0$ tako da vrijedi $g(x), g'(x) \neq 0$ kada je $|x| > M$.

Pomoću ovog pravila, a uz primjenu odgovarajućih algebarskih transformacija, ponekad je moguće odrediti i granične vrijednosti oblika $0 \cdot \pm\infty$, $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$ itd.

U određenim slučajevima ovo je pravilo moguće primijeniti i višekratno, ali uvijek provjeravajući jesu li ispunjene pretpostavke uz koje je moguće primijeniti pravilo.

6.5 Derivacije višeg reda

Derivacija reda n induktivno se definira s

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)', \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je dogovorno $f^{(0)} := f$. Praktično se derivacija reda n dobije n-strukim deriviranjem polazne funkcije f.

U općem je slučaju derivaciju reda n nemoguće odrediti eksplicitnim pravilom.

U nekim je slučajevima podesno primijeniti **Leibnizovu formulu**:

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)}.$$

U gornjoj su formuli za prirodne brojeve n i k s

$$\binom{n}{k} := \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

označeni **binomni koeficijenti**, gdje je $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$ umnožak prvih k prirodnih brojeva.[5] Dogovorno vrijedi $0! := 1$.

Neke karakteristične derivacije višeg reda navedene su u Tablici 6.2. Pritom je f n-puta derivabilna funkcija, a $\alpha, \beta, m \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ su konstante.

Tablica 6.2: Više derivacije nekih funkcija

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^m	$\begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n}, & \text{za } m \in \mathbb{N} \text{ i } m \geq n, \\ 0, & \text{za } m \in \mathbb{N} \text{ i } m < n, \\ x^{m-n} \prod_{k=0}^{n-1}(m-k), & \text{za } m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$
α^x, $\alpha > 0$	$\alpha^x\,(\ln\alpha)^n$
$\ln x$	$\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$
$\sin x$	$\sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{za parne } n \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{ch} x, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	$\begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{za parne } n \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{sh} x, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
$f(\alpha\,x + \beta)$	$\alpha^n\, f^{(n)}(\alpha\,x + \beta)$

6.6 Diferencijal funkcije

Diferencijal derivabilne funkcije y (oznaka: $\mathrm{d}y$) je linearna aproksimacija prirasta te funkcije u okolini neke njezine točke. Definiran je formulom:

$$\mathrm{d}y = y'(x)\,\Delta x \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x.$$

[5] Oznaku $\binom{n}{k}$ čitati „en povrh ka”, a oznaku $n!$ „en faktorijela”.

Pritom je Δx **prirast** varijable x, a $\mathrm{d}x$ diferencijal funkcije $y(x) = x$. Može se pokazati da vrijedi jednakost $\mathrm{d}x = \Delta x$, pa se $\mathrm{d}x$ uobičajeno naziva **diferencijalom varijable** x.

Za derivabilnu funkciju kaže se i da je **diferencijabilna**.

Neka svojstva diferencijala: Neka su f i g diferencijabilne funkcije. Tada vrijedi sljedeće:

1. diferencijal svake konstantne funkcije jednak je nuli,
2. $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$,
3. $\mathrm{d}(f\,g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$,
4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$, uz uvjet $g(x) \neq 0$.

6.7 Konveksnost i konkavnost funkcije

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. f je **strogo konveksna** na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako je f derivabilna i strogo konveksna na I, te ako je $c \in I$, onda se tangenta povučena na graf funkcije f u točki $T = (c, f(c))$ nalazi ispod toga grafa.

Neka je f derivabilna na I. Tada je f strogo konveksna na I ako i samo ako je f' strogo rastuća funkcija na I.

Neprekidna funkcija f je **strogo konkavna** na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako je f derivabilna i strogo konkavna na I, te ako je $c \in I$, onda se tangenta povučena na graf funkcije f u točki $T = (c, f(c))$ nalazi iznad toga grafa.

Neka je f derivabilna na I. Tada je f strogo konkavna na I ako i samo ako je f' strogo padajuća funkcija na I.

Točka $T = (c, f(c))$ je **prijevojna točka** (**točka infleksije**) grafa funkcije f ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je funkcija f konveksna/konkavna na intervalu $\langle c - \varepsilon, c\rangle$, a konkavna/konveksna na intervalu $\langle c, c + \varepsilon\rangle$.

Postupak određivanja prijevojnih točaka i intervala konveksnosti i konkavnosti: Neka je funkcija f dvaput derivabilna na intervalu I.

Korak 1. Odrediti drugu derivaciju f'' funkcije f.

Korak 2. Odrediti sve nultočke funkcije f'' koje pripadaju intervalu I.[6]

Korak 3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sve nultočke dobivene u prethodnom koraku označene redom tako da je $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} := b$. Navedenim točkama podijeliti interval I na točno $n + 1$ dijelova.

[6] Na ovaj korak treba naročito pripaziti ako su f i f'' suženja funkcija koje su inače derivabilne na nadskupu intervala I.

Korak 4. Iz svakog dijela dobivenog u prethodnom koraku odabrati po jednu točku. Neka su te točke redom $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$.

Korak 5. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n+1$ odrediti predznak broja $f''(t_k)$. Ako je

1. $f''(t_k) > 0$, funkcija f je konveksna na intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$.
2. $f''(t_k) < 0$, funkcija f je konkavna na intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$.

Korak 6. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ utvrditi ima li f'' različite predznake na intervalima $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ i $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$. Ako ima, tada je $T_k = (x_k, f(x_k))$ prijevojna točka grafa funkcije f. Ako nema, tada T_k nije prijevojna točka toga grafa.

6.8 Asimptote na graf realne funkcije

Neka je f realna funkcija. Pravac p je **asimptota** na graf Γ funkcije f (kraće: asimptota funkcije f) ako udaljenost između p i točke $T \in \Gamma$ teži prema nuli čim se točka T beskonačno udaljava od ishodišta koordinatnog sustava. Razlikujemo dvije vrste asimptota: **uspravne** (**vertikalne**) i **kose** (što uključuje i **vodoravne**).

Pravac čija je jednadžba $x = c$ je **uspravna asimptota** funkcije f ako vrijedi $\lim_{x \to c+} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim_{x \to c-} f(x) = \pm\infty$.

Tipičan primjer uspravne asimptote je asimptota koja prolazi polom racionalne funkcije.

Kose asimptote mogu biti **lijeve** i **desne**. To su pravci čije jednadžbe imaju oblik $y = k\,x + l$, gdje su k i l realni brojevi određeni izrazima:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \\ l &= \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - k\,x\big), \end{aligned}$$

pri čemu se u oba gornja limesa uzima $x \to +\infty$ za desnu, a $x \to -\infty$ za lijevu kosu asimptotu.

Ako je $k = 0$, tada govorimo o lijevoj, odnosno desnoj **vodoravnoj** (ili **horizontalnoj**) asimptoti.

Ako se lijeva kosa asimptota podudara s desnom kosom asimptotom, govori se o (**obostranoj**) **kosoj asimptoti**. Posebno, ako se lijeva vodoravna asimptota podudara s desnom vodoravnom asimptotom, govori se o (**obostranoj**) **vodoravnoj asimptoti**.

6.9 Ispitivanje tijeka funkcije

Ispitivanje tijeka funkcije obuhvaća određivanje sljedećih podataka:

1. prirodno područje definicije,
2. nultočke,
3. sjecište grafa funkcije s osi ordinata,
4. točke prekida,
5. polovi funkcije i njihovi redovi,
6. parnost i periodičnost funkcije,
7. intervali monotonosti,
8. lokalni (eventualno globalni) ekstremi,
9. intervali konveksnosti i konkavnosti,
10. prijevojne točke,
11. asimptote,
12. skiciranje grafa funkcije na temelju prethodnih podataka.

Poglavlje 7

Osnove integralnog računa

7.1 Primitivna funkcija i neodređeni integral

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. **Primitivna funkcija** funkcije f je svaka funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$. Pritom se u rubnim točkama a i b zapravo radi o jednostranim derivacijama (vidi napomenu na stranici 31).

Svaka funkcija neprekidna na segmentu ima primitivnu funkciju.

Ako funkcija f ima barem jednu primitivnu funkciju, kaže se da je f **integrabilna**. Skup svih primitivnih funkcija funkcije f naziva se **neodređeni integral** funkcije f i označava

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

U gornjem zapisu funkciju f nazivamo **podintegralna funkcija**, dok je $\mathrm{d}x$ diferencijal nezavisne varijable.

Vezu između dviju različitih primitivnih funkcija iskazuje sljedeći poučak.

Poučak 7.1.1. *Neka je f integrabilna funkcija, te F_1 i F_2 dvije njezine različite primitivne funkcije. Tada postoji jedinstveni $C \in \mathbb{R}$ takav da za svaki dopustivi x vrijedi: $F_1(x) = F_2(x) + C$. Stoga je*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\},$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija za f.

Primitivnu funkciju čiji je slobodni član (sumand koji ne sadrži nezavisnu varijablu) jednak 0 nazivamo **standardna antiderivacija**. U daljnjem tekstu pod pojmom **antiderivacija** podrazumijevamo standardnu antiderivaciju.

Napomena: Prema Poučku 7.1.1, svaka primitivna funkcija funkcije f može se dobiti tako da se standardnoj antiderivaciji F funkcije f doda neka realna konstanta C. Zbog toga se obično piše:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Neka osnovna pravila za integriranje: Neka su f i g integrabilne realne funkcije, te $\alpha \in \mathbb{R}$ konstanta. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $\displaystyle\int \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x,$

2. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

Napomena: Općenito, $\int f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ **nije** jednako $\int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Tablica 7.1 sadrži osnovne (elementarne) antiderivacije. Pritom je $\alpha \neq 0$ realna konstanta.

Tablica 7.1: Osnovne antiderivacije

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
1	x	$\mathrm{tg}\,x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathrm{ctg}\,x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$
α^x $(\alpha > 0 \text{ i } \alpha \neq 1)$	$\frac{1}{\ln\alpha}\,\alpha^x$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\,x$
$\ln x$	$x\,\ln x - x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\,x$
$\frac{1}{x^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$
$\frac{1}{x^2-\alpha^2}$	$\frac{1}{2\alpha}\,\ln\left\lvert\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right\rvert$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$
$\sqrt{x^2+\alpha}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\,\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)$	$\mathrm{th}\,x$	$\ln\lvert\mathrm{ch}\,x\rvert$
$\sqrt{\alpha^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{\lvert\alpha\rvert}$	$\mathrm{cth}\,x$	$\ln\lvert\mathrm{sh}\,x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm\alpha^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right\rvert$	$\frac{1}{\mathrm{sh}\,x}$	$\ln\left\lvert\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{\lvert\alpha\rvert}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$	$2\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\mathrm{cth}\,x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}\,x$

7.2 Metoda zamjene (supstitucije) varijable

Neodređeni integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ u nekim se slučajevima može svesti na tablični integral koristeći sljedeći algoritam:

Korak 1. Zamijeniti

$$\begin{cases} t = g(x) \text{ i/ili } x = g^{-1}(t), \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{g'(x)}\,\mathrm{d}t, \end{cases}$$

gdje je g „nova” integrabilna funkcija.

Korak 2. Zapisati polaznu podintegralnu funkciju kao funkciju varijable t, pri čemu treba uvažiti obje gornje zamjene.

Korak 3. Odrediti neodređeni integral funkcije dobivene u prethodnom koraku.

Korak 4. U izrazu dobivenom u prethodnom koraku zamijeniti t s $g(x)$ i pojednostavniti dobiveni izraz. Dobiveno rješenje je traženi neodređeni integral.

7.3 Metoda djelomične (parcijalne) integracije

Primjenjuje se u slučajevima kad je polazni integral oblika $\int f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$, gdje je f funkcija koju je jednostavno *derivirati*, a g funkcija koju je jednostavno *integrirati*.

Korak 1. Odrediti du i v iz sljedeće sheme:

$$\begin{aligned} u &= f(x) & \qquad v &= \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= f'(x)\,\mathrm{d}x & \qquad \mathrm{d}v &= g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Korak 2. Polazni integral jednak je $u\,v - \int v\,\mathrm{d}u$.

Za funkciju u obično se izabiru logaritamska funkcija, ciklometrijske funkcije itd. Funkcija v je antiderivacija funkcije g.

7.4 Integriranje racionalnih funkcija

7.4.1 Integriranje pravih racionalnih funkcija

Integriranje pravih racionalnih funkcija može se podijeliti u nekoliko tipova. Izdvajaju se dva najčešća.

Tip 1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\,x^2 + b\,x + c}$, $a \neq 0$.

Integriranje se provodi zamjenom $t = x + \dfrac{b}{2\,a}$. Dobiva se tablični integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{a\,t^2 + c - \frac{b^2}{4\,a}}$.

Tip 2. $\displaystyle\int \frac{m\,x + n}{a\,x^2 + b\,x + c}$, $a \neq 0$.

U ovom se slučaju najprije odrede realni brojevi A i B iz jednakosti $m\,x + n = A\,(2\,a\,x + b) + B$. Polazni integral se time svodi na

$$A\,\ln(a\,x^2 + b\,x + c) + B\int \frac{\mathrm{d}x}{a\,x^2 + b\,x + c},$$

što je integral tipa 1 pa se određuje gore opisanom zamjenom.

Integriranje ostalih pravih racionalnih funkcija provodi se pomoću metode neodređenih koeficijenata (vidjeti točku 7.4.2), pogodnim zamjenama, djelomičnom integracijom itd.

7.4.2 Metoda neodređenih koeficijenata

U nekim posebnim slučajevima racionalne funkcije kojima su nazivnici polinomi stupnja barem 3 možemo rastaviti na **parcijalne razlomke**, pa njihovo integriranje svesti ili na tablično integriranje ili na integriranje racionalnih funkcija kojima su u nazivniku polinomi 2. stupnja.

Neka je $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ prava racionalna funkcija i neka je

$$g(x) = p_1(x)^{m_1}\, p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n} = \prod_{k=1}^{n} p_k(x)^{m_k},$$

gdje su p_k polinom 1. stupnja ili polinom 2. stupnja koji nema realnih korijena i $m_k \in \mathbb{N}$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$. Tada funkciju R možemo zapisati u sljedećem obliku, koji nazivamo **rastav na parcijalne razlomke**:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{p_i(x)^j}, \quad \text{gdje je} \quad a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{ako je } \operatorname{st} p_i = 1, \\ \alpha_{ij}\, x + \beta_{ij}, & \text{ako je } \operatorname{st} p_i = 2. \end{cases}$$

Vrijednosti realnih koeficijenata α_{ij} i β_{ij} određuju se pomoću definicije jednakosti dvaju polinoma (vidi stranicu 21).

Ukupan broj međusobno različitih razlomaka koji se pojavljuju u rastavu polazne racionalne funkcije na parcijalne razlomke jednak je $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

7.4.3 Integriranje nepravih racionalnih funkcija

Integriranje neprave racionalne funkcije $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ provodi se na sljedeći način:

Korak 1. Odrediti količnik q i ostatak r pri dijeljenju polinoma f polinomom g.

Korak 2. Sada je

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Prvi integral na desnoj strani jednakosti je integral polinoma koji se svodi na zbroj tabličnih integrala, dok je drugi integral prave racionalne funkcije i određuje se nekom od ranije opisanih metoda.

7.5 Integriranje iracionalnih funkcija

Integriranje iracionalnih funkcija može se podijeliti u nekoliko tipova. Izdvajaju se tri najčešća tipa.

Tip 1. $\displaystyle\int \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}\,\mathrm{d}x$ ili $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}$, $a \neq 0$.

Integriranje se provodi zamjenom $t = x + \frac{b}{2\,a}$. Time radikand[1] prelazi u oblik $a\,t^2 + c - \frac{b^2}{4\,a}$, a zadani integral svodi se na tablični.

Tip 2. $\displaystyle\int \frac{m\,x + n}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}\,\mathrm{d}x$, $a \neq 0$.

Najprije treba odrediti realne brojeve A i B tako da vrijedi $m\,x + n = A\,(2\,a\,x + b) + B$. Zatim se polazni integral može zapisati u obliku

$$2\,A\,\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} + B \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}},$$

što je integral tipa 1, pa se određuje na gore opisan način.

[1] Radikand je izraz ispod korijena, tj. ono što se korjenuje.

Tip 3. $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,\mathrm{d}x$, gdje su $a \neq 0$ i P polinom stupnja n.

Deriviranjem obiju strana jednakosti

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} + \alpha \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$$

i izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije varijable x treba odrediti polinom Q stupnja $n-1$ i konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$. Preostaje integral tipa 1, koji se određuje na gore opisan način.

7.6 Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija

Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija provodi se koristeći trigonometrijske, odnosno hiperbolne identitete. Izdvajaju se najčešći tipovi.

Tip 1. $\displaystyle\int \sin^m x\,\cos^n x\,\mathrm{d}x$ ili $\displaystyle\int \mathrm{sh}^m x\,\mathrm{ch}^n x\,\mathrm{d}x$, gdje su m i n nenegativni cijeli brojevi.

Ako je m neparan, tj. oblika $m = 2\,k+1$, onda integral treba zapisati u obliku

$$\int \sin x\,\sin^{2\,k} x\,\cos^n x\,\mathrm{d}x, \quad \text{odnosno} \int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}^{2\,k}\,\mathrm{ch}^n x\,\mathrm{d}x,$$

pa uvesti zamjenu $t = \cos x$, odnosno $t = \mathrm{ch}\,x$, uz korištenje identiteta $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, odnosno $\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1$.

Ako je n neparan, tj. oblika $n = 2\,k+1$, onda integral treba zapisati u obliku

$$\int \cos x\,\cos^{2\,k} x\,\sin^m x\,\mathrm{d}x, \quad \text{odnosno} \int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}^{2\,k} x\,\mathrm{sh}^n x\,\mathrm{d}x,$$

pa uvesti zamjenu $t = \sin x$, odnosno $t = \mathrm{sh}\,x$, uz korištenje identiteta $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, odnosno $\mathrm{ch}^2 x = \mathrm{sh}^2 x + 1$.

Ako su m i n parni brojevi, treba primijeniti formule za trigonometrijske, odnosno hiperbolne funkcije dvostrukog argumenta, navedene u točkama 5.7 i 13.3.

Tip 2. $\displaystyle\int \cos(m\,x)\,\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \cos(m\,x)\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \mathrm{ch}(m\,x)\,\mathrm{ch}(n\,x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \mathrm{ch}(m\,x)\,\mathrm{sh}(n\,x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \mathrm{sh}(m\,x)\,\mathrm{sh}(n\,x)\,\mathrm{d}x$.

Pri integriranju se koriste formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih, odnosno hiperbolnih funkcija u odgovarajući zbroj tih funkcija, navedene u točkama 5.7 i 13.3.

Tip 3. $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, gdje je R racionalna funkcija (dviju varijabli).

Pri integriranju se uvodi zamjena $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, koja ima sljedeće posljedice:

$$\begin{aligned} \sin x \quad &\text{prelazi u} \quad \frac{2\,t}{1+t^2}, \\ \cos x \quad &\text{prelazi u} \quad \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \mathrm{d}x \quad &\text{prelazi u} \quad \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Napomena: Ako vrijedi $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pogodnije je primijeniti zamjenu $x = \operatorname{arctg} t$, pri čemu

$$\begin{aligned} \sin x &\quad \text{prelazi u} \quad \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x &\quad \text{prelazi u} \quad \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \mathrm{d}x &\quad \text{prelazi u} \quad \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

7.6.1 Integriranje iracionalnih funkcija pomoću trigonometrijskih i hiperbolnih zamjena

Osnovne zamjene navedene su u Tablici 7.2. Pritom su R racionalna funkcija dviju varijabli i $a > 0$ realna konstanta.

Tablica 7.2: Osnovne trigonometrijske i hiperbolne zamjene

podintegralna funkcija	*trigonometrijska zamjena*	*hiperbolna zamjena*
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a\ \sin t$	$x = a\ \operatorname{th} t$
$R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$	$x = a\ \operatorname{tg} t$	$x = a\ \operatorname{sh} t$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\cos t}$	$x = a\ \operatorname{ch} t$

7.7 Određeni integral

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ (oznaka: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) je realan broj čija točna definicija izlazi iz okvira ovog Repetitorija. Neke moguće interpretacije tog broja navedene su u točki 7.7.2.

Određeni integral se efektivno izračunava pomoću **Newton-Leibnizove formule**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

pri čemu je F antiderivacija funkcije f.

Napomena: Gornja formula vrijedi i ako je F bilo koja primitivna funkcija za f.

7.7.1 Neka osnovna svojstva određenog integrala

1. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, za svaki $c \in [a, b]$.

4. Ako je f neparna funkcija integrabilna na $[-a, a]$, onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

5. Ako je f parna funkcija integrabilna na $[-a, a]$, onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.7.2 Neke primjene određenog integrala

Prosječna vrijednost funkcije f neprekidne na segmentu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Površina ravninskog lika omeđenog pravcima $y = 0$, $x = a$ i $y = b$ te grafom neprekidne funkcije f:

$$P = \int_{a}^{b} |f(x)|.$$

Duljina lûka grafa funkcije f između točaka $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$:

$$d = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom ravninskog lika omeđenog pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$, te grafom neprekidne funkcije f, oko osi apscisa jednak je

$$V_x = \pi\int_{a}^{b} f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Za rotaciju oko osi ordinata taj je obujam jednak

$$V_y = 2\,\pi\int_{a}^{b} x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

uz uvjet da su a i b istog predznaka.

Površina plašta rotacijskog tijela nastalog rotacijom ravninskog lika omeđenog pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$, te grafom neprekidne funkcije f:

$$P = 2\,\pi\int_{a}^{b} |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Težište T ravne homogene ploče omeđene pravcima $x = a$ i $x = b$, te grafovima funkcijâ f i g neprekidnih na segmentu $[a, b]$, uz uvjet da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi nejednakost $g(x) \leq f(x)$:

$$T = \left(\frac{\int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x}, \frac{\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,\mathrm{d}x}{2\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x}\right).$$

Poglavlje 8

Nepravi integrali

Nepravi integrali su određeni integrali kod kojih podintegralna funkcija nije omeđena na intervalu integracije ili kod kojih je barem jedna granica „beskonačna”. Njihovo izračunavanje, osim izračunavanja određenih integrala pomoću Newton-Leibnizove formule, podrazumijeva i određivanje graničnih vrijednosti (limesa).

8.1 Integrali s beskonačnim granicama

Uz pretpostavke da su $a, b \in \mathbb{R}$ i da je funkcija f integrabilna na promatranim intervalima, razlikuju se tri osnovna tipa integrala s beskonačnim granicama.

Tip 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ako integral na desnoj strani postoji za svaki $a < b$, te ako postoji navedeni limes.

Tip 2. $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ako integral na desnoj strani postoji za svaki $b > a$, te ako postoji navedeni limes.

Tip 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, za bilo koji $c \in \mathbb{R}$ (obično je pogodno odabrati $c = 0$), te ako postoje oba neprava integrala na desnoj strani.

Ako svaka od navedenih graničnih vrijednosti postoji, kaže se da pripadni nepravi integral *konvergira*. Ako vrijednost integrala teži ka $+\infty$ ili $-\infty$, kažemo da nepravi integral **divergira**.

8.2 Integrali neomeđenih funkcija

Ako za neprekidnu neomeđenu funkciju $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ vrijedi

1. $c = a$, tada je $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, ako limes s desne strane postoji.
2. $c = b$, tada je $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$, ako limes s desne strane postoji.

3. $c \in \langle a, b\rangle$, tada je $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ako oba limesa s desne strane postoje.

Ako svaka od navedenih graničnih vrijednosti postoji, kažemo da pripadni nepravi integral konvergira. Inače, taj integral divergira.

8.3 Kriteriji usporedbe za neprave integrale

Pomoću sljedećih kriterija moguće je ispitati konvergenciju nekog nepravog integrala bez efektivnog izračunavanja njegove vrijednosti. Navode se tri osnovna kriterija usporedbe.

Prvi kriterij usporedbe. Neka su $f, g : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da za svaki $x \geq a$ vrijedi $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Ako $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, tada i $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira.
2. Ako $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ divergira, tada i $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ divergira.

Analogne tvrdnje vrijede i ako se pretpostavka $x \geq a$ zamijeni pretpostavkom $x \leq a$, a podintegralne funkcije promatramo na intervalu $\langle -\infty, a]$.

Drugi kriterij usporedbe. Neka su $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da vrijedi $0 \leq f(x) \leq g(x)$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Ako $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, tada i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira.
2. Ako $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ divergira, tada i $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ divergira.

Granični kriterij. Neka su f i g pozitivne funkcije neprekidne na $[a, +\infty\rangle$ i neka postoji konačan limes

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Tada integrali $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Prigodom primjene navedenih kriterija često se koriste sljedeći rezultati:

1. Integrali $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ i $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ konvergiraju ako je $n > 1$, a inače divergiraju.
2. Za $b \geq a$, integral $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^n}$ konvergira ako je $n < 1$, a inače divergira.

Poglavlje 9

Redovi realnih brojeva

Neka je (a_n) zadani niz realnih brojeva. Niz (s_n) čiji je opći član definiran pravilom $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ naziva se **niz djelomičnih zbrojeva** (ili **niz parcijalnih suma**) zadanog niza. Uređeni par $((a_n),(s_n))$ naziva se **red**. Umjesto $((a_n),(s_n))$ koriste se oznake $\sum a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i druge.

Red $\sum a_n$ je **konvergentan** ukoliko niz (s_n) ima graničnu vrijednost $S \in \mathbb{R}$. U tom se slučaju S naziva **zbrojem reda** i piše: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Red $\sum a_n$ je **apsolutno konvergentan** ukoliko je red $\sum |a_n|$ konvergentan.

Red $\sum a_n$ je **divergentan** ako je niz (s_n) divergentan.

9.1 Pravila za ispitivanje konvergencije reda

Pravilo 1. Ako vrijedi $\lim a_n \neq 0$, red $\sum a_n$ je divergentan.

Napomena: Ako je niz (s_n) konvergentan, onda je i niz (a_n) konvergentan i vrijedi $\lim\limits_n a_n = 0$.

Pravilo 2. Ako red $\sum |a_n|$ konvergira, tada i red $\sum a_n$ konvergira. Drugim riječima, svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

Pravilo 3 (*Cauchyev kriterij*)**.** Ako je

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R},$$

tada je red $\sum |a_n|$

1. konvergentan ako je $r < 1$,
2. divergentan ako je $r > 1$.

Ako je $r = 1$, ovaj kriterij ne daje odluku.

Pravilo 4 (*D'Alembertov kriterij*)**.** Ako je

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \in \mathbb{R},$$

tada je red $\sum |a_n|$

1. konvergentan ako je $r < 1$,
2. divergentan ako je $r > 1$.

Ako je $r = 1$, ovaj kriterij ne daje odluku.

Pravilo 5 (*Raabeov kriterij*)**.** Ako je $\lim\limits_n \left(n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \right) = r \in \mathbb{R}$, tada je red $\sum |a_n|$

1. divergentan ako je $r < 1$,
2. konvergentan ako je $r > 1$.

Ako je $r = 1$, ovaj kriterij ne daje odluku.

Pravilo 6 (*Leibnizov kriterij*)**. Alternirajući red** $\sum (-1)^n a_n$, gdje je $a_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, konvergira ako je niz (a_n) padajući i ima graničnu vrijednost jednaku 0.

Pravilo 7 (*kriterij usporedbe*)**.** Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $0 \leq a_n \leq b_n$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako je red $\sum b_n$ konvergentan, tada je i red $\sum a_n$ konvergentan.
2. Ako je red $\sum a_n$ divergentan, tada je i red $\sum b_n$ divergentan.

Pravilo 8 (*drugi kriterij usporedbe*)**.** Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi takvi da je $\lim\limits_n \frac{a_n}{b_n} > 0$. Ako jedan od tih redova konvergira, onda konvergira i drugi. Analogna tvrdnja vrijedi ako se riječ *konvergira* zamijeni riječju *divergira*.

Pravilo 9 (*Cauchyev integralni kriterij*)**.** Ako je f nenegativna, neprekidna i monotono padajuća funkcija na intervalu $[1, +\infty\rangle$, tada red $\sum f(n)$ i nepravi integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.

9.2 Algebarske operacije s redovima

Redovi brojeva se zbrajaju, oduzimaju i množe realnim brojem različitim od nule prema načelu „član po član". Točnije, vrijede sljedeće jednakosti:

1. $\sum a_n \pm \sum b_n := \sum (a_n \pm b_n)$,
2. $c \sum a_n := \sum (c\, a_n)$, $c \in \mathbb{R}$.

Cauchyevo množenje redova. Umnožak apsolutno konvergentnih redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ definira se formulom

$$\sum a_n \cdot \sum b_n := \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right).$$

9.3 Neki posebni redovi realnih brojeva

Harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ je divergentan (iako vrijedi $\lim\limits_n \frac{1}{n} = 0$).

Dirichletov ili **hiperharmonijski red** $\sum \frac{1}{n^p}$ je konvergentan za $p > 1$, a divergentan za $0 < p \leq 1$. (za $p = 1$ dobiva se harmonijski red.)

Neka je $a \in \mathbb{R}$. **Geometrijski red** $\sum\limits_{n \geq 0} a\, x^n$ konvergira za $|x| < 1$ i u tom je slučaju njegov zbroj jednak $S = \frac{a}{1-x}$. Za $|x| \geq 1$ red je divergentan.

Poglavlje 10

Taylorov i MacLaurinov red

Ako se neka funkcija želi aproksimirati polinomom na otvorenom intervalu oko neke točke iz njezine domene, korisno je promatrati **redove potencija**. To su redovi oblika

$$\sum a_n \, (x-c)^n.$$

Iz ove klase redova najčešće se promatra *Taylorov red*.

Najveći otvoreni interval $\langle a, b\rangle$ oko točke c na kojemu je red potencija konvergentan naziva se **interval konvergencije**. Točke a i b vrlo se često određuju korištenjem Pravila 3-6 iz točke 9.1 na stranici 49 (Cauchyjev, D'Alembertov, Raabeov i Leibnizov kriterij). Pritom je $-\infty$ odnosno $+\infty$ dopuštena vrijednost ruba a odnosno b.

Taylorov red funkcije f oko točke c takve da je f beskonačno puta derivabilna u točki c je red

$$\sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \, (x-c)^n = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)}{2}\,(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{6}\,(x-c)^3 + \ldots$$

Uz određene uvjete na funkciju f, za svaki x iz intervala konvergencije vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \, (x-c)^n.$$

Takva se funkcija f naziva **analitička funkcija**. Sve su elementarne funkcije, tj. funkcije koje se pojavljuju u ovom Repetitoriju, analitičke.

Prvih $m+1$ članova reda tvore **Taylorov polinom stupnja** m (oznaka: $T_m(x)$).

Posebno, za $c = 0$ i za funkciju f beskonačno puta derivabilnu u točki 0 dobiva se **MacLaurinov razvoj** funkcije f u red potencija, tj. vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\,x^3 + \ldots$$

Prvih $m+1$ članova reda tvore **MacLaurinov polinom stupnja** m (oznaka: $M_m(x)$).

10.1 Neki osnovni razvoji u MacLaurinov red

1. $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$

2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$

3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$

4. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \langle -1, 1\rangle,$

5. $\frac{1}{1-x^m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{mn}, \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \langle -1, 1\rangle,$

6. $\frac{1}{1+x^m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{mn}, \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \langle -1, 1\rangle,$

7. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle,$

8. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$

Napomena: Pri određivanju Taylorovog razvoja funkcije f u red potencija oko neke točke $c \neq 0$ treba koristiti definicijsku formulu za opći član Taylorovog razvoja u red ili eventualno „gotovu” formulu za n-tu derivaciju funkcije f (vidjeti stranicu 35).

Poglavlje 11

Osnove harmonijske analize

Ako se promatra aproksimacija periodičnih realnih funkcija, onda se umjesto Taylorovog, odnosno MacLaurinovog reda, koristi **trigonometrijski red**. Trigonometrijski red je red oblika

$$\sum (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)).$$

Prvih $n+1$ članova reda tvore trigonometrijski polinom. Preciznije, **trigonometrijski polinom stupnja** n je funkcija p definirana pravilom:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)).$$

Od spomenutih redova za praksu je najznačajniji **Fourierov red**.

Periodičnu realnu funkciju f definiranu na osnovnom segmentu S moguće je razviti u Fourierov red ako su ispunjeni sljedeći uvjeti (tzv. **Dirichletovi uvjeti**):

1. Funkcija f na segmentu S ima konačno mnogo točaka prekida i ti prekidi su prve vrste[1].
2. Funkcija f na segmentu S ima konačno mnogo strogih ekstrema.

Ako je $S = [-\pi, \pi]$, onda se pripadni koeficijenti razvoja funkcije u Fourierov red (tzv. **Fourierovi koeficijenti**) računaju prema sljedećim formulama:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

U tom slučaju razvoj funkcije f u Fourierov red glasi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)).$$

Prvih $m+1$ članova ovog reda tvore **Fourierov polinom stupnja** m (oznaka: $F_m(x)$):

$$F_m(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \cdots + a_m \cos(m\,x) + b_m \sin(m\,x).$$

[1] Vidi točku 5.11.

U općem slučaju, tj. ako je f definirana na segmentu $[x_0, x_0+T]$, gdje je T temeljni period funkcije f, Fourierovi koeficijenti računaju se prema sljedećim formulama:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,\cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{T}\,x\right)\,\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,\sin\left(\frac{2\,n\,\pi}{T}\,x\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

U tom slučaju razvoj funkcije f u Fourierov red glasi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{T}\,x\right) + b_n\,\sin\left(\frac{2\,n\,\pi}{T}\,x\right)\right).$$

11.1 Fourierov red (ne)parne funkcije

Ako je funkcija $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ parna, onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $b_n = 0$. Tada se Fourierovi koeficijenti a_n mogu računati prema sljedećim pojednostavljenim formulama.

1. Ako je $L = \pi$, vrijedi $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ i $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x$.
2. Općenito, za $L > 0$ vrijedi $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$ i $a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\mathrm{d}x$.

Pripadni razvoj funkcije u Fourierov red jednak je:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos(n\,x), \quad \text{za } L = \pi, \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \quad \text{za } L > 0. \end{aligned}$$

Pripadni Fourierovi polinomi stupnja m glase:

$$\begin{aligned} F_m(x) &= a_0 + a_1\,\cos x + \cdots + a_m\,\cos(m\,x), \quad \text{za } L = \pi, \\ F_m(x) &= a_0 + a_1\,\cos\left(\frac{\pi}{L}\,x\right) + \cdots + a_m\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right), \quad \text{za } L > 0. \end{aligned}$$

Ako je funkcija $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ neparna, onda za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi $a_n = 0$. U tom slučaju Fourierovi koeficijenti b_n mogu se računati prema sljedećim pojednostavljenim formulama.

1. Ako je $L = \pi$, tada vrijedi $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x$.
2. Općenito, za $L > 0$ vrijedi $b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\mathrm{d}x$.

Pripadni razvoj funkcije u Fourierov red jednak je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin(n\,x), \quad \text{za } L = \pi, \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right), \quad \text{za } L > 0. \end{aligned}$$

Pripadni Fourierovi polinomi stupnja m glase:

$$F_m(x) = b_1 \sin x + \cdots + b_m \sin(m\,x), \quad \text{za } L = \pi,$$
$$F_m(x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}\,x\right) + \cdots + b_m \sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right), \quad \text{za } L > 0.$$

U nastavku se navode neki često korišteni identiteti pri izračunu Fourierovih koeficijenata. Radi jednostavnosti, umjesto neodređenih integrala navedene su antiderivacije. Ne istakne li se drugačije, $a, b, c \in \mathbb{R}$ su konstante, pri čemu je $a \neq 0$.

1. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neparna periodična funkcija s temeljnim periodom $T > 0$. Tada za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f\left(k\,\frac{T}{2}\right) = 0$.
2. $\cos(n\,\pi) = (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{za parne } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$
3. $\sin(n\,\pi) = 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$.
4. $\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1, & \text{za } n = 4\,k-2, \\ 0, & \text{za } n = 2\,k-1, \\ 1, & \text{za } n = 4\,k, \end{cases}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.
5. $\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1, & \text{za } n = 4\,k-1, \\ 0, & \text{za } n = 2\,k, \\ 1, & \text{za } n = 4\,k-3, \end{cases}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.
6. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = 0$, za sve $m, n \in \mathbb{N}$.
7. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\,\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n. \end{cases}$
8. $\int (a\,x+b)\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\,\big(a\,\sin(n\,x) - (a\,n\,x + b\,n)\,\cos(n\,x)\big)$.
9. $\int (a\,x+b)\,\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\,\big(a\,\cos(n\,x) + (a\,n\,x + b\,n)\,\sin(n\,x)\big)$.
10. $\int \mathrm{e}^{a\,x+b}\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+a^2}\,\mathrm{e}^{a\,x+b}\,\big(a\,\sin(n\,x) - n\,\cos(n\,x)\big)$.
11. $\int \mathrm{e}^{a\,x+b}\,\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+a^2}\,\mathrm{e}^{a\,x+b}\,\big(n\,\sin(n\,x) + a\,\cos(n\,x)\big)$.
12. $\int (ax^2+bx+c)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^3}\,\big((2a - an^2x^2 - bn^2x - cn^2)\,\cos(nx) + (2anx + bn)\,\sin(nx)\big)$.
13. $\int (ax^2+bx+c)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^3}\,\big((2anx + bn)\,\cos(nx) + (an^2x^2 + bn^2x + cn^2 - 2a)\,\sin(nx)\big)$.

Poglavlje 12

Obične diferencijalne jednadžbe

Neka su x nezavisna varijabla, a y realna funkcija jedne realne varijable. **Obična diferencijalna jednadžba reda** n je jednadžba oblika

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

gdje je F neka realna funkcija $n+1$ varijabli. Za razliku od algebarskih jednadžbi, obična diferencijalna jednadžba kao nepoznanicu ima realnu funkciju jedne realne varijable.

Svaka funkcija y koja uvrštena u običnu diferencijalnu jednadžbu daje identitet koji vrijedi za svaki x iz domene funkcije y naziva se **partikularno rješenje** obične diferencijalne jednadžbe. Pritom se standardno pretpostavlja da funkcija y ima neprekidnu n-tu derivaciju, što automatski znači da postoje i sve derivacije nižih redova, te da su i one neprekidne. (Kaže se i da je funkcija y klase C^n na svojoj domeni.)

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe n-tog reda može se zapisati u obliku $G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$, gdje su $C_1, \ldots, C_n$ neke realne konstante.

Ravninska krivulja koja predstavlja graf nekog partikularnog rješenja obične diferencijalne jednadžbe naziva se **integralna krivulja**.

Cauchyjev problem sastoji se od obične diferencijalne jednadžbe reda n i ukupno n različitih početnih uvjeta. Početni uvjeti mogu biti vrijednosti nepoznate funkcije u n različitih točaka iz njezine domene, vrijednosti nepoznate funkcije i svih njezinih derivacija do uključivo derivacije reda $n-1$ u nekoj točki itd. Za razliku od obične diferencijalne jednadžbe koja ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja, Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje.

U nastavku se navodi pregled nekih standardnih tipova običnih diferencijalnih jednadžbi. Ako se ne istakne drugačije, a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, C, C_1 i C_2 su realne konstante.

U nastavku ovog poglavlja pod pojmom „diferencijalna jednadžba” podrazumijevat ćemo običnu diferencijalnu jednadžbu.

12.1 Diferencijalna jednadžba 1. reda sa separiranim varijablama

Opći oblik: $y' = f(x)\,g(y)$ ili $F_1(x)\,G_1(y)\,\mathrm{d}x + F_2(x)\,G_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$.

Opće rješenje: Ovisno o obliku u kojemu je jednadžba zapisana, rješenje je dano izrazom:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C \quad \text{ili} \quad \int \frac{G_2(y)}{G_1(y)}\,\mathrm{d}y + \int \frac{F_1(x)}{F_2(x)}\,\mathrm{d}x = C.$$

12.2 Homogena diferencijalna jednadžba 1. reda

Opći oblik: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, odnosno $y' = f\left(\frac{a_1\,x+b_1\,y+c_1}{a_2\,x+b_2\,y+c_2}\right)$.

Prvi oblik rješava se zamjenom $u = \frac{y}{x}$, pri čemu je $u(x)$ nova nepoznata funkcija. Pritom treba koristiti jednakosti $y = u\,x$ i $y' = u'\,x + u$.

Drugi se oblik rješava tako da se najprije izračuna $D = a_1\,b_2 - a_2\,b_1$. Ako je $D = 0$, uvodi se zamjena $u = a_1\,x + b_1\,y + c_1$, pri čemu je $u(x)$ nova nepoznata funkcija. Pritom treba izraziti $a_2\,x + b_2\,y + c_2$ kao linearnu funkciju argumenta u, te koristiti jednakost $y' = \frac{1}{b_1}\,(u' - a_1)$. Tako se dobije jednadžba oblika $u' = g\left(\frac{u}{x}\right)$ koja se riješi ranije opisanim postupkom.

Ako je $D \neq 0$, treba izračunati $\alpha = \frac{1}{D}\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$ i $\beta = \frac{1}{D}\,(a_2\,c_1 - a_1\,c_2)$. Potom se uvode zamjene $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ i $y' = v'$. Tako se dobije diferencijalna jednadžba 1. reda oblika $v' = g\left(\frac{v}{u}\right)$ kojoj je nepoznanica funkcija $v(u)$, a koja se rješava ranije opisanim postupkom. Nakon određivanja rješenja, treba provesti zamjene $u = x - \alpha$ i $v = y - \beta$, te tako dobiti rješenje polazne jednadžbe.

12.3 Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda

Opći oblik: $y' + P(x)\,y = Q(x)$.

Opće rješenje: $y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,Q(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$.

Napomena: Ako je $Q \equiv 0$, dobiva se homogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda. Ona je poseban slučaj diferencijalne jednadžbe 1. reda sa separiranim varijablama, pa se njezino opće rješenje može dobiti i primjenom formule iz točke 12.1.

12.4 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba

Opći oblik: $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^k$, gdje je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Napomena: Za $k = 0$ dobiva se nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda koja se rješava primjenom formule iz točke 12.3. Za $k = 1$ dobiva se diferencijalna jednadžba 1. reda sa separiranim varijablama čije se opće rješenje dobiva primjenom formule iz točke 12.1.

Opće rješenje: Neka je $g(x) = \mathrm{e}^{(1-k)\int P(x)\,\mathrm{d}x}$. Tada je opće rješenje u implicitnom obliku dano izrazom

$$y^{k-1}(x) = \frac{g(x)}{(1-k)\int g(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x + C}.$$

12.5 Homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

Opći oblik:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0. \tag{12.1}$$

Postupak rješavanja:

Korak 1. Napisati i riješiti pripadnu **karakterističnu jednadžbu**

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0. \tag{**}$$

Korak 2. Ako s λ_1 i λ_2 označimo rješenja karakteristične jednadžbe, opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe dobiva se pomoću sljedeće tablice.

tip rješenja jednadžbe (**)	*opće rješenje*
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2$	$y = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$
$\lambda_1 = \alpha + \beta\,i \in \mathbb{C},\ \beta > 0$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\,(C_1\,\cos(\beta\,x) + C_2\,\sin(\beta\,x))$

12.6 Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

Opći oblik:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = R, \tag{12.2}$$

pri čemu je R realna funkcija jedne varijable.

Postupak rješavanja:

Korak 1. Napisati i riješiti pripadnu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

postupkom iz točke 12.5. Neka je y_h opće rješenje te jednadžbe.

Korak 2. Odrediti *bilo koje* partikularno rješenje y_p polazne jednadžbe.

Korak 3. Opće rješenje polazne jednadžbe je $y = y_h + y_p$.

Oblici partikularnog rješenja u nekim posebnim slučajevima navedeni su u tablici 12.1 na stranici 60.

Tablica 12.1: Oblici partikularnog rješenja jednadžbe 12.1

oblik funkcije R	*oblik rješenja y_p*	*istaknuta vrijednost*
polinom $P(x)$ stupnja n	$x^s\,(A_0 + A_1\,x + \cdots + A_n\,x^n)$	0
$E\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}$	$x^s\,A\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}$	α
$P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}$, gdje je $P(x)$ polinom stupnja n	$x^s\,(A_0 + A_1\,x + \cdots + A_n\,x^n)\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}$	α
$E_1\,\cos\beta\,x + E_2\,\sin\beta\,x$	$x^s\,(A_0\,\cos\beta\,x + B_0\,\sin\beta\,x)$	$\beta\,i$
$P(x)\,\cos\beta\,x + Q(x)\,\sin\beta\,x$, gdje su P i Q polinomi stupnjeva m i n	$x^s\,(A_0 + A_1\,x + \cdots + A_k\,x^k)\,\cos\beta\,x +$ $x^s\,(B_0 + B_1\,x + \cdots + B_k\,x^k)\,\sin\beta\,x$, gdje je $k = \max\{m, n\}$	$\beta\,i$
$E_1\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}\,\cos\beta\,x + E_2\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}\,\sin\beta\,x$	$x^s\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}\,(A_0\,\cos\beta\,x + B_0\,\sin\beta\,x)$	$\alpha + \beta\,i$

Napomena: Vrijednost parametra s jednaka je

- 0, ako istaknuta vrijednost navedena u trećem stupcu tablice 12.1 *nije* korijen jednadžbe (**),
- kratnosti istaknute vrijednosti, inače.

12.7 Princip superpozicije rješenja diferencijalne jednadžbe 2. reda

Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ neka je y_i opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = R_i.$$

Tada je $y = \sum_{i=1}^n y_i$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

12.8 Metoda varijacije konstanti za rješavanje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda

Osnovna ideja metode varijacije konstanti za rješavanje diferencijalne jednadžbe (12.2) jest interpretirati konstante C_1 i C_2 koje se pojavljuju u rješenju pripadne homogene diferencijalne jednadžbe kao realne funkcije varijable x. Derivacije tih funkcija potom se određuju rješavanjem sustava funkcionalnih jednadžbi

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = R(x), \end{cases}$$

gdje su y_1 i y_2 **bazična rješenja** pripadne homogene diferencijalne jednadžbe. Tada je jedno partikularno rješenje y_p jednadžbe (12.2) dano izrazom:

$$y_p = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2,$$

gdje su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ antiderivacije dobivenih izraza $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$. Može se pokazati da je to partikularno rješenje dano izrazom:

$$y_p = -y_1 \int y_2\,\frac{R}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int y_1\,\frac{R}{W}\,\mathrm{d}x, \quad W = y_1\,y_2' - y_2\,y_1'.$$

Alternativno, stavimo li $u=\frac{y_2}{y_1}$ i $v=\frac{R}{y_1}$, partikularno rješenje jednadžbe (12.2) može se odrediti prema formuli

$$y_p = y_1 \int u' \left(\int \frac{v}{u'}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x.$$

U oba slučaja opće rješenje jednadžbe (12.2) jednako je $y = y_h + y_p$.

12.9 Laplaceovi transformati

Laplaceov transformat funkcije $f : [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\,t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Pišemo: $F = \mathcal{L}(f)$.

Pridruživanje $f \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F$ naziva se **Laplaceova transformacija**. Ona ima svojstvo *linearnosti*, tj. za svake dvije funkcije $f, g : [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ te za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathcal{L}(a\,f + b\,g) = a\,\mathcal{L}(f) + b\,\mathcal{L}(g)$.

Osnovna svojstva Laplaceovih transformata: Neka je $f : [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ i neka je F njezin Laplaceov transformat. Tada vrijede sljedeće jednakosti:

1. $\mathcal{L}(f') = s\,F(s) - f(0)$,
2. $\mathcal{L}(f'') = s^2\,F(s) - s\,f(0) - f'(0)$,
3. $\mathcal{L}(f(a\,x)) = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$,
4. $\mathcal{L}\left(\frac{1}{a}\,f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = F(a\,s)$,
5. $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{a\,t} f(x)) = F(s-a)$,
6. $\mathcal{L}\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$.

U Tablici 12.2 navedeni su Laplaceovi transformati nekih realnih funkcija. Pritom su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante.

Tablica 12.2: Laplaceovi transformati nekih funkcija

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\sin(a\,t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
a	$\frac{a}{s}$	$\cos(a\,t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t\,\sin(a\,t)$	$\frac{2\,a\,s}{(s^2+a^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$t\,\cos(a\,t)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{-a\,t}\,\sin(b\,t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$\mathrm{e}^{-a\,t}$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{e}^{-a\,t}\,\cos(b\,t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$t\,\mathrm{e}^{-a\,t}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{ch}(a\,t)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$t^n\,\mathrm{e}^{-a\,t}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{sh}(a\,t)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Poglavlje 13

Dodatak

13.1 Formule iz algebre

Osnovni algebarski identiteti:

1. $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2\,x\,y + y^2$,
2. $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 \pm y^3$,
3. $(x - y)\,(x + y) = x^2 - y^2$,
4. $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)\,(x^2 \mp x\,y + y^2)$.

Potencije imaginarne jedinice: Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi

1. $i^{4\,k} = 1$,
2. $i^{4\,k+1} = i$,
3. $i^{4\,k+2} = -1$,
4. $i^{4\,k+3} = -i$.

Osnovna svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^m\,a^n = a^{m+n}$,
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,
5. $(a^m)^n = a^{m\,n}$,
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$,
7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}$,
8. $\log_a 1 = 0$,
9. $\log_a a = 1$,
10. $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$,
11. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
12. $\log_a(x^y) = y\,\log_a x$,
13. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\,\log_a x$,
14. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Formula za rješenja kvadratne jednadžbe $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}.$$

Pritom vrijede **Vièteove formule**: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1\,x_2 = \frac{c}{a}$.

13.2 Formule iz analitičke geometrije u ravnini

Udaljenost točaka $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Oblici jednadžbe pravca:

1. **eksplicitni**: $y = k\,x + l$, pri čemu su k koeficijent smjera, a l odsječak na osi ordinata,
2. **implicitni**: $A\,x + B\,y + C = 0$,
3. **segmentni**: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, pri čemu su m odsječak na osi apscisa, n odsječak na osi ordinata.

Jednadžba pravca s koeficijentom smjera k kroz točku $T = (x_0, y_0)$:

$$y = k\,(x - x_0) + y_0.$$

Jednadžba pravca kroz točke $T_1 = (x_1, y_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2)$:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1.$$

Pravci $p \ldots y = k_1\,x + l_1$ i $q \ldots y = k_2\,x + l_2$ su **usporedni** ako i samo ako vrijedi $k_1 = k_2$.

Neka su $p \ldots y = k_1\,x + l_1$ i $q \ldots y = k_2\,x + l_2$ pravci takvi da je $k_1, k_2 \neq 0$. Pravci p i q su **okomiti** ako i samo ako vrijedi $k_1\,k_2 = -1$.

Udaljenost točke $T = (x_0, y_0)$ **od pravca** $p \ldots A\,x + B\,y + C = 0$:

$$d(T, p) = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Kut φ između pravaca $p \ldots y = k_1\,x + l_1$ i $q \ldots y = k_2\,x + l_2$:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\,k_2}\right|.$$

Jednadžbe nekih krivulja 2. reda:

1. **kružnica** sa središtem u točki $S = (x_0, y_0)$ i polumjerom r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

2. **elipsa** s poluosima a i b, te središtem u točki $S = (x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

3. **hiperbola** s poluosima a i b, te središtem u točki $S = (x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

13.3 Formule iz trigonometrije

Osnovni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Adicijske formule:

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \, \cos y \pm \cos x \, \sin y$,
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \, \cos y \mp \sin x \, \sin y$,
3. $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \, \operatorname{tg} y}$,
4. $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \, \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$.

Formule redukcije:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$,
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$,
3. $\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$,
4. $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$,
5. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x$,
6. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x$,
7. $\operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x$,
8. $\operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x$.

Formule za trigonometrijske funkcije dvostrukog argumenta:

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2x)$,
2. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)$,
3. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$,
4. $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$,
5. $\sin 2x = 2 \sin x \, \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$,
6. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$,
7. $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$,
8. $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$.

Formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj:

1. $\sin x \, \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x + y) + \sin(x - y)\right)$,
2. $\cos x \, \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x + y) + \cos(x - y)\right)$,
3. $\sin x \, \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right)$.

Formule pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak:

1. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
2. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,
3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
4. $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$,
5. $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \, \cos y}$,
6. $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \, \sin y}$.

Osnovne ciklometrijske relacije:

1. $\arcsin x + \arccos x = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$,
2. $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$,
3. $\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x \sqrt{1 - y^2} \pm y \sqrt{1 - x^2}\right)$,
4. $\arccos x \pm \arccos y = \arcsin\left(x\, y \mp \sqrt{1 - x^2}\, \sqrt{1 - y^2}\right)$,

5. $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x\pm y}{1\mp x\,y}$,

6. $\operatorname{arcctg} x \pm \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{x\,y\mp 1}{y\pm x}$.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih posebnih kutova:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	/

Neke posebne vrijednosti ciklometrijskih funkcija:

x	$\arcsin x$	$\arccos x$	x	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$	0

Pretvorba stupnjeva u radijane: $x^\circ = \frac{\pi}{180}\,x$ rad.

Pretvorba radijana u stupnjeve: x rad $= \left(\frac{180}{\pi}\,x\right)^\circ$.

Trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b},$$
$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

Površina trokuta:

$$P = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\gamma = \frac{1}{2}\,a\,c\,\sin\beta = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha.$$

Sinusov poučak:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,R,$$

pri čemu je R polumjer trokutu opisane kružnice.

Kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

Tangensov poučak:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

13.4 Formule iz planimetrije

Heronova formula za površinu trokuta sa stranicama a, b i c:

$$P = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Opseg i površina trokuta:

$$O = a + b + c, \quad P = \frac{a\,v_a}{2} = \frac{b\,v_b}{2} = \frac{c\,v_c}{2}.$$

Opseg i površina paralelograma:

$$O = 2\,(a+b), \quad P = a\,b\,\sin\varphi,$$

pri čemu je φ kut između stranica a i b.

Opseg i površina kruga polumjera r:

$$O = 2\,r\,\pi, \quad P = r^2\,\pi.$$

Površina elipse s poluosima a i b:

$$P = a\,b\,\pi.$$

13.5 Formule iz stereometrije

Oplošje i obujam kocke stranice a:

$$O = 6\,a^2, \quad V = a^3.$$

Oplošje i obujam kugle polumjera r:

$$O = 4\,r^2\,\pi, \quad V = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi.$$

Oplošje i obujam uspravne prizme:

$$O = 2\,B + P, \quad V = B\,h,$$

pri čemu je B površina osnovke, P površina pobočja, a h visina prizme.

Oplošje i obujam uspravne piramide:

$$O = B + P, \quad V = \frac{1}{3}\, B\, h,$$

pri čemu je B površina osnovke, P površina pobočja, a h visina piramide.

Oplošje i obujam uspravnog kružnog valjka:

$$O = 2\, r\, \pi\, (r + h), \quad V = r^2\, \pi\, h,$$

pri čemu je r polumjer osnovke, a h visina valjka.

Oplošje i obujam uspravnog kružnog stošca:

$$O = r\, \pi\, (r + s), \quad V = \frac{1}{3}\, r^2\, \pi\, h,$$

pri čemu je r polumjer osnovke, s duljina izvodnice stošca, a h visina stošca.

13.6 Neke korisne antiderivacije

Za sve $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi:

1. $\int x\, \mathrm{e}^{a\,x}\, \mathrm{d}x = \frac{a\,x-1}{a^2}\, \mathrm{e}^{a\,x}$,
2. $\int x^2\, \mathrm{e}^{a\,x}\, \mathrm{d}x = \frac{a^2\,x^2-2\,a\,x+2}{a^3}\, \mathrm{e}^{a\,x}$,
3. $\int \mathrm{e}^{a\,x}\, \sin(b\,x)\, \mathrm{d}x = \frac{a\,\sin(b\,x)-b\,\cos(b\,x)}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{a\,x}$,
4. $\int \mathrm{e}^{a\,x}\, \cos(b\,x) = \frac{a\,\cos(b\,x)+b\,\sin(b\,x)}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{a\,x}$.

Indeks

Popis tablica

Bibliografija

[1] S. Kurepa: *Matematička analiza 1 – Diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Kurepa: *Matematička analiza 2 – Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] B. Guljaš: *Matematička analiza 1 i 2*, skripta, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, 2013. (javno dostupno na internetskoj adresi: http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf)

[4] K. Horvatić: *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[5] D. Bakić: *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

[7] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[8] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[9] B. P. Demidovič: *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.

[10] V. P. Minorski: *Zbirka zadataka iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.

[11] Earl D. Rainville, Phillip E. Bedient: *Elementary Differential Equations*, The Macmillan Company, New York, 1969.