TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

1. C. Neka je a prost prirodan broj. Tada je a^b prirodan broj ako i samo ako je b nenegativan cijeli broj (tj. prirodan broj ili nula). Stoga ćemo svaki od zadanih brojeva zapisati kao potenciju čija je baza prost prirodan broj:

$7^{\frac{1}{2}}$ je već zapisan u traženom obliku,

$$9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{2\cdot\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3,$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}.$$

Iz zadanih zapisa vidimo da jedino u trećem slučaju kao rezultat dobivamo prirodan broj jer u svim ostalim slučajevima eksponenti nisu prirodni brojevi.

2. D. Svi *realni* brojevi kojima je apsolutna vrijednost strogo manja od $\frac{5}{2}$ tvore otvoreni interval $\left\langle -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$. To slijedi iz ekvivalencije $\left(|x| < \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}\right)$. Navedenom otvorenom intervalu pripada točno pet cijelih brojeva: –2, –1, 0, 1 i 2.

3. B. Iskažimo u dm^3 obujam vode u drugoj i trećoj posudi. Prisjetimo se da je 1 m^3 = 1000 dm^3 i da je 1 dm^3 = 1000 cm^3, odnosno 1 cm^3 = 0.001 dm^3. Tako dobivamo:

$$0.6 \text{ m}^3 = 0.6 \cdot 1000 \text{ dm}^3 = 600 \text{ dm}^3,$$
$$20\,000 \text{ cm}^3 = 20000 \cdot 0.001 \text{ dm}^3 = 20 \text{ dm}^3.$$

Stoga je obujam vode u sve tri posude jednak

$$V_{uk} = 50 + 600 + 20 = 670 \text{ dm}^3.$$

Budući da vrijedi jednakost 1 dm^3 = 1 L, slijedi V_{uk} = 670 L.

4. A. Iz podatka da se traženi brojevi odnose u omjeru 4 : 3 slijedi da postoji realan broj k takav da su ti brojevi jednaki $4 \cdot k$ i $3 \cdot k$. Budući da zbroj tih brojeva treba biti jednak 30.66, dobivamo jednadžbu:

$$4 \cdot k + 3 \cdot k = 30.66,$$

odnosno jednadžbu

$$7 \cdot k = 30.66.$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

Dijeljenjem te jednadžbe sa 7 dobivamo $k = 4.38$. Budući da je $k > 0$, veći od tih dvaju brojeva je $4 \cdot k$, a manji $3 \cdot k$. Stoga je tražena razlika tih dvaju brojeva jednaka:

$$4 \cdot k - 3 \cdot k = k = 4.38.$$

5. **B.** Primijetimo najprije da mora vrijediti nejednakost $x \neq 0$. Pomnožimo zadanu jednadžbu s x, pa dobivamo:

$$2 \cdot x^2 + 11 \cdot x = 21,$$
$$2 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 21 = 0.$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu. Tražimo zbroj njezinih rješenja. Očitamo koeficijente u kvadratnoj jednadžbi: $a = 2$, $b = 11$, $c = -21$. Prema Vièteovim formulama, traženi je zbroj jednak $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{11}{2} = -5.5$.

6. **C.** Riješimo zasebno svaku pojedinu jednadžbu.

A. $\frac{x-3}{x} = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

B. $\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

C. $\sin x = -2 \Rightarrow$ nema rješenja jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $-1 \leq \sin x \leq 1 < 2$, tj. $\sin x < 2$.

D. $\text{tg } x = -2 \Rightarrow x = \text{tg}^{-1}(2) \approx 63.434948822922^\circ$.

Dakle, jednadžba pod **C** nema realnih rješenja.

7. **A.** Prema definiciji, dva vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ su kolinearna ako i samo ako postoji realan broj $k \neq 0$ takav da vrijedi jednakost $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Lako vidimo da je $2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} = 2 \cdot \left(\vec{i} + 2 \cdot \vec{j}\right)$, pa zaključujemo da su vektori $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ kolinearni.

8. **B.** Iz podatka $x \in \left\langle \frac{3}{2} \cdot \pi,\ 2 \cdot \pi \right\rangle$ zaključujemo da je $\sin x < 0$. Izračunajmo sinus broja x koristeći osnovni trigonometrijski identitet:

$$\sin x = -\sqrt{1 - (\cos x)^2} = -\sqrt{1 - 0.6^2} = -\sqrt{1 - 0.36} = -\sqrt{0.64} = -0.8.$$

Koristeći adicijski poučak za funkciju kosinus, te jednakosti $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ i $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dobivamo redom:

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.6\cdot\frac{1}{2}-0.8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.3-0.4\cdot\sqrt{3}\approx-0.392820323.$$

Zaokružimo ovaj rezultat na pet decimalnih mjesta, pa dobijemo: –0.39282.

9. **A.** Koristeći osnovna svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije dobivamo:

$$y=2^{3+\log_2 x}=2^3\cdot 2^{\log_2 x}=8\cdot x.$$

Odatle dijeljenjem s 8 dobijemo $x=\frac{1}{8}\cdot y=\frac{y}{8}$.

10. **A**. Iz grafa vidimo da je riječ o strogo rastućoj eksponencijalnoj funkciji čiji propis ima oblik $f(x) = b\cdot a^x + c$, pri čemu su $a > 0$ (jer je eksponencijalna funkcija definirana ako i samo ako je njezina baza strogo pozitivna) i $b \neq 0$.

Da bismo odredili realne brojeve a, b i c, moramo znati barem tri različite točke grafa funkcije f. Sa slike očitamo da graf funkcije f prolazi točkama $A = (0, -3)$, $B = (2, 0)$ i $C = (3, 4)$. Stoga istodobno moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$b\cdot a^0+c=-3,$$
$$b\cdot a^2+c=0,$$
$$b\cdot a^3+c=4.$$

Riješimo taj sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice. Zbog jednakosti $a^0 = 1$ prvu jednadžbu toga sustava možemo zapisati u obliku

$$b + c = -3,$$

a odatle je

$$c = -b - 3.$$

Uvrstimo ovaj izraz u drugu, odnosno treću jednadžbu sustava. Dobivamo:

$$b\cdot a^2 - b - 3 = 0,$$
$$b\cdot a^3 - b - 3 = 4,$$

odnosno nakon sređivanja

$$b\cdot a^2 - b = 3,$$
$$b\cdot a^3 - b = 7.$$

Rastavimo lijeve strane tih dviju jednadžbi na faktore. Za prvu jednadžbu dobivamo:

$$b \cdot (a^2 - 1) = 3,$$
$$b \cdot (a - 1) \cdot (a + 1) = 3.$$

Za drugu jednadžbu dobivamo:

$$b \cdot (a^3 - 1) = 7,$$
$$b \cdot (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1) = 7.$$

Podijelimo drugu jednadžbu prvom jednadžbom. Dobivamo:

$$\frac{b \cdot (a-1) \cdot (a^2 + a + 1)}{b \cdot (a-1) \cdot (a+1)} = \frac{7}{3}.$$

Zbog zaključka $b \neq 0$, lijevu stranu smijemo skratiti s b. Ako bi bilo $a = 1$, onda bi funkcija f imala propis $f(x) = b \cdot 1^x + c = b \cdot 1 + c = b + \mathrm{c}$, pa bi f bila konstantna funkcija (jer su brojevi b i c konstante), što je suprotno zaključku da je f strogo rastuća funkcija. Stoga mora vrijediti i nejednakost $a \neq 1$. Dakle, razlomak na lijevoj strani posljednje jednadžbe smijemo skratiti s $b \cdot (a - 1)$, pa ćemo dobiti:

$$\frac{a^2 + a + 1}{a+1} = \frac{7}{3}.$$

Ovu jednadžbu riješimo na uobičajen način:

$$\frac{a^2 + a + 1}{a+1} = \frac{7}{3} \quad / \cdot 3 \cdot (a+1)$$
$$3 \cdot (a^2 + a + 1) = 7 \cdot (a+1),$$
$$3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 3 = 7 \cdot a + 7,$$
$$3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 3 - 7 \cdot a - 7 = 0,$$
$$3 \cdot a^2 - 4 \cdot a - 4 = 0,$$
$$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6},$$
$$a_1 = \frac{4+8}{6} = \frac{12}{6} = 2, \; a_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Zbog pretpostavke $a > 0$, rješenje a_2 ne dolazi u obzir. Stoga je $a = 2$.

Uvrstimo tu vrijednost u jednakost $b \cdot (a^2 - 1) = 3$, pa dobivamo:

$$b \cdot (2^2 - 1) = 3,$$
$$b \cdot (4 - 1) = 3,$$
$$3 \cdot b = 3.$$

Odatle dijeljenjem s 3 slijedi $b = 1$.

Napokon, uvrstimo $b = 1$ u jednakost $c = -b - 3$, pa dobivamo:

$$c = -1 - 3,$$
$$c = -4.$$

Dakle, traženi propis funkcije glasi

$$f(x) = 1 \cdot 2^x - 4,$$

odnosno

$$f(x) = 2^x - 4.$$

Napomena: Zadatak se može riješiti i jednostavnije koristeći infinitezimalni račun. Iz slike razabiremo da je $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$. Međutim, za eksponencijalnu funkciju oblika $f(x) = b \cdot a^x + c$ vrijedi jednakost:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (b \cdot a^x + c) = \begin{cases} c, \text{ za } a > 1, \\ -\infty, \text{ za } 0 < a < 1 \text{ i } b < 0, \\ +\infty, \text{ za } 0 < a < 1 \text{ i } b > 0. \end{cases}$$

Tako smo odmah mogli zaključiti da je $c = -4$. Uvrštavanjem te vrijednosti u jednadžbu $b + c = -3$ dobivamo $b = 1$. Uvrštavanjem $b = 1$ i $c = -4$ u jednadžbu $b \cdot a^2 + c = 0$ slijedi $a^2 - 4 = 0$, a odatle je $a = 2$ ($a = -2$ ne dolazi u obzir jer mora vrijediti nejednakost $a > 1$).

Nedostatak ovoga načina rješavanja je donekle upitna istinitost zaključka $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$ jer se iz slike ne vidi ponašanje funkcije za $x < -6$.

11. D. Odredimo najprije propis kompozicije $f \circ g$. Postupimo standardno:

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f(2 \cdot x + 3) = \frac{2 \cdot x + 3}{2 \cdot x + 3 + 1} = \frac{2 \cdot x + 3}{2 \cdot x + 4}.$$

Tako nadalje dobivamo:

$$(f \circ g)(x) - a = 0$$
$$\frac{2 \cdot x + 3}{2 \cdot x + 4} - a = 0 \quad / \cdot (2 \cdot x + 4)$$
$$2 \cdot x + 3 - a \cdot (2 \cdot x + 4) = 0,$$
$$2 \cdot x + 3 - 2 \cdot a \cdot x - 4 \cdot a = 0,$$
$$2 \cdot x - 2 \cdot a \cdot x = 4 \cdot a - 3,$$
$$x \cdot (2 - 2 \cdot a) = 4 \cdot a - 3 \quad / : (2 - 2 \cdot a)$$
$$x = \frac{4 \cdot a - 3}{2 - 2 \cdot a}.$$

12. B. Neka su A zajednički vrh kutova čije su mjere 26° i 33°, B vrh antene, C ortogonalna projekcija vrha B na krov kuće, a D ortogonalna projekcija vrha antene na vodoravnu podlogu. Trokutovi ABD i ACD su pravokutni. Izrazimo duljinu dužine $\overline{AD}$ iz svakoga od njih. Iz trokuta ABD slijedi:

$$|AD| = (h + 1.5) \cdot \text{ctg } 33°,$$

dok iz trokuta ACD slijedi

$$|AD| = h \cdot \text{ctg } 26°.$$

Lijeve strane tih dviju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Izjednačavanjem desnih strana tih jednakosti dobivamo:

$$(h + 1.5) \cdot \text{ctg } 33^\circ = h \cdot \text{ctg } 26^\circ,$$
$$h \cdot \text{ctg } 33^\circ + 1.5 \cdot \text{ctg } 33^\circ = h \cdot \text{ctg } 26^\circ,$$
$$h \cdot \text{ctg } 33^\circ - h \cdot \text{ctg } 26^\circ = -1.5 \cdot \text{ctg } 33^\circ \quad / : (-1)$$
$$h \cdot \text{ctg } 26^\circ - h \cdot \text{ctg } 33^\circ = 1.5 \cdot \text{ctg } 33^\circ,$$
$$h \cdot (\text{ctg } 26^\circ - \text{ctg } 33^\circ) = 1.5 \cdot \text{ctg } 33^\circ \quad / : (\text{ctg } 26^\circ - \text{ctg } 33^\circ)$$
$$h = \frac{1.5 \cdot \text{ctg } 33^\circ}{\text{ctg } 26^\circ - \text{ctg } 33^\circ} \approx 4.5251205$$

Dakle, visina kuće (zaokružena na jednu decimalu) iznosi približno 4.5 m.

13. B. Neka su x duljina povučene dužine i y tražena udaljenost. Površina „gornjega“ od dvaju dobivenih dijelova jednaka je

$$P_1 = \frac{x+6}{2} \cdot y,$$

dok je površina „donjega“ dijela

$$P_2 = \frac{x+10}{2} \cdot (4-y).$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $P_1 = P_2$. Zbroj tih dviju površina mora biti jednak površini polaznoga trapeza, a ta je površina jednaka

$$P = \frac{10+6}{2} \cdot 4 = \frac{16}{2} \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2.$$

Stoga je

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \cdot P = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \text{ cm}^2.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\frac{x+6}{2} \cdot y = 16,$$
$$\frac{x+10}{2} \cdot (4-y) = 16.$$

Izrazimo nepoznanicu x iz prve jednadžbe:

$$\frac{x+6}{2} \cdot y = 16 \quad / \cdot \frac{2}{y}$$
$$x + 6 = \frac{32}{y},$$
$$x = \frac{32}{y} - 6.$$

Dobiveni izraz uvrstimo u drugu jednadžbu sustava:

$$\frac{\left(\frac{32}{y} - 6\right) + 10}{2} \cdot (4-y) = 16 \quad / \cdot 2$$

$$\left[\left(\frac{32}{y}-6\right)+10\right]\cdot(4-y)=32 \quad / \cdot y$$
$$[(32-6\cdot y)+10\cdot y]\cdot(4-y)=32\cdot y,$$
$$[32-6\cdot y+10\cdot y]\cdot(4-y)=32\cdot y,$$
$$(32+4\cdot y)\cdot(4-y)=32\cdot y,$$
$$4\cdot(8+y)\cdot(4-y)=32\cdot y \quad / : 4$$
$$(8+y)\cdot(4-y)=8\cdot y,$$
$$32+4\cdot y-8\cdot y-y^2=8\cdot y,$$
$$-y^2-4\cdot y-8\cdot y+32=0 \quad / : (-1)$$
$$y^2+12\cdot y-32=0.$$

Budući da je y udaljenost povučene dužine od kraće osnovice trapeza, mora vrijediti nejednakost $0 < y < 4$. Stoga je

$$y=\frac{-12+\sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot(-32)}}{2}=\frac{-12+\sqrt{144+128}}{2}=\frac{-12+\sqrt{272}}{2}=\frac{-12+\sqrt{16\cdot 17}}{2}=$$
$$=\frac{-12+\sqrt{16}\cdot\sqrt{17}}{2}=\frac{-12+4\cdot\sqrt{17}}{2}=-6+2\cdot\sqrt{17}=2\cdot\sqrt{17}-6\approx 2.24621125.$$

Zaokružimo dobiveni rezultat na tri decimalna mjesta, pa dobijemo $y \approx 2.246$ cm.

14. C. Polumjeri krugova tvore niz $r,\ \frac{1}{2}\cdot r,\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r\right)=\frac{1}{4}\cdot r,\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot r\right)=\frac{1}{8}\cdot r,\ldots$ Pripadne površine krugova tvore niz

$$r^2\cdot\pi,\ \left(\frac{1}{2}\cdot r\right)^2\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi,\ \left(\frac{1}{4}\cdot r\right)^2\cdot\pi=\frac{1}{16}\cdot r^2\cdot\pi,\ \left(\frac{1}{8}\cdot r\right)^2\cdot\pi=\frac{1}{64}\cdot r^2\cdot\pi,\ldots$$

Zbroj tih površina je

$$Z=r^2\cdot\pi+\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi+\frac{1}{16}\cdot r^2\cdot\pi+\frac{1}{64}\cdot r^2\cdot\pi+\ldots=r^2\cdot\pi\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right).$$

Izraz u zagradi je geometrijski red kojemu je prvi član $g_1 = 1$, a količnik $q=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}$. Zbroj toga reda jednak je

$$S=\frac{g_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{4-1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3},$$

pa je zbroj površina svih krugova jednak

$$Z=\frac{4}{3}\cdot r^2\cdot\pi .$$

U ovu jednakost uvrstimo $r = 10$, pa konačno dobivamo:

$$Z=\frac{4}{3}\cdot 10^2\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot 100\cdot\pi=\frac{400}{3}\cdot\pi \text{ cm}^2.$$

15. D. Primijetimo da je deseti član niza jednak razlici zbroja prvih deset članova niza i zbroja prvih devet članova zadanoga niza. Prema podacima iz zadatka, zbroj prvih deset članova zadanoga niza jednak je

$$S_{10} = b \cdot 10 - 2 \cdot 10^2 = 10 \cdot b - 2 \cdot 100 = 10 \cdot b - 200,$$

dok je zbroj prvih devet članova zadanoga niza jednak

$$S_9 = b \cdot 9 - 2 \cdot 9^2 = 9 \cdot b - 2 \cdot 81 = 9 \cdot b - 162.$$

Stoga je deseti član zadanoga niza jednak

$$S_{10} - S_9 = (10 \cdot b - 200) - (9 \cdot b - 162) = 10 \cdot b - 200 - 9 \cdot b + 162 = b - 38.$$

Prema uvjetu zadatka, izračunani deseti član niza mora biti jednak –16, pa dobivamo linearnu jednadžbu

$$b - 38 = -16$$

čije rješenje je

$$b = -16 + 38 = 22.$$

16. 0.377. Imamo redom:

$$\frac{7^0-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\sqrt[4]{4}-1}=\frac{1-\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^3}{\sqrt[4]{2^2}-1}=\frac{1-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3}{2^{\frac{2}{4}}-1}=\frac{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3^3}{2^3}}{2^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{8}}{\sqrt{2}-1}=\frac{1-\frac{27}{32}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\frac{32-27}{32}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{\frac{5}{32}}{\sqrt{2}-1}=\frac{5}{32\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{32\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{32\cdot\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right]}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{32\cdot(2-1)}=$$

$$=\frac{5}{32}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\approx 0.3772208691$$

Zaokruživanjem ovoga broja na tri decimale dobivamo 0.377 (četvrta znamenka iza decimalne točke je 2, pa prve tri znamenke iza decimalne točke samo prepišemo).

17. 20. Broj pojedenih jagoda srednje veličine i postotak zadovoljenih preporučenih dnevnih potreba su upravno razmjerne veličine: koliko puta se poveća broj pojedenih jagoda srednje veličine, toliko puta će se povećati i postotak zadovoljenih preporučenih dnevnih potreba. Stoga možemo postaviti shemu:

↑ 8 jagoda	↑ 16% dnevnih potreba
x jagoda	40% dnevnih potreba

Odavde slijedi razmjer:

$$x : 8 = 40 : 16.$$

Njegovim rješavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} 16\cdot x &= 8\cdot 40,\\ 16\cdot x &= 320 \quad / :16\\ x &= 20. \end{aligned}$$

Dakle, treba pojesti 20 jagoda srednje veličine.

18. 1.) $\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a}=\frac{1+c}{b} \quad / \cdot(a\cdot b)\\ &b=a\cdot(1+c),\\ &b=a+a\cdot c,\\ &b-a=a\cdot c \quad / :a\\ &c=\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-\frac{a}{a}=\frac{b}{a}-1. \end{aligned}$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

2.) $\boldsymbol{a^2}$**.** Imamo redom:

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot a\right) : a^{-\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\cdot a^1\right) : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}+1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = a^{\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}} = a^{1+1} = a^2$$

19. 1.) $2\cdot x^3+6\cdot x\cdot y^2$**.** Koristeći formulu za kub binoma dobivamo:

$$(x-y)^2\cdot(x-y)+(x+y)^3 = (x-y)^3+(x+y)^3 = x^3-3\cdot x^2\cdot y+3\cdot x\cdot y^2-y^3+ x^3+3\cdot x^2\cdot y+$$
$$+\,3\cdot x\cdot y^2+y^3 = 2\cdot x^3+6\cdot x\cdot y^2.$$

2.) $\dfrac{6\cdot x}{x-1}$**.** Koristimo identitet $x^2 - 1 = (x - 1)\cdot(x + 1)$ koji se lako dobiva iz formule za razliku kvadrata. Imamo redom:

$$\frac{x^2+x}{x+3}\cdot\frac{18+6\cdot x}{x^2-1} = \frac{x\cdot(x+1)}{x+3}\cdot\frac{6\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{6\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{6\cdot x}{x-1}.$$

20. 1.) $\boldsymbol{x \leq 10}$ **ili** $\boldsymbol{x \in \langle -\infty, 10]}$**.** Pomnožimo zadanu nejednadžbu s 2. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&3\cdot(5\cdot x-4)\leq 2\cdot(7\cdot x-1),\\
&15\cdot x-12\leq 14\cdot x-2,\\
&15\cdot x-14\cdot x\leq -2+12,\\
&x\leq 10.
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje nejednadžbe je bilo koji realan broj koji nije strogo veći od 10. Svi takvi brojevi tvore skup $\langle -\infty, 10]$.

2.) $y=\dfrac{1}{2}\cdot x-3$ **ili** $\boldsymbol{x - 2\cdot y - 6 = 0}$ **ili** $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-3}=1$. Koristeći formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke dobivamo:

$$\begin{aligned}
y+2 &= \frac{1-(-2)}{8-2}\cdot(x-2),\\
y+2 &= \frac{1+2}{8-2}\cdot(x-2),\\
y+2 &= \frac{3}{6}\cdot(x-2),
\end{aligned}$$

$$y+2=\frac{1}{2}\cdot(x-2),$$
$$y=\frac{1}{2}\cdot x-1-2,$$
$$y=\frac{1}{2}\cdot x-3.$$

Dobivenu jednadžbu možemo zapisati u implicitnom, odnosno segmentnom obliku:

$$\begin{aligned}
&y=\frac{1}{2}\cdot x-3 \quad /\cdot 2\\
&2\cdot y=x-6,\\
&x-2\cdot y-6=0 \Leftarrow \text{ implicitni oblik}\\
&x-2\cdot y=6 \quad /:6\\
&\frac{x}{6}+\frac{-2\cdot y}{6}=1,\\
&\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}=1 \Leftarrow \text{ segmentni oblik}
\end{aligned}$$

21. 1.) Vidjeti Sliku 1. Zadana funkcija je polinom 2. stupnja. Graf toga polinoma (parabola) je potpuno određen s tri svoje međusobno različite točke. Obično su te točke sjecišta grafa s osi apscisa (osi x) i tjeme parabole. Odredimo ih.

Sjecišta grafa funkcije f s osi apscisa dobivamo rješavajući jednadžbu $f(x) = 0$. Imamo redom:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2\cdot x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2}=$$
$$=\frac{-2\pm 4}{-2}=\frac{-2}{-2}\pm\frac{4}{-2}=1\pm(-2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1+(-2)=1-2=-1,\\ x_2=1-(-2)=1+2=3.\end{cases}$$

Zaključujemo da su točke $S_1 = (-1, 0)$ i $S_2 = (3, 0)$ sjecišta grafa funkcije f s osi apscisa.

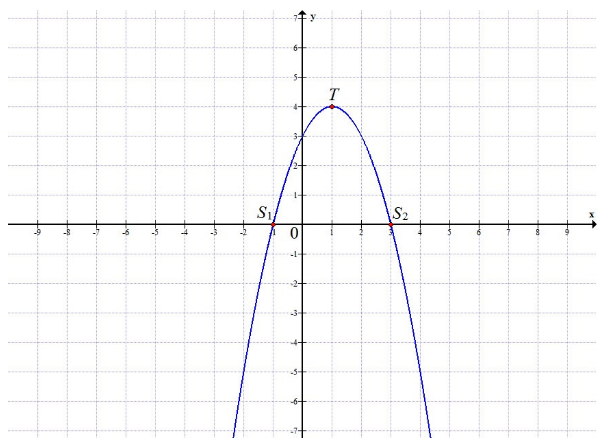
Preostaje izračunati koordinate tjemena parabole. „Očitamo“ koeficijente uz potencije od x u zadanoj funkciji:

$$a = -1,\ b = 2,\ c = 3,$$

pa imamo:

$$T=\left(-\frac{b}{2\cdot a},\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right)=\left(-\frac{2}{2\cdot(-1)},\frac{4\cdot(-1)\cdot 3-2^2}{4\cdot(-1)}\right)=\left(-\frac{2}{-2},\frac{-12-4}{-4}\right)=\left(1,\ \frac{-16}{-4}\right)=(1,\ 4).$$

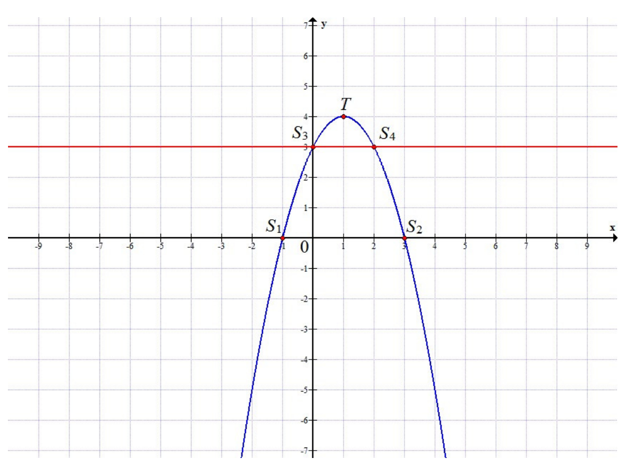
Dakle, tjeme parabole je točka T = (1, 4). Ucrtamo sve tri dobivene točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo parabolom. Dobivamo graf prikazan na Slici 1.



Slika 1.

2.) $\boldsymbol{x \in [0, 2]}$. Zadanu nejednadžbu moguće je riješiti i analitički, ali brže i jednostavnije je to učiniti grafički koristeći Sliku 1. Povucimo pravac y = 3, pa pogledajmo za koje $x \in \mathbf{R}$ se graf funkcije f nalazi na tom pravcu ili iznad njega. Vidjeti Sliku 2.

Lako vidimo da pravac y = 3 siječe parabolu u točkama S_3 = (0, 3) i S_4 = (2, 3). Stoga se parabola nalazi na pravcu y = 3 ili iznad njega ako i samo ako je $x \in$ [0, 2]. Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe je segment [0, 2].



Slika 2.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

22. 1.) $\frac{a\cdot b}{c}$. Koristeći osnovna svojstva logaritama imamo redom:

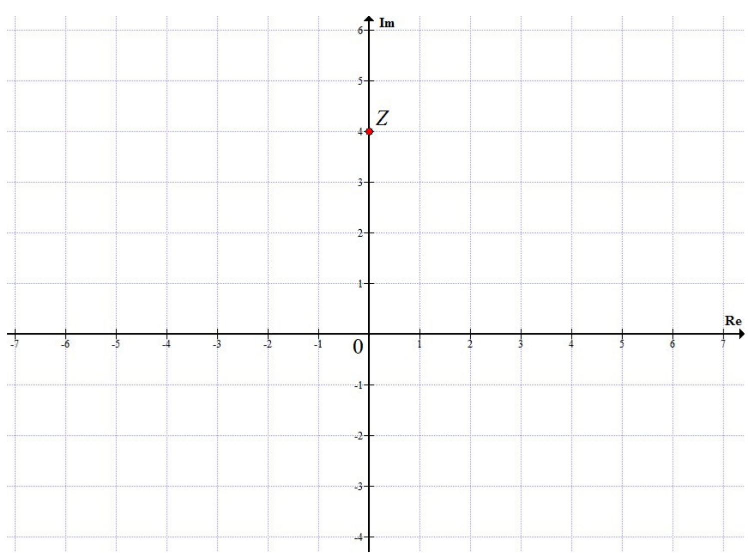
$$\begin{aligned}
&\log x=\log a+\log b-\log c,\\
&\log x=\log(a\cdot b)-\log c,\\
&\log x=\log\left(\frac{a\cdot b}{c}\right),\\
&x=\frac{a\cdot b}{c}.
\end{aligned}$$

2.) x_1 = –4, x_2 = 2. Zapravo treba riješiti jednadžbu $f(x)=0$, odnosno jednadžbu $|x+1|-3=0$. Imamo redom:

$$|x+1|-3=0 \Leftrightarrow |x+1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-3 \\ \text{ili} \\ x+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-1 \\ \text{ili} \\ x=3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ \text{ili} \\ x=2 \end{cases}.$$

Dakle, zadana funkcija ima točno dvije nultočke i to su $x_1=-4$ i $x_2=2$.

23. 1.) Vidjeti Sliku 3. Realni dio zadanoga kompleksnoga broja z jednak je 0, a imaginarni dio 4. Stoga je zadanom kompleksnom broju z pridružena točka $Z=(0, 4)$. Ta se točka nalazi na pozitivnom dijelu imaginarne osi, i to 4 jedinice duljine udaljena od ishodišta pripadnoga pravokutnoga koordinatnoga sustava. Ona je prikazana na Slici 3.



Slika 3.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

2.) $-a + 6 \cdot i$. Imamo redom:

$$\bar{z} - 2 \cdot z = \overline{a - 2 \cdot i} - 2 \cdot (a - 2 \cdot i) = a + 2 \cdot i - 2 \cdot a + 4 \cdot i = -a + 6 \cdot i\,.$$

24. 1.) 205. Ako na svake tri ruže dolazi točno jedan komplet ukrasnoga bilja, onda na točno 11 ruža dolazi točno $\left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil = 3$ kompleta ukrasnoga bilja, pri čemu je s $\lceil x \rceil$ označen najveći cijeli broj jednak ili manji od x. (Npr. $\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil 3.14 \rceil = 3$, $\lceil -3.14 \rceil = -4$ itd.) Stoga kupac treba platiti 11 ruža, 3 kompleta ukrasnoga bilja, ukrasni papir i izradu buketa. Ukupna cijena izrade buketa iznosi:

$$C = 11 \cdot 12 + 3 \cdot 15 + 8 + 20 = 132 + 45 + 8 + 20 = 205 \text{ kn.}$$

2.) 15. Neka je r traženi broj ruža. Tada je ukupan broj kompleta ukrasnoga bilja jednak $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil$. Stoga je ukupna cijena izradbe buketa jednaka:

$$C = r \cdot 12 + \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil \cdot 15 + 8 + 20 = 12 \cdot r + 15 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil + 28 \text{ kn.}$$

Taj iznos treba biti jednak 283 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$12 \cdot r + 15 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil + 28 = 283,$$

odnosno nakon prebacivanja broja 28 na desnu stranu jednadžbe

$$12 \cdot r + 15 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = 255,$$

odnosno nakon dijeljenja svakoga člana jednadžbe s 3

$$4 \cdot r + 5 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = 85.$$

Drugi pribrojnik na lijevoj strani jednadžbe je djeljiv s 5 i desna strana jednadžbe je djeljiva s 5. Stoga i pribrojnik $4 \cdot r$ mora biti djeljiv s 5. Budući da broj 4 nije djeljiv s 5, zaključujemo da je broj r djeljiv s 5.

Svaki prirodan broj pri dijeljenju s 3 daje točno jedan od ostataka 0, 1 ili 2. Razmotrimo zasebno svaki pojedini slučaj.

Slučaj 1. Neka je $r = 3 \cdot k$, za neki $k \in \mathbf{N}$. Tada je $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot k}{3} \right\rceil = \lceil k \rceil = k$ jer je najveći prirodan broj koji je jednak ili veći od prirodnoga broja k sâm taj broj k. U jednadžbu $4 \cdot r + 5 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = 85$ uvrstimo $r = 3 \cdot k$ i $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = k$, pa dobivamo:

$$4 \cdot 3 \cdot k + 5 \cdot k = 85,$$
$$12 \cdot k + 5 \cdot k = 85,$$
$$17 \cdot k = 85.$$

Odatle dijeljenjem sa 17 dobivamo $k = 5$. Stoga je $r = 3 \cdot 5 = 15$. Broj $r = 15$ je djeljiv s 5, pa buket sadrži 15 ruža.

Slučaj 2. Neka je $r = 3 \cdot k + 1$, za neki $k \in \mathbf{N}$. Tada je $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot k + 1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot k}{3} + \frac{1}{3} \right\rceil =$
$= \left\lceil k + \frac{1}{3} \right\rceil = k$. U jednadžbu $4 \cdot r + 5 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = 85$ uvrstimo $r = 3 \cdot k + 1$ i $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = k$, pa dobivamo:

$$4 \cdot (3 \cdot k + 1) + 5 \cdot k = 85,$$
$$12 \cdot k + 4 + 5 \cdot k = 85,$$
$$17 \cdot k = 81.$$

Odatle dijeljenjem sa 17 dobivamo $k = \frac{81}{17}$, a taj broj nije prirodan broj. Stoga u ovom slučaju zadatak nema rješenja.

Slučaj 3. Neka je $r = 3 \cdot k + 2$, za neki $k \in \mathbf{N}$. Tada je $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot k + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot k}{3} + \frac{2}{3} \right\rceil =$
$= \left\lceil k + \frac{2}{3} \right\rceil = k$. U jednadžbu $4 \cdot r + 5 \cdot \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = 85$ uvrstimo $r = 3 \cdot k + 2$ i $\left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil = k$, pa dobivamo:

$$4 \cdot (3 \cdot k + 2) + 5 \cdot k = 85,$$
$$12 \cdot k + 8 + 5 \cdot k = 85,$$
$$17 \cdot k = 77.$$

Odatle dijeljenjem sa 17 dobivamo $k = \frac{77}{17}$, a taj broj nije prirodan broj. Stoga u ovom slučaju zadatak nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje zadatka je $r = 15$. Stoga se u buketu nalazi točno 15 ruža.

25. 1.) $\boldsymbol{y^2 = 12 \cdot x}$**.** Budući da je prva koordinata točke T strogo pozitivan realan broj, zaključujemo da je $p > 0$. Naime, ako bi bilo $p < 0$, onda bismo uvrštavanjem $x = 4$ u jednadžbu parabole (što smijemo napraviti jer T pripada paraboli) dobili jednakost $y^2 = 2 \cdot \cdot p \cdot 4$, odnosno $y^2 = 8 \cdot p$. Lijeva strana te jednakosti je nenegativan realan broj, a desna, zbog pretpostavke $p < 0$, strogo negativan realan broj. Tako smo dobili proturječje. Zbog toga mora biti $p > 0$.

Ravnalica parabole $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ je pravac čija je jednadžba $p_1 \ldots\ x = -\frac{p}{2}$. Budući da je $p > 0$, pravac $p_1 \ldots x = -\frac{p}{2}$ prolazi drugim i trećim kvadrantom pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini usporedno s osi ordinata (osi y).

Točka T ima strogo pozitivnu prvu koordinatu, pa se ona nalazi ili u prvom ili u četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.

Udaljenost točke T smještene u prvom ili četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini od pravca p_1 usporednoga s osi ordinata i smještenoga u drugom i trećem kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini dobije se tako da se prvoj koordinati točke T doda broj $\frac{p}{2}$. Prema uvjetu zadatka taj zbroj treba biti jednak 7, pa dobivamo jednadžbu:

$$4 + \frac{p}{2} = 7\,.$$

Riješimo tu jednadžbu uobičajenim postupkom:

$$\begin{aligned} &4 + \frac{p}{2} = 7 \quad /\cdot 2 \\ &8 + p = 14, \\ &p = 14 - 8, \\ &p = 6. \end{aligned}$$

Dakle, jednadžba parabole glasi: $y^2 = 2 \cdot 6 \cdot x$, odnosno $y^2 = 12 \cdot x$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

2.) $\frac{15}{4} = 3.75$ **.** Neka su $x = |CD|$ i $y = |AD|$. Tada je $|DB| = |AB| - |AD| = 12 - y$. Označimo mjere kutova trokuta ABC standardno s α, β i γ tako da je α mjera kuta pri vrhu A itd. Prema pretpostavci su mjere kutova $\angle BAC$ i $\angle BCD$ jednake, pa je mjera kuta $\angle BCD$ također α. Nadalje, neka je δ mjera kuta $\angle ADC$. Tada je mjera kuta $\angle BDC$ jednaka 180° – δ. Primjenom sinusova poučka na trokut ADC dobivamo:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{x}{9}.$$

Primjenom sinusova poučka na trokut BCD dobivamo:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{12 - y}{5}.$$

No, sin(180° – δ) = sin δ, pa ovu jednakost možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{12 - y}{5}.$$

Lijeve strane u jednakostima $\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{x}{9}$ i $\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{12 - y}{5}$ su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Izjednačavanjem desnih strana dobijemo:

$$\frac{x}{9} = \frac{12 - y}{5}.$$

Iz te jednakosti izrazimo veličinu y:

$$\frac{x}{9} = \frac{12 - y}{5} \quad / \cdot 5$$

$$\frac{5}{9} \cdot x = 12 - y,$$

$$y = 12 - \frac{5}{9} \cdot x.$$

Primjenom kosinusova poučka na trokut ABC dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{12^2 + 9^2 - 5^2}{2 \cdot 12 \cdot 9} = \frac{144 + 81 - 25}{216} = \frac{200}{216} = \frac{25}{27},$$

Primjena istoga poučka na trokut ADC daje:

$$\cos\alpha=\frac{9^2+\left(12-\frac{5}{9}\cdot x\right)^2-x^2}{2\cdot 9\cdot\left(12-\frac{5}{9}\cdot x\right)}=\frac{81+144-\frac{40}{3}\cdot x+\frac{25}{81}\cdot x^2-x^2}{216-10\cdot x}=\frac{225-\frac{40}{3}\cdot x+\frac{25-81}{81}\cdot x^2}{216-10\cdot x}=$$

$$=\frac{225-\frac{40}{3}\cdot x-\frac{56}{81}\cdot x^2}{216-10\cdot x}=\frac{\frac{225\cdot 81-40\cdot 27\cdot x-56\cdot x^2}{81}}{216-10\cdot x}=\frac{18225-1080\cdot x-56\cdot x^2}{81\cdot(216-10\cdot x)}=$$

$$=\frac{18225-1080\cdot x-56\cdot x^2}{17496-810\cdot x}$$

Lijeve strane jednakosti $\cos\alpha=\frac{25}{27}$ i $\cos\alpha=\frac{18225-1080\cdot x-56\cdot x^2}{17496-810\cdot x}$ su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Izjednačavanjem desnih strana dobivamo:

$$\frac{18225-1080\cdot x-56\cdot x^2}{17496-810\cdot x}=\frac{25}{27}\quad /\cdot(17496-810\cdot x)$$

$$18225-1080\cdot x-56\cdot x^2=25\cdot(648-30\cdot x),$$

$$18225-1080\cdot x-56\cdot x^2=16200-750\cdot x,$$

$$56\cdot x^2+1080\cdot x-18225+16200-750\cdot x=0,$$

$$56\cdot x^2+330\cdot x-2025=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-330\pm\sqrt{330^2-4\cdot 56\cdot(-2025)}}{2\cdot 56}=\frac{-330\pm\sqrt{108900+453600}}{112}=$$

$$=\frac{-330\pm\sqrt{562500}}{112}=\frac{-330\pm 750}{112},$$

$$x_1=\frac{-330+750}{112}=\frac{420}{112}=\frac{15}{4},\ x_2=\frac{-330-750}{112}=-\frac{1080}{112}=-\frac{135}{14}.$$

Budući da je x duljina dužine, ta vrijednost ne može biti strogo negativan realan broj. Stoga rješenje x_2 zanemarujemo. Dakle, tražena duljina je $x=\frac{15}{4}=3.75$ cm.

26. 1.) $\frac{\pi}{4}$**.** Temeljni period dobijemo tako da temeljni period funkcije cos x (to je $2\cdot\pi$) podijelimo s kružnom frekvencijom ω (to je koeficijent uz x u argumentu funkcije kosinus i on u ovom slučaju iznosi 8). Tako dobijemo:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

2.). $x = 1.107148717794 + k \cdot \pi$**, pri čemu je** $k \in \mathbf{Z}$**.** Odredimo realan broj $y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ čiji je tangens jednak 2. Kalkulatorom nalazimo $y \approx 1.107148717794$. Stoga je opće rješenje zadane jednadžbe $x = 1.107148717794 + k \cdot \pi$, pri čemu je $k \in \mathbf{Z}$.

27. 1.) $\frac{17}{2} = 8.5$**.** Lijeva i desna strana zadane jednadžbe su nenegativni realni brojevi, pa tu jednadžbu smijemo kvadrirati. Kvadriranjem dobijemo:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{2 \cdot x - 1}\right)^2 = 4^2, \\
&2 \cdot x - 1 = 16, \\
&2 \cdot x = 16 + 1, \\
&2 \cdot x = 17.
\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $x = \frac{17}{2}$ i to je jedino rješenje zadane jednadžbe.

2.) –5. Svaki član zadane jednadžbe zapišimo kao potenciju s bazom 2. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&8 \cdot 4^{2 \cdot x + 3} = 2^{x-6}, \\
&2^3 \cdot (2^2)^{2 \cdot x + 3} = 2^{x-6}, \\
&2^3 \cdot 2^{2 \cdot (2 \cdot x + 3)} = 2^{x-6}, \\
&2^3 \cdot 2^{4 \cdot x + 6} = 2^{x-6}, \\
&2^{3 + 4 \cdot x + 6} = 2^{x-6}, \\
&2^{4 \cdot x + 9} = 2^{x-6}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo:

$$\begin{aligned}
&4 \cdot x + 9 = x - 6, \\
&4 \cdot x - x = -6 - 9, \\
&3 \cdot x = -15.
\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 3 slijedi $x = -5$ i to je jedino rješenje zadane jednadžbe.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

3.) $\boldsymbol{x_1 = 1}$ **i** $\boldsymbol{x_2 = 2}$**.** Uvedimo zamjenu $t := x^3 - 3$. Tada zadana jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 3 \cdot t - 10 = 0.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2},$$
$$t_1 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5,\ t_2 = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Iz $x^3 - 3 = t_1 = 5$ slijedi $x^3 = 5 + 3$, odnosno $x^3 = 8$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = 2$.

Iz $x^3 - 3 = t_2 = -2$ slijedi $x^3 = -2 + 3$, odnosno $x^3 = 1$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = 1$.

Dakle, sva realna rješenja zadane jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$.

28. 1.) $\boldsymbol{D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$. Funkcija f je neprava racionalna funkcija. Ona je definirana za sve realne brojeve koji nisu nultočke njezina nazivnika. Nazivnik zadane funkcije je $2 \cdot x + 1$, a njegove nultočke određujemo rješavajući jednadžbu

$$2 \cdot x + 1 = 0.$$

Odavde lagano slijedi $x = -\frac{1}{2}$. Dakle, f je definirana za sve realne brojeve različite od $-\frac{1}{2}$. Ti brojevi tvore skup $S = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Dakle, tražena domena je $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$**.**

2.) $\boldsymbol{-\frac{2}{5}}$**; 0; 0; 2**. Odredimo najprije sjecište s osi apscisa (osi x). Druga koordinata toga sjecišta jednaka je 0 jer sve točke na osi apscisa imaju drugu koordinatu jednaku 0. Stoga trebamo riješiti jednadžbu $f(x) = 0$. Prisjetimo se da je algebarski razlomak jednak nuli ako i samo ako je njegov brojnik jednak nuli, a nazivnik različit od nule. Izjednačavanjem brojnika zadane funkcije s nulom dobivamo jednadžbu:

$$5 \cdot x + 2 = 0.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobiva se $x=-\frac{2}{5}$. $x=-\frac{2}{5}$ pripada domeni funkcije f određenoj u podzadatku **1.**) Stoga je sjecište grafa funkcije f i osi apscisa točka $S_1=\left(-\frac{2}{5},\ 0\right)$.

Preostaje odrediti sjecište grafa zadane funkcije i osi ordinata (osi y). Prva koordinata toga sjecišta jednaka je 0 jer sve točke na osi ordinata imaju prvu koordinatu jednaku 0. Drugu koordinatu sjecišta dobit ćemo tako da u propis funkcije f uvrstimo x = 0 (to smijemo učiniti jer 0 pripada domeni funkcije f određenoj u podzadatku **1.**)) i izračunamo $f(0)$:

$$f(0)=\frac{5\cdot 0+2}{2\cdot 0+1}=\frac{0+2}{0+1}=\frac{2}{1}=2.$$

Dakle, sjecište grafa funkcije f i osi ordinata je točka S_2 = (0, 2).

Zaključimo: tražene točke su $S_1=\left(-\frac{2}{5},\ 0\right)$ i S_2 = (0, 2).

3.) $\frac{1}{(2\cdot x+1)^2}$**.** Primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija dobivamo redom:

$$f\,'(x)=\frac{(5\cdot x+2)'\cdot(2\cdot x+1)-(5\cdot x+2)\cdot(2\cdot x+1)'}{(2\cdot x+1)^2}=$$
$$=\frac{\left[(5\cdot x)'+(2)'\right](2\cdot x+1)-(5\cdot x+2)\cdot\left[(2\cdot x)'+(1)'\right]}{(2\cdot x+1)^2}=$$
$$=\frac{\left[5\cdot(x)'+0\right](2\cdot x+1)-(5\cdot x+2)\cdot\left[2\cdot(x)'+0\right]}{(2\cdot x+1)^2}=$$
$$=\frac{(5\cdot 1+0)\cdot(2\cdot x+1)-(5\cdot x+2)\cdot(2\cdot 1+0)}{(2\cdot x+1)^2}=\frac{5\cdot(2\cdot x+1)-(5\cdot x+2)\cdot 2}{(2\cdot x+1)^2}=$$
$$=\frac{10\cdot x+5-10\cdot x-4}{(2\cdot x+1)^2}=\frac{1}{(2\cdot x+1)^2}$$

29. 1.) $\frac{125}{6}\cdot\sqrt{3}$**.** Uspravno tijelo kojemu je osnovka kvadrat, a pobočje četiri jednakokračna trokuta je pravilna uspravna četverostrana piramida. Iz mreže piramide se vidi da je duljina osnovnoga brida jednaka a = 5 cm i da je duljina visine svake pobočke također v_a = 5 cm. Da bismo izračunali obujam piramide, potrebno je izračunati duljinu visine piramide (označimo tu duljinu s h).

Vrh piramide se ortogonalno projicira u središte osnovke. Uočimo pravokutan trokut kojemu je jedna kateta visina piramide, a hipotenuza visina pobočke. Duljina druge katete jednaka je polovici duljine osnovnoga brida piramide. Primjenom Pitagorina poučka zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$h=\sqrt{v_a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \; .$$

U ovu jednakost uvrstimo $v_a = a$, pa dobijemo:

$$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{a^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{a^2\cdot\left(\frac{4-1}{4}\right)}=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot a^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\,.$$

Površina osnovke piramide je $B = a^2$, pa je obujam piramide jednak

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot a^3 \; .$$

U ovaj izraz uvrstimo $a = 5$, pa konačno dobijemo:

$$V=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 5^3=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 125=\frac{125}{6}\cdot\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

2.) 2.469629482 rad $=141^\circ 29'58''$. Odredimo najprije vektor $\overrightarrow{CD}$. Imamo:

$$\overrightarrow{CD}=(4-1)\cdot\vec{i}+(-7-3)\cdot\vec{j}=3\cdot\vec{i}-10\cdot\vec{j}.$$

Da bismo izračunali traženi kut, trebaju nam skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, te duljina svakoga od njih. Izračunajmo te podatke:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=2\cdot 3+5\cdot(-10)=6-50=-44,$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29},$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{3^2+(-10)^2}=\sqrt{9+100}=\sqrt{109}.$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

Kosinus traženoga kuta jednak je:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=-\frac{44}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{109}},$$

pa odatle slijedi

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{44}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{109}}\right)=2.469629482\text{ rad}=141.49934628^\circ=141^\circ 29'58''.$$

3.) ≈ 361.68. Označimo vrhove četverokuta s A, B, C i D tako da vrijedi $|AB|$ = 57 m, $|BC|$ = 123 m i $|CD|$ = 146 m. Spojimo točke A i C. Duljinu dijagonale AC možemo izračunati na dva različita načina: primjenom kosinusova poučka na trokut ABC i primjenom kosinusova poučka na trokut ACD. U prvom slučaju imamo:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos 122^\circ=57^2+123^2-2\cdot 57\cdot 123\cdot\cos 122^\circ=$$
$$=3249+15129-14022\cdot\cos 122^\circ=18378-14022\cdot\cos 122^\circ.$$

U drugom slučaju imamo:

$$|AC|^2=|AD|^2+|CD|^2-2\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\cos 108^\circ=|AD|^2+146^2-2\cdot|AD|\cdot 146\cdot\cos 108^\circ=$$
$$=|AD|^2+21316-292\cdot|AD|\cdot\cos 108^\circ.$$

Lijeve strane jednakosti $|AC|^2=18378-14022\cdot\cos 122^\circ$ i $|AC|^2=|AD|^2+21316-$ $-292\cdot|AD|\cdot\cos 108^\circ$ su međusobno jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Izjednačavanjem desnih strana dobivamo:

$$|AD|^2+21316-292\cdot|AD|\cdot\cos 108^\circ=18378-14022\cdot\cos 122^\circ,$$
$$|AD|^2-292\cdot|AD|\cdot\cos 108+2938+14022\cdot\cos 122^\circ=0.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe (s nepoznanicom $|AD|$) jednaka je:

$$D=292^2\cdot\cos^2 108^\circ-4\cdot(2938+14022\cdot\cos 122^\circ)\approx 26112.09918812$$

Budući da vrijednost duljine dužine AD mora biti strogo pozitivan realan broj, slijedi:

$$|AD|=\frac{292\cdot\cos 108^\circ+\sqrt{D}}{2}\approx 35.68\text{ m.}$$

Stoga je traženi opseg četverokuta jednak

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |AD| = 57 + 123 + 146 + 35.68 = 361.68 \text{ m}.$$

4.). $y = -\frac{10}{7} \cdot x$ **ili** $\mathbf{10 \cdot x + 7 \cdot y = 0}$**.** Odredimo najprije središte kružnice. U tu svrhu riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y - 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}.$$

Izrazimo nepoznanicu y iz druge jednadžbe sustava:

$$y = -x - 3.$$

Uvrstimo taj izraz u prvu jednadžbu sustava:

$$2 \cdot x + 3 \cdot (-x - 3) - 1 = 0,$$
$$2 \cdot x - 3 \cdot x - 9 - 1 = 0,$$
$$-x - 10 = 0,$$
$$-x = 10.$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $x = -10$. Stoga je

$$y = -x - 3 = -(-10) - 3 = 10 - 3 = 7.$$

Dakle, središte kružnice je točka $S = (-10, 7)$.

Iz podatka da kružnica prolazi ishodištem zaključujemo da je duljina polumjera kružnice (označimo je s r) jednaka udaljenosti točke S od ishodišta. Kvadrat te udaljenosti jednak je:

$$r^2 = (-10 - 0)^2 + (7 - 0)^2 = 10^2 + 7^2 = 100 + 49 = 149.$$

Stoga jednadžba kružnice glasi:

$$(x + 10)^2 + (y - 7)^2 = 149.$$

Jednadžbu tangente povučene u ishodištu dobijemo tako da u izraz za jednadžbu tangente povučene na kružnicu $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ u točki $T = (x_0, y_0)$ te kružnice

$$(x_0 - p) \cdot (x - p) + (y_0 - q) \cdot (y - q) = r^2$$

uvrstimo $x_0 = y_0 = 0$, $p = -10$, $q = 7$ i $r^2 = 149$. Slijedi:

$$[0-(-10)]\cdot[x-(-10)]+(0-7)\cdot(y-7)=149,$$
$$10\cdot(x+10)-7\cdot(y-7)=149,$$
$$10\cdot x+100-7\cdot y+49=149,$$
$$-7\cdot y=-10\cdot x-100-49+149,$$
$$-7\cdot y=10\cdot x.$$

Odatle dijeljenjem s (–7) dobivamo:

$$y=\frac{10}{7}\cdot x.$$

Implicitni oblik dobijemo izravno iz jednakosti $7\cdot y=10\cdot x$, otkuda je

$$10\cdot x-7\cdot y=0.$$

Segmentni oblik ove jednadžbe nije moguće napisati jer su duljine odsječaka na koordinatnim osima jednake 0.

Napomena: Može se pokazati da ako kružnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ prolazi ishodištem, onda jednadžba tangente povučene na tu kružnicu u ishodištu glasi $y=-\frac{p}{q}\cdot x$. Posebno, za $p=-10$, $q=7$ dobivamo da je jednadžba tangente $y=-\frac{-10}{7}\cdot x=\frac{10}{7}\cdot x$, kao i ranije.

30. 3. Zadatak se svodi na određivanje broja sjecišta krivulja $y=\log(x+5)$ i $y=-\frac{1}{3}\cdot x^3-3\cdot x^2-5\cdot x$. Nacrtajmo zasebno svaku pojedinu krivulju.

Prirodno područje definicije funkcije $f_1(x)=\log(x+5)$ dobivamo iz uvjeta

$$x+5>0$$

jer je bilo koja logaritamska funkcija definirana samo za strogo pozitivne vrijednosti svojega argumenta. Iz navedene nejednakosti odmah slijedi

$$x>-5.$$

Dakle, prirodno područje definicije funkcije f_1 je otvoreni interval $\langle -5, +\infty\rangle$. Baza logaritma u ovom slučaju je $a=10$, što znači da je riječ o strogo rastućoj funkciji. Također, pravac $x=-5$ je uspravna asimptota na graf funkcije f_1 jer je

$$\lim_{x\to-5} f_1(x)=\lim_{x\to-5}\log(x+5)=-\infty.$$

Odredimo još i nultočku funkcije f_1. Riješimo jednadžbu $f_1(x) = 0$. Imamo:

$$\begin{gathered}\log(x+5)=0,\\ x+5=10^0,\\ x+5=1,\\ x=1-5,\\ x=-4.\end{gathered}$$

Dakle, sjecište grafa funkcije f_1 i osi apscisa (osi x) je točka $S_1 = (-4, 0)$. Radi preciznosti crtanja, odredimo približno i sjecište s osi ordinata (osi y). Njegova prva koordinata je jednaka nuli, a druga se dobije tako da se u propis funkcije f_1 uvrsti $x = 0$. U ovome slučaju to smijemo napraviti jer 0 pripada prirodnom području definicije funkcije f_1, tj. jer je $0 \in \langle -5, +\infty\rangle$:

$$f_1(0) = \log(0 + 5) = \log 5 \approx 0.7.$$

Dakle, sjecište grafa funkcije f_1 s osi ordinata je točka $S_2 = (0, \log 5) \approx (0, 0.7)$.

Promotrimo sada funkciju $f_2(x) = -\frac{1}{3}\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x$. Njezino prirodno područje definicije je skup **R**. Naime, f_2 je polinom 3. stupnja, a prirodno područje definicije bilo kojega polinoma je skup **R**. Međutim, budući da tražimo sjecišta grafova funkcija f_1 i f_2, promatrat ćemo „ponašanje“ funkcije f_2 na prirodnom području definicije funkcije f_1, odnosno na intervalu $\langle -5, +\infty\rangle$. (Za $x < -5$ ne postoje vrijednosti $f_1(x)$, a samim tim niti točke grafa, pa je besmisleno govoriti o sjecištima.)

Odredimo nultočke i intervale monotonosti funkcije f_2. Najprije riješimo jednadžbu $f_2(x) = 0$ na intervalu $\langle -5, +\infty\rangle$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&f_2(x)=0\\ &-\frac{1}{3}\cdot x^3-3\cdot x^2-5\cdot x=0\\ &-\frac{1}{3}\cdot x\cdot(x^2+9\cdot x+15)=0.\end{aligned}$$

Umnožak konačno mnogo realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Prvi broj $-\frac{1}{3}$ je očito različit od nule. Stoga je $x = 0$ ili $x^2 + 9\cdot x + 15 = 0$. Riješimo potonju kvadratnu jednadžbu uobičajenim načinom:

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}=\frac{-9\pm\sqrt{81-60}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{21}}{2}\Rightarrow$$
$$x_1=\frac{-9+\sqrt{21}}{2}=\frac{\sqrt{21}-9}{2}\approx -2.21,\ x_2=\frac{-9-\sqrt{21}}{2}\approx -6.79$$

Primijetimo da je $x_2 < -5$, pa tu nultočku možemo zanemariti. Zbog toga ćemo prigodom crtanja grafa ucrtati točke $O = (0, 0)$ i $S_3 \approx (-2.21, 0)$.

Odredimo intervale monotonosti funkcije f_2. U tu svrhu nađimo njezinu prvu derivaciju:

$$f_2'(x)=\left(-\frac{1}{3}\cdot x^3-3\cdot x^2-5\cdot x\right)'=\left(-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)'-(3\cdot x^2)'-(5\cdot x)'=$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot(x^3)'-3\cdot(x^2)'-5\cdot(x)'=-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1}-3\cdot 2\cdot x^{2-1}-5\cdot 1=-x^2-6\cdot x-5.$$

Odredimo stacionarne točke funkcije f_2. One su nultočke njezine prve derivacije. Stoga riješimo jednadžbu $f_2'(x)=0$ na intervalu $\langle -5, +\infty\rangle$. Dobivamo:

$$f_2'(x)=0$$
$$-x^2-6\cdot x-5=0 \quad /:(-1)$$
$$x^2+6\cdot x+5=0,$$
$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-6\pm 4}{2}\Rightarrow$$
$$x_1=\frac{-6+4}{2}=\frac{-2}{2}=-1,\quad x_2=\frac{-6-4}{2}=\frac{-10}{2}=-5.$$

Primijetimo da nultočka x_2 ne pripada intervalu $\langle -5, +\infty\rangle$, pa je u daljnjem nećemo uzimati u obzir. Stoga ćemo promatrati ponašanje funkcije f_2 na intervalima $\langle -5, -1\rangle$ i $\langle -1, +\infty\rangle$.

U intervalu $\langle -5, -1\rangle$ nalazi se npr. $x = -2$. Izračunajmo vrijednost prve derivacije funkcije f_2 u točki $x = -2$:

$$f_2'(-2)=-(-2)^2-6\cdot(-2)-5=-4+12-5=3>0,$$

pa zaključujemo da f_2 raste na intervalu $\langle -5, -1\rangle$.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)

U intervalu $\langle -1, +\infty \rangle$ nalazi se npr. $x = 0$. Izračunajmo vrijednost prve derivacije funkcije f_2 u točki $x = 0$:

$$f_2'(0) = -0^2 - 6 \cdot 0 - 5 = -5 < 0,$$

pa zaključujemo da f_2 strogo pada na intervalu $\langle -1, +\infty \rangle$. Budući da funkcija f_2 „lijevo“ od točke -1 raste, a „desno“ od te točke pada, zaključujemo da funkcija f_2 u točki $x = -1$ ima lokalni maksimum. Taj je maksimum jednak

$$f_2(-1) = -\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) = -\frac{1}{3} \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 5 = \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{7}{3}.$$

Dakle, graf funkcije f_2 prolazi točkom $M = \left(-1, \frac{7}{3}\right)$. Zaključno primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\lim_{x \to -5} f_2(x) = -\frac{1}{3} \cdot (-5)^3 - 3 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5) = -\frac{1}{3} \cdot (-125) - 3 \cdot 25 + 25 = \frac{125}{3} - 50 = -\frac{25}{3}$$

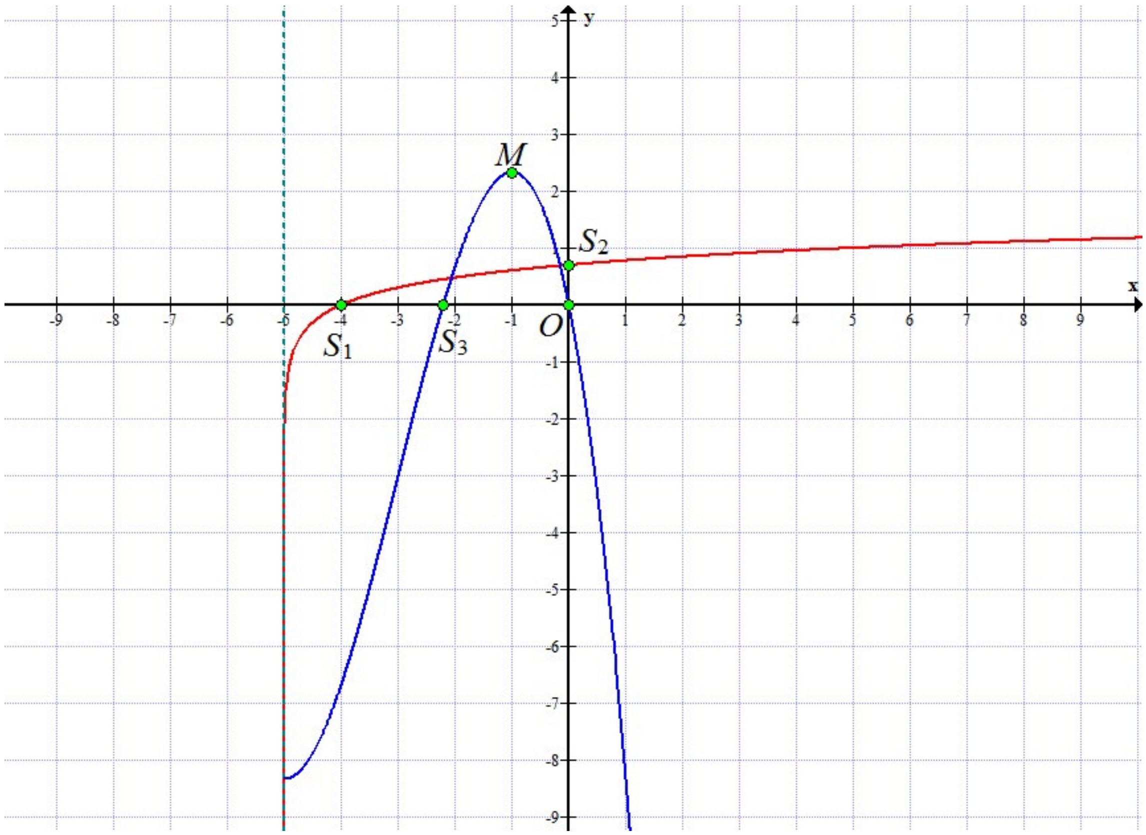
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -\infty$ (jer su svi članovi funkcije f_2 strogo negativni)

Koristeći sve dobivene podatke crtamo grafove funkcija f_1 i f_2 na intervalu $\langle -5, +\infty \rangle$. Dobivamo Sliku 4.

Iz te slike vidimo da se grafovi funkcija f_1 i f_2 sijeku u točno tri različite točke. To znači da polazna jednadžba ima točno tri različita realna rješenja. Najmanje od tih triju rješenja pripada intervalu $\langle -5, -4 \rangle$, srednje od njih pripada intervalu $\langle -3, -2 \rangle$, a najveće od njih pripada intervalu $\langle -1, 0 \rangle$.

Napomena: Koristeći metode numeričke matematike može se pokazati da su približne vrijednosti dobivenih rješenja redom x_1 = -4.999999995, x_2 = –2.064974848 i x_3 = –0.150502715. Sva navedena rješenja su iracionalni brojevi.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – rujan 2014. (viša razina)



Slika 4.