1. **C.** Prva nejednakost nije istinita. Dijeljenjem očite nejednakosti –5 > –7 strogo pozitivnim brojem 7 dobivamo nejednakost $-\frac{5}{7} > -\frac{7}{7} = -1$.

Druga nejednakost nije istinita. Razlomci $-\frac{1}{5}$ i $-\frac{1}{7}$ imaju jednake brojnike (oni iznose –1), pa je veći onaj koji ima manji nazivnik. Zbog toga vrijedi nejednakost $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{7}$.

Treća nejednakost je istinita. Razlomci $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{7}$ imaju jednake brojnike (oni iznose 1), pa je veći onaj koji ima manji nazivnik. Zbog toga vrijedi nejednakost $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$.

Četvrta nejednakost nije istinita. Dijeljenjem očite nejednakosti 7 > 5 strogo pozitivnim brojem 5 dobivamo nejednakost $\frac{7}{5} > \frac{5}{5} = 1$.

2. **A.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&c = \frac{1}{3} \cdot a \cdot (R - 2 \cdot b), \quad / \cdot 3 \\
&3 \cdot c = a \cdot R - 2 \cdot a \cdot b, \\
&a \cdot R = 3 \cdot c + 2 \cdot a \cdot b, \quad / : a \\
&R = \frac{3 \cdot c + 2 \cdot a \cdot b}{a} = \frac{3 \cdot c}{a} + \frac{2 \cdot a \cdot b}{a} = \frac{3 \cdot c}{a} + 2 \cdot b.
\end{aligned}$$

3. **B.** Najprije izrazimo promjer kuglice u cm:

$$7.8 \text{ mm} = \frac{7.8}{10} \text{ cm} = 0.78 \text{ cm}.$$

Polumjer kuglice jednak je polovici promjera kuglice:

$$r = \frac{0.78}{2} \text{ cm} = 0.39 \text{ cm}.$$

Stoga je obujam kuglice jednak

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 0.39^3 \cdot \pi = 0.079092 \cdot \pi \text{ cm}^3 ,$$

pa je tražena masa kuglice jednaka umnošku obujma i gustoće kuglice, odnosno

$$m = \rho \cdot V = 13.6 \text{ g/cm}^3 \cdot 0.079092 \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 3.3792579 \text{ g} \approx 3.38 \text{ g}.$$

4. **B.** Primijetimo najprije da nužno mora biti $a \neq 0$. Naime, ako bi bilo $a = 0$, dobili bismo jednadžbu

$$-6 \cdot x + 8 = 0$$

koja ima jedinstveno rješenje $x = \frac{4}{3}$, pa zbroj svih rješenja u tom slučaju ne može biti jed-

nak –2. Stoga mora biti $a \neq 0$.

Prema Viète ovim formulama, zbroj svih rješenja bilo koje kvadratne jednadžbe dobivamo tako da koeficijent uz nepoznanicu x podijelimo s koeficijentom uz x^2 i dobivenom količniku promijenimo predznak. Tako zaključujemo da zbroj svih rješenja zadane jednadžbe iznosi $\frac{6}{a}$. Taj izraz treba biti jednak –2, pa dobivamo jednadžbu :

$$\frac{6}{a} = -2.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\frac{6}{a} = -2 \quad / \cdot a$$
$$-2 \cdot a = 6, \quad / : (-2)$$
$$a = -\frac{6}{2} = -3.$$

5. **D.** Svi prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 11 daju ostatak 4 tvore aritmetički niz 4, 15, 26, … . Prvi član toga niza jednak je $a_1 = 4$, a razlika niza jednaka je $d = 11$. Stoga je opći član toga niza jednak

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 11 = 4 + 11 \cdot n - 11 = 11 \cdot n - 7.$$

Budući da tražimo sve cijele brojeve s navedenim svojstvom, njih dobivamo tako da jednostavno dozvolimo da broj n bude bilo koji cijeli broj, a ne nužno prirodan broj. Dakle, traženi izraz glasi:

$$a_k = 11 \cdot k - 7, \text{ pri čemu je } k \in \mathbb{Z}.$$

6. **D.** Točka $E(t)$ pridružena broju t nalazi se u trećem kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Obje koordinate točke $E(t)$ su strogo negativni realni brojevi. Sinus broja t jednak je drugoj koordinati točke $E(t)$, pa je taj broj strogo negativan. S druge strane, tangens broja t jednak je količniku druge i prve koordinate točke $E(t)$. Taj je količnik strogo pozitivan jer je količnik dvaju strogo negativnih realnih brojeva strogo pozitivan realan broj. Stoga je i tangens broja t strogo pozitivan realan broj. Dakle, vrijede nejednakosti $\sin t < 0$ i $\operatorname{tg} t < 0$.

7. **B.** Neka su T cijena jedne tehničke olovke, B cijena jedne bilježnice, a M cijena jednoga markera (sve tri cijene su iskazane u kn). Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 3 \cdot T = 2 \cdot B, \\ 4 \cdot B = 5 \cdot M, \\ M = 12.60 \end{cases}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu toga sustava s 2:

$$\begin{cases} 6\cdot T = 4\cdot B, \\ 4\cdot B = 5\cdot M, \\ M = 12.60 \end{cases}$$

Iz prve i druge jednadžbu ovoga sustava zaključujemo da vrijedi jednakost

$$6\cdot T = 5\cdot M.$$

(Desna strana prve jednadžbe jednaka je lijevoj strani druge jednadžbe, pa zbog tranzitivnosti relacije „biti jednak“ lijeva strana prve jednadžbe mora biti jednaka desnoj strani druge jednadžbe.) Dijeljenjem te jednakosti sa 6 dobivamo:

$$T = \frac{5}{6}\cdot M.$$

U ovu jednakost uvrstimo $M = 12.60$, pa dobivamo:

$$T = \frac{5}{6}\cdot 12.60 = 10.50 \text{ kn}.$$

Dakle, cijena jedne tehničke olovke iznosi 10.50 kn.

8. B. Kosinus traženoga kuta jednak je količniku skalarnoga umnoška zadanih vektora i umnoška njihovih duljina:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(-3)\cdot(-6)+4\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+1^2}} = \frac{18+4}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{36+1}} = \frac{22}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{37}} = \frac{22}{5\cdot\sqrt{37}}.$$

Odatle slijedi

$$\varphi = \arccos\left(\frac{22}{5\cdot\sqrt{37}}\right) = 43.66778^\circ \approx 43.67^\circ.$$

9. C. **<u>Napomena</u>: Zadatak je moguće riješiti jedino uz korištenje pretpostavke da je *S* središte zadane kružnice**. Spojimo točke S i A, te točke A i C. Budući da je pravac DA, prema pretpostavci, tangenta, a spojnica točaka SA polumjer zadane kružnice, zaključujemo da je kut $\angle SAD$ pravi kut. Stoga je mjera kuta $\angle CSA$ jednaka

$$\angle CSA = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 82^\circ) = 98^\circ.$$

Taj kut je središnji kut za tetivu $\overline{AC}$. Mjera kuta $\angle ABS$ jednaka je mjeri kuta $\angle ABC$ jer točke B, C i S pripadaju istom pravcu. Kut $\angle ABC$ je obodni kut za tetivu $\overline{AC}$. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu, svaki obodni kut jednak je polovici pripadnoga središnjega kuta, pa tako konačno dobivamo:

$$\angle ABS = \angle ABC = \frac{1}{2}\cdot\angle CSA = \frac{1}{2}\cdot 98^\circ = 49^\circ.$$

10. D. Funkcija je parna ako i samo ako za svaki x iz njezine domene i broj $-x$ pripada toj do-

meni, te vrijedi jednakost $f(-x)=f(x)$. (Kratko i neprecizno možemo reći da je funkcija parna ako i samo ako se međusobno suprotni brojevi preslikaju u isti realan broj.)

Domena funkcije pod **A**. je skup $\mathbb{R}$ jer je ta funkcija zapravo polinom prvoga stupnja. Stoga provjeravamo jednakost $f(-x)=f(x)$:

$$f(-x)=10-(-x)=10+x\neq 10-x=f(x).$$

Dakle, funkcija pod **A**. nije parna.

Domena funkcije pod **B.** je skup $\langle 0,\ +\infty\rangle$, a taj skup ne sadrži međusobno suprotne brojeve. Npr. broj 1 je element skupa $\langle 0,\ +\infty\rangle$, ali njemu suprotan broj -1 nije element istoga skupa. Analogna tvrdnja vrijedi za bilo koji strogo pozitivan realan broj a. Stoga funkcija pod **B.** nije parna.

Domena funkcije pod **C**. je skup $\mathbb{R}$ jer je ta funkcija umnožak polinoma 1. stupnja (funkcije x) i funkcije $\cos x$, a domene tih dviju funkcija jednake su skupu $\mathbb{R}$. Stoga preostaje provjeriti jednakost $f(-x)=f(x)$, pri čemu koristimo činjenicu da je funkcija $\cos x$ parna funkcija, odnosno jednakost $\cos(-x)=\cos x$ koja vrijedi za svaki $x\in\mathbb{R}$:

$$f(-x)=(-x)\cdot\cos(-x)=-x\cdot\cos x=-(x\cdot\cos x)=-f(x).$$

Dakle, funkcija pod **C**. nije parna funkcija.

Domena funkcije pod **D**. je skup $\mathbb{R}$ jer je ta funkcija polinom 2. stupnja. Stoga preostaje provjeriti jednakost $f(-x)=f(x)$:

$$f(-x)=(-x)^2+1=\left[(-1)\cdot x\right]^2+1=(-1)^2\cdot x^2+1=1\cdot x^2+1=x^2+1=f(x).$$

Dakle, funkcija pod **D.** je parna funkcija.

11. B. Koristit ćemo činjenicu da je funkcija $g(x)=2^x$ strogo rastuća funkcija, što znači da vrijedi ekvivalencija $(a\leq b)\Leftrightarrow(2^a\leq 2^b)$, za sve $a,\ b\in\mathbb{R}$. Polazimo od nejednakosti $x^2\geq 0$ koja vrijedi za svaki $x\in\mathbb{R}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&x^2\geq 0 \quad /\cdot(-3)\\
&(-3)\cdot x^2\leq 0, \quad /+1\\
&(-3)\cdot x^2+1\leq 0+1=1, \quad /\,2^{\wedge}\\
&2^{(-3)\cdot x^2+1}\leq 2^1=2, \quad /+4\\
&2^{(-3)\cdot x^2+1}+4\leq 2+4=6,\\
&f(x)\leq 6.
\end{aligned}$$

S druge strane, za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $2^x>0$. To ujedno znači da vrijedi ne-

jednakost $2^{(-3)\cdot x^2+1} > 0$. Objema stranama ove nejednakosti dodamo 4, pa dobijemo:

$$2^{(-3)\cdot x^2+1} + 4 > 0 + 4 = 4,$$
$$f(x) > 4.$$

Tako smo dobili jednakosti $f(x) \le 6$ i $f(x) > 4$ koje možemo objediniti u nejednakost $4 < f(x) \le 6$. Odatle slijedi da je $f(x) \in \langle 4, 6]$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, traženi skup je interval ⟨4, 6].

12. C. Primijetimo da je vrijednost izraza $\sqrt{-4\cdot x+25}$ definirana uz uvjet $-4\cdot x+25 \ge 0$. Riješimo tu nejednadžbu:

$$-4\cdot x+25 \ge 0,$$
$$-4\cdot x \ge -25, \quad /:(-4)$$
$$x \le \frac{25}{4}.$$

Uvažavajući pretpostavku $x \le \frac{25}{4}$ kvadriramo obje strane zadane nejednadžbe pa dobijemo:

$$-4\cdot x+25 \le 4^2,$$
$$-4\cdot x+25 \le 16,$$
$$-4\cdot x \le 16-25,$$
$$-4\cdot x \le -9, \quad /:(-4)$$
$$x \ge \frac{9}{4}.$$

Dakle, za svaki *x* koji je rješenje zadane nejednadžbe moraju vrijediti nejednakosti $x \le \frac{25}{4}$ i $x \ge \frac{9}{4}$. To znači da je skup svih rješenja zadane jednadžbe segment $\left[\frac{9}{4}, \frac{25}{4}\right]$, odnosno segment [2.25, 6.25]. U tom segmentu nalaze se četiri prirodna broja: 3, 4, 5 i 6.

13. C. Neka su *a* duljina velike (realne) poluosi i *b* duljina male (imaginarne) poluosi hiperbole. Prirodno pretpostavljamo da su *a*, *b* > 0. Traženu jednadžbu hiperbole zbog toga tražimo u obliku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Iz podatka da točka *T* mora pripadati hiperboli dobivamo jednadžbu:

$$\frac{10^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Jednadžbu asimptote zapišimo u eksplicitnom obliku:

$$3 \cdot x + 4 \cdot y = 0,$$
$$4 \cdot y = -3 \cdot x, \quad / : 4$$
$$y = -\frac{3}{4} \cdot x.$$

Koeficijent smjera toga pravca je $k = -\frac{3}{4}$. Apsolutna vrijednost toga koeficijenta treba biti jednaka omjeru duljine male i duljine velike osi hiperbole:

$$\frac{b}{a} = \left| -\frac{3}{4} \right|,$$
$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \frac{10^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Iz druge jednadžbe sustava izrazimo nepoznanicu b:

$$b = \frac{3}{4} \cdot a$$

i dobiveni izraz uvrstimo u prvu jednadžbu sustava:

$$\frac{10^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{4} \cdot a\right)^2} = 1,$$
$$\frac{100}{a^2} - \frac{\frac{9^2}{2^2}}{\frac{3^2}{4^2} \cdot a^2} = 1,$$
$$\frac{100}{a^2} - \frac{\frac{9^2}{2^2}}{\frac{9}{(2^2)^2} \cdot a^2} = 1,$$
$$\frac{100}{a^2} - \frac{9 \cdot 2^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{100}{a^2}-\frac{9\cdot 4}{a^2}=1,$$
$$\frac{100}{a^2}-\frac{36}{a^2}=1,$$
$$\frac{64}{a^2}=1.$$

Odatle slijedi $a^2=64$. Kvadriramo li jednakost $b=\frac{3}{4}\cdot a$, dobit ćemo:

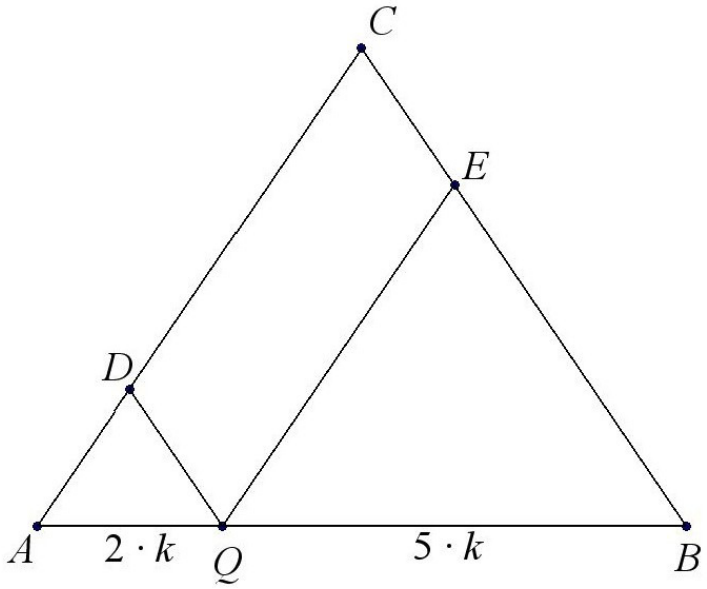
$$b^2=\left(\frac{3}{4}\cdot a\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot a^2=\frac{9}{16}\cdot a^2.$$

U ovu jednakost uvrstimo $a^2=64$, pa dobijemo:

$$b^2=\frac{9}{16}\cdot 64=36.$$

Dakle, tražena jednadžba hiperbole glasi $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

14. A. Vidjeti Sliku 1.



Slika 1.

Manji od dobivenih dvaju trokuta je trokut *AQD*. Taj trokut je sličan trokutu *ABC* prema poučku *K* – *K* – *K* (zajednički kut kod vrha *A*, jednaki kutovi kod vrhova *B* i *Q* kao kutovi uz transverzalu). Koeficijent sličnosti jednak je omjeru duljina stranica *AQ* i *AB*:

$$k=\frac{\left|\overline{AQ}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{2\cdot k}{2\cdot k+5\cdot k}=\frac{2\cdot k}{7\cdot k}=\frac{2}{7}.$$

Omjer površine trokuta AQD i površine trokuta ABC jednak je kvadratu koeficijenta k:

$$\frac{P_{\Delta AQD}}{P_{\Delta ABC}} = k^2 .$$

Odatle slijedi da je tražena površina jednaka

$$P_{\Delta AQD} = k^2 \cdot P_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 35 = \frac{4}{49} \cdot 35 = \frac{20}{7} \text{ cm}^2 .$$

15. C. Iz 350 kg mlijeka dobije se $\frac{13.2}{100} \cdot 350 = 46.2$ kg vrhnja. Iz 46.2. kg vrhnja dobije se $\frac{24.5}{100} \cdot 46.2 = 11.319$ kg mliječne masti. Tih 11.319 kg mliječne masti mora tvoriti 82% mase maslaca. Označimo li traženu masu maslaca s m, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{82}{100} \cdot m = 11.319.$$

Dijeljenjem te jednadžbe s $\frac{82}{100}$ dobivamo m = 13.8036585 ≈ 13.80 kg.

16. 7.3889. Odmah imamo:

$$\sqrt{3} + 4^{1.25} = 1.7320508 + 5.6568542 = 7.388905 \approx 7.3889..$$

17. $\frac{1}{2}$; -3 **ili obratno.** Imamo redom:

$$x^2 = \frac{3 - 5 \cdot x}{2} \quad / \cdot 2$$
$$2 \cdot x^2 = 3 - 5 \cdot x,$$
$$2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3 = 0, \qquad .$$
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - (-24)}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4},$$
$$x_1 = \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = -\frac{12}{4} = -3.$$

18. 1.) 43. Zapravo tražimo koliko posto iznosi broj P = 86 u odnosu na broj S = 200. Traženi postotak je jednak

$$p = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 86}{200} = 43.$$

2.) 60. Neka je b_i broj bombona u i-toj posudi, za i = 1, 2, 3, 4, 5. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav od pet jednadžbi s pet nepoznanica:

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=200, \\ b_1+b_2=104, \\ b_2+b_3=86, \\ b_3+b_4=60, \\ b_4+b_5=54. \end{cases}$$

Zbrojimo drugu, treću, četvrtu i petu jednadžbu toga sustava:

$$\begin{aligned} &(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)+(b_4+b_5)=104+86+60+54, \\ &b_1+b_2+b_2+b_3+b_3+b_4+b_4+b_5=304, \\ &b_1+2\cdot b_2+2\cdot b_3+2\cdot b_3+2\cdot b_4+b_5=304, \\ &b_1+2\cdot(b_2+b_3+b_4)+b_5=304. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe sustava izrazimo zbroj b_1+b_5:

$$b_1+b_5=200-(b_2+b_3+b_4),$$

pa uvrstimo taj izraz u izraz $b_1+2\cdot(b_2+b_3+b_4)+b_5=304$:

$$\begin{aligned} &2\cdot(b_2+b_3+b_4)+200-(b_2+b_3+b_4)=304, \\ &b_2+b_3+b_4=304-200, \\ &b_2+b_3+b_4=104. \end{aligned}$$

U ovu jednakost uvrstimo četvrtu jednadžbu polaznoga sustava $b_3+b_4=60$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} &b_2+60=104, \\ &b_2=104-60=44. \end{aligned}$$

Tako iz druge jednadžbe polaznoga sustava slijedi:

$$b_1=104-b_2=104-44=60.$$

Dakle, u prvoj posudi ima 60 bombona.

19. 1.) $x>\frac{10}{3}$ **ili** $x\in\left\langle\frac{10}{3},\ +\infty\right\rangle$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} &\frac{x-1}{6}>\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x+\frac{2-x}{4}\right), \\ &\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{6}>\frac{1}{6}\cdot x+\frac{2-x}{8}, \\ &-\frac{1}{6}>\frac{2-x}{8} \quad /\cdot 24 \\ &-4>3\cdot(2-x), \\ &-4>6-3\cdot x, \\ &3\cdot x>6+4, \\ &3\cdot x>10. \end{aligned}$$

Odavde dijeljenjem s 3 dobivamo $x > \frac{10}{3}$. Skup svih rješenja zadane nejednadžbe možemo zapisati i kao otvoreni interval $\left\langle \frac{10}{3},\ +\infty \right\rangle$.

2.) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty)$. Riješimo najprije pripadnu kvadratnu jednadžbu. Imamo redom:

$$-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 6 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{-4} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{-4} = \frac{-7 \pm 1}{-4},$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{-7-1}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

Budući da je koeficijent uz x^2 strogo negativan broj (to je –2), pripadna kvadratna funkcija poprima nepozitivne vrijednosti na skupu koji se dobije kad se iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ izbaci otvoreni interval određen izračunatim rješenjima kvadratne jednadžbe. Dakle, iz skupa $\mathbb{R}$ izbacujemo otvoreni interval $\left\langle \frac{3}{2},\ 2 \right\rangle$. Dobijemo skup $\mathbb{R} \setminus \left\langle \frac{3}{2},\ 2 \right\rangle$. Taj skup trebamo napisati pomoću intervala, pa dobijemo skupovnu uniju $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty)$.

20. 1.)–2 + 3 · *i*. Odredimo najprije vrijednost i^{219}. Podijelimo li broj 219 brojem 4, dobit ćemo količnik 54 i ostatak 3. Dakle, vrijedi jednakost

$$219 = 4 \cdot 54 + 3.$$

Zbog toga je

$$i^{219} = i^{4 \cdot 54 + 3} = i^{4 \cdot 54} \cdot i^3 = (i^4)^{54} \cdot i^3 = 1^{54} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i.$$

Tako sada imamo:

$$\frac{4 \cdot i^{219}}{i-1} + i = \frac{4 \cdot (-i)}{i-1} + i = \frac{-4 \cdot i}{i-1} + i = \frac{-4 \cdot i}{i-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-1} + i = \frac{-4 \cdot i \cdot (-i-1)}{(-1)^2 - i^2} + i = \frac{4 \cdot (i^2 + i)}{1 - (-1)} + i =$$

$$= \frac{4 \cdot (-1+i)}{1+1} + i = \frac{4 \cdot (-1+i)}{2} + i = 2 \cdot (-1+i) + i = -2 + 2 \cdot i + i = -2 + 3 \cdot i.$$

2.) $\sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i,\ (-2) \cdot i$ **eventualno zapisani u nekom drugom poretku ili obliku.** Zapravo tražimo barem jedno kompleksno rješenje jednadžbe $w^3 = 8 \cdot i$. Sva rješenja te jednadžbe određujemo primjenom de Moivrèove formule za korjenovanje kompleksnoga broja. Kompleksan broj $z = 8 \cdot i$ najprije zapišimo u trigonometrijskom obliku. Tom broju odgovara točka $A = (0, 8)$ Gaussove ravnine. Udaljenost te točke od ishodišta Gaussove ravnine iznosi $r = 8$. Točka A pripada pozitivnom dijelu imaginarne osi, pa je kut φ koji

spojnica ishodišta Gaussove ravnine i točke A zatvara s pozitivnim dijelom realne osi jednak 90°, odnosno $\frac{\pi}{2}$ radijana.

Dakle, apsolutna vrijednost (modul) broja $8\cdot i$ jednaka je $r = 8$, a argument toga broja jednak je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radijana. Zbog toga vrijedi jednakost:

$$8\cdot i = 8\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Preostaje primijeniti de Moivrèove formule za korjenovanje kompleksnoga broja. Sva rješenja navedene jednadžbe dana su izrazom

$$w_k = \sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi}{3}\right)\right],\ \text{za } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Pojednostavnimo taj izraz:

$$w_k = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi+4\cdot k\cdot\pi}{2}}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi+4\cdot k\cdot\pi}{2}}{3}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+4\cdot k\cdot\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi+4\cdot k\cdot\pi}{6}\right)\right].$$

Uvrštavanjem $k = 0$, $k = 1$ i $k = 2$ dobivamo:

$$w_0 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+4\cdot 0\cdot\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi+4\cdot 0\cdot\pi}{6}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+4\cdot 1\cdot\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi+4\cdot 1\cdot\pi}{6}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right)\right] = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_2 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+4\cdot 2\cdot\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi+4\cdot 2\cdot\pi}{6}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{9}{6}\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{9}{6}\cdot\pi\right)\right] = 2\cdot\left[0 + i\cdot(-1)\right] = (-2)\cdot i.$$

21. 1.) $a^{\frac{11}{2}}$ **.** Imamo redom:

$$\left[\left(\frac{1}{a^3}\right)^2\cdot\sqrt{a}\right]^{-1} = \left[\left(a^{-3}\right)^2\cdot a^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} = \left(a^{-6}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(a^{-6+\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(a^{\frac{-12+1}{2}}\right)^{-1} = \left(a^{\frac{-11}{2}}\right)^{-1} = a^{\frac{11}{2}}.$$

2.) $\frac{1}{2\cdot b}$ **.** Koristeći formulu za razliku kvadrata dobivamo:

$$\left(\frac{a}{a^2-4\cdot b^2} - \frac{1}{2\cdot a+4\cdot b}\right) : \frac{b}{a-2\cdot b} = \left(\frac{a}{a^2-2^2\cdot b^2} - \frac{1}{2\cdot a+4\cdot b}\right)\cdot\frac{a-2\cdot b}{b} =$$

$$= \left[\frac{a}{(a-2\cdot b)\cdot(a+2\cdot b)} - \frac{1}{2\cdot(a+2\cdot b)}\right]\cdot\frac{a-2\cdot b}{b} = \frac{2\cdot a-1\cdot(a-2\cdot b)}{2\cdot(a+2\cdot b)\cdot(a-2\cdot b)}\cdot\frac{a-2\cdot b}{b} =$$

$$= \frac{2\cdot a - a + 2\cdot b}{2\cdot(a+2\cdot b)\cdot(a-2\cdot b)}\cdot\frac{a-2\cdot b}{b} = \frac{a+2\cdot b}{2\cdot(a+2\cdot b)\cdot(a-2\cdot b)}\cdot\frac{a-2\cdot b}{b} =$$

$$= \frac{(a+2\cdot b)\cdot(a-2\cdot b)}{2\cdot b\cdot(a+2\cdot b)\cdot(a-2\cdot b)} = \frac{1}{2\cdot b}.$$

22. 1.) 0.24. Izračunajmo najprije duljinu dužine $\overline{BE}$. Trokut ABE je pravokutan s pravim kutom kod vrha E. Znamo duljinu katete $\overline{AE}$ i hipotenuze $\overline{AB}$, pa duljinu katete $\overline{BE}$ izračunamo primjenom Pitagorina poučka:

$$\left|\overline{BE}\right| = \sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2 - \left|\overline{AE}\right|^2} = \sqrt{4.1^2 - 3.6^2} = \sqrt{(4.1-3.6)\cdot(4.1+3.6)} = \sqrt{0.5\cdot 7.7} = \sqrt{3.85} \approx 1.962141687.$$

Stoga je tražena duljina jednaka

$$\left|\overline{CE}\right| = \left|\overline{BC}\right| - \left|\overline{BE}\right| = 2.2 - \sqrt{3.85} \approx 0.237858313 \approx 0.24 \text{ cm}.$$

2.) $0.339836909 \text{ rad.} = 19.47122063^\circ = 19^\circ 28'16''$**.** Traženu mjeru najbrže određujemo primjenom funkcije sinus. Označimo s α traženu mjeru kuta $\angle CAB$. Tada je

$$\sin\alpha = \frac{a}{3\cdot a} = \frac{1}{3}.$$

Jedino rješenje ove trigonometrijske jednadžbe u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $\alpha = 0.339837$ rad. Preračunamo li ovu mjeru u stupnjeve, dobijemo $\alpha = 19.47122063^\circ = 19^\circ 28'16''$.

23. 1.) ≈ 4.16. Riješimo najprije jednadžbu $\binom{n}{3} = \binom{n}{2}$. Imamo redom:

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{2}$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2!} \quad /:[n\cdot(n-1)]$$

$$\frac{n-2}{6} = \frac{1}{2} \quad /\cdot 6$$

$$n-2 = 3,$$

$$n = 5.$$

Tako zapravo imamo razvoj binoma $(a+2)^5$. Prema binomnoj formuli, opći član u razvoju ovoga binoma je $\binom{5}{k}\cdot a^{5-k}\cdot 2^k$. Stoga ćemo koeficijent uz a^3 dobiti tako da u izraz za opći član uvrstimo $k = 2$ jer je tada eksponent u potenciji s bazom a jednak 3. Dakle, traženi koeficijent je jednak

$$\binom{5}{2}\cdot 2^2 = \frac{5\cdot 4}{2!}\cdot 4 = \frac{80}{2} = 40.$$

2.) 100. Definirajmo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekurzivno pravilom $a_1=\sqrt[3]{x}$, $a_n=\sqrt[3]{x\cdot a_{n-1}}$ za $n\geq 2$. Odredimo zatvorenu formu za opći član ovoga niza. Napišimo prvih nekoliko članova niza:

$$a_1=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}},$$
$$a_2=\sqrt[3]{x\cdot a_1}=\sqrt[3]{x\cdot x^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{x^{1+\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}}=x^{\frac{4}{9}},$$
$$a_3=\sqrt[3]{x\cdot a_2}=\sqrt[3]{x\cdot x^{\frac{4}{9}}}=\sqrt[3]{x^{1+\frac{4}{9}}}=\sqrt[3]{x^{\frac{13}{9}}}=x^{\frac{13}{27}},$$
$$a_4=\sqrt[3]{x\cdot a_3}=\sqrt[3]{x\cdot x^{\frac{13}{27}}}=\sqrt[3]{x^{1+\frac{13}{27}}}=\sqrt[3]{x^{\frac{40}{27}}}=x^{\frac{40}{81}},$$
$$\ldots$$

Odatle možemo naslutiti da je $a_n=x^{\frac{\frac{1}{2}\cdot(3^n-1)}{3^n}}=x^{\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}}$. Dokažimo tu tvrdnju matematičkom indukcijom.

Za $n=1$ dobivamo $a_1=x^{\frac{3^1-1}{2\cdot 3^1}}=x^{\frac{3-1}{2\cdot 3}}=x^{\frac{2}{2\cdot 3}}=x^{\frac{1}{3}}$, što je točno.

Pretpostavimo da je $a_n=x^{\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}}$, za neki $n\in\mathbb{N}$. Želimo pokazati da je $a_{n+1}=x^{\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^{n+1}}}$. Računamo:

$$a_{n+1}=\sqrt[3]{x\cdot a_n}=\sqrt[3]{x\cdot x^{\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}}}=x^{\frac{\frac{3\cdot 3^n-1}{2\cdot 3^n}}{3}}=x^{\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n\cdot 3}}=x^{\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^{n+1}}},$$

što smo i željeli dobiti.

Lijeva strana zadane jednakosti jednaka je graničnoj vrijednosti (limesu) niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Odredimo tu graničnu vrijednost:

$$L=\lim_n a_n=\lim_n x^{\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}}=\lim_n x^{\frac{3^n}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}}=\lim_n x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}}=x^{\frac{1}{2}-0}=x^{\frac{1}{2}}.$$

Ta granična vrijednost treba biti jednaka 10, pa dobivamo jednadžbu

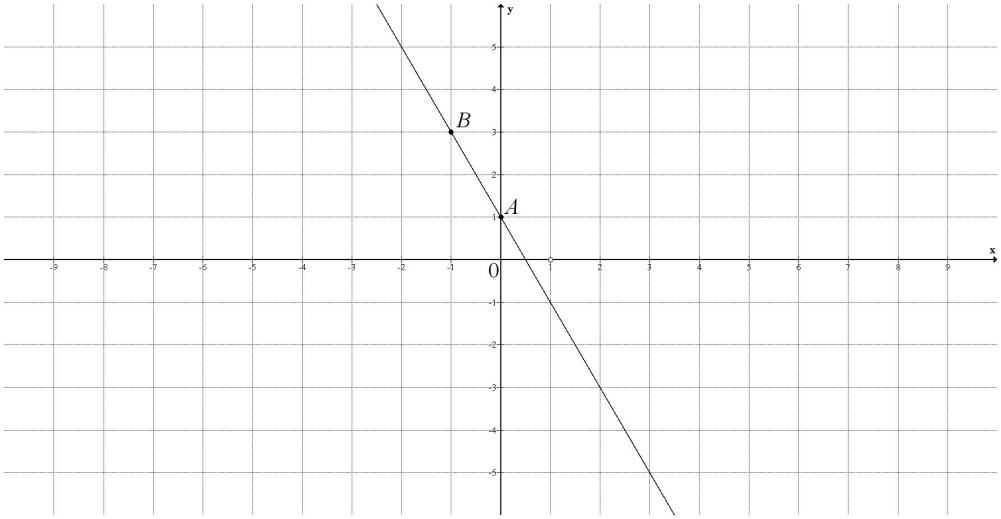
$$x^{\frac{1}{2}}=10.$$

Kvadriranjem lijeve i desne strane te jednadžbe odmah dobivamo $x=100$.

24. 1.) Vidjeti Sliku 1. U pravokutni koordinatni sustav ucrtamo točke $A=(0, f(0))=(0, 1)$ (ta je točka već ucrtana) i $B=(-1, f(-1))=(-1, 3)$. Budući da je riječ o linearnoj funkciji, njezin graf je pravac. Za crtanje bilo kojega pravca dovoljno je zadati bilo koje dvije njegove različite točke. U ovom slučaju već imamo zadane točke A i B, pa ih spojimo jednim pravcem. Tako dobivamo Sliku 1.

2.) ⟨5, 8⟩. Iz zadanoga grafa zaključujemo da funkcija pada na intervalu ⟨4, 8⟩. Stoga treba odrediti za koje x iz toga intervala je $f(x)<2$. Povucimo pravac $y=2$ na segmentu [4, 8].

Lako se vidi da je graf zadane funkcije strogo ispod toga pravca ako i samo ako je $x \in \langle 5, 8\rangle$. Dakle, rješenje zadatka je otvoreni interval $\langle 5, 8\rangle$.



Slika 1.

25. 1.) $\dfrac{3}{\cos^2(3\cdot x)}$**.** Koristimo pravilo deriviranja složene funkcije. Najprije deriviramo funkciju tangens (pri čemu je argument derivacije jednak argumentu tangensa, tj. $3 \cdot x$), a potom dobiveni izraz pomnožimo s derivacijom argumenta tangensa. Iz tablica derivacija elementarnih funkcija znamo da je $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, pa dobivamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\cdot(3\cdot x)' = \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\cdot 3\cdot(x)' = \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\cdot 3\cdot 1 = \frac{3}{\cos^2(3\cdot x)}.$$

2.) $y = \dfrac{1}{8}\cdot x + 2$ **ili** $x - 8\cdot y + 16 = 0$ **ili** $\dfrac{x}{-16} + \dfrac{y}{2} = 1$**.** Odredimo najprije drugu koordinatu točke krivulje u kojoj povlačimo tangentu. Budući da je prva koordinata te točke jednaka 16, druga koordinata jednaka je vrijednosti $f(16)$. Stoga računamo $f(1)$:

$$f(16) = \sqrt{16} = 4.$$

Dakle, tangentu povlačimo u točki $D = (16, 4)$.

Izračunajmo koeficijent smjera tangente. On je jednak vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x_0 = 16$. Stoga imamo:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}},$$

$$f'(16) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{16}} = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}.$$

Dakle, koeficijent smjera tangente jednak je $k = \dfrac{1}{8}$. Stoga jednadžba tangente glasi:

$$y-4=\frac{1}{8}\cdot(x-16),$$
$$y=\frac{1}{8}\cdot x-2+4,$$
$$y=\frac{1}{8}\cdot x+2.$$

Tu jednadžbu možemo zapisati u implicitnom, odnosno segmentnom obliku:

$$y=\frac{1}{8}\cdot x+2 \quad /\cdot 8$$
$$8\cdot y=x+16,$$
$$x-8\cdot y+16=0 \text{ ... implicitni oblik}$$
$$y=\frac{1}{8}\cdot x+2,$$
$$-\frac{1}{8}\cdot x+y=2 \quad /:2$$
$$\frac{x}{-16}+\frac{y}{-2}=1 \text{ ... segmentni oblik}$$

26. <u>**Napomena**</u>: **Zadatak nema rješenja ako se pretpostavi da je** $f(x)=A\cdot\sin(B\cdot x)+D$ **jer je ne postoji funkcija oblika** $f(x)=A\cdot\sin(B\cdot x)+D$ **čiji bi graf bila krivulja sa slike. Stoga ćemo riješiti zadatak uz pretpostavku da je** $f(x)=A\cdot\sin(B\cdot x+C)+D$**.**

Uočimo da funkcija *f* ima najmanju vrijednost jednaku –2, a najveću vrijednost jednaku 2. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A>0$. (Ako je $A<0$, onda umjesto izraza $A\cdot\sin(B\cdot x+C)$ promatramo njemu ekvivalentan izraz $-A\cdot\sin(-B\cdot x-C)$. Ti izrazi su ekvivalentni jer je sinus neparna funkcija.) Najmanja vrijednost izraza $\sin(B\cdot x+C)$ na skupu $\mathbb{R}$ jednaka je –1, a najveća vrijednost 1. Stoga je najmanja vrijednost funkcije *f* u općem slučaju jednaka $-A+D$, a najveća $A+D$. Tako dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases}-A+D=-2,\\ A+D=2\end{cases}$$

čije je rješenje $(A, D)=(2, 0)$. Dakle, funkcija *f* ima oblik $f(x)=2\cdot\sin(B\cdot x+C)$.

1.) π. Koristit ćemo činjenicu da je apsolutna vrijednost razlike bilo kojih dviju uzastopnih nultočaka funkcije *f* jednaka polovici njezina temeljnoga perioda[1]. Iz zadanoga grafa vidimo da su dvije uzastopne nultočke $x_0=\frac{\pi}{6}$ i $x_1=\frac{2}{3}\cdot\pi$. Odredimo apsolutnu vrijednost njihove razlike:

$$|x_0-x_1|=\left|\frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\cdot\pi\right|=\left|\frac{\pi-4\cdot\pi}{6}\right|=\left|\frac{-3\cdot\pi}{6}\right|=\left|-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}.$$

[1] To svojstvo ima svaka funkcija oblika $f(x)=A\cdot\sin(B\cdot x+C)$.

Traženi temeljni period je dvostruko veći od izračunane razlike i iznosi

$$T = 2 \cdot |x_0 - x_1| = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi .$$

2.) $\frac{5}{12} \cdot \pi$**.** Primijenit ćemo činjenicu da ako su x_0 i x_1 dvije uzastopne nultočke zadane funkcije, onda za $x = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + x_1)$ funkcija poprima ili najveću ili najmanju vrijednost[2]. U ovom slučaju uzmemo $x_0 = \frac{\pi}{6}$ i $x_1 = \frac{2}{3} \cdot \pi$, pa sa slike vidimo da će funkcija poprimiti najmanju vrijednost -2 za

$$x = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + x_1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot \pi \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi + 4 \cdot \pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot \pi}{6} = \frac{5 \cdot \pi}{12} .$$

Iz slike se vidi da je $x_0 = \frac{\pi}{6}$ najmanja strogo pozitivna nultočka zadane funkcije, pa zaključujemo da je traženi realan broj x jednak upravo $\frac{5}{12} \cdot \pi$**.**

27. 1.) $\log_4 3 \approx 0.79248125$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &4^{x+1} = 12, \\ &4^x \cdot 4^1 = 12, \\ &4^x \cdot 4 = 12, \quad / : 4 \\ &4^x = 3. \end{aligned}$$

Odavde izravno slijedi $x = \log_4 3$. Da bismo približno izračunali taj broj, zapisat ćemo ga koristeći logaritam po bazi 10:

$$x = \log_4 3 = \frac{\log 3}{\log 4} \approx \frac{0.477121254719662}{0.6020599913279624} \approx 0.79248125 .$$

2.). $\frac{1}{6}$. Koristeći svojstva logaritama imamo redom:

$$\begin{aligned} &\log_5 (x+4) - \log_5 x = 2, \\ &\log_5 \left(\frac{x+4}{x} \right) = 2, \\ &\frac{x+4}{x} = 5^2, \\ &\frac{x}{x} + \frac{4}{x} = 25, \end{aligned}$$

[2] I ovo svojstvo ima svaka funkcija oblika $f(x) = A \cdot \sin(B \cdot x + C)$.

$$1+\frac{4}{x}=25,$$
$$\frac{4}{x}=25-1,$$
$$\frac{4}{x}=24,$$
$$x=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}.$$

3.) $x_1=\frac{\pi}{3}$ i $x_2=\frac{4}{3}\cdot\pi$. Iz zadane jednadžbe slijedi $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$. Njezino rješenje u intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je

$$x_1=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Taj broj pripada segmentu [0, 2 · π], pa sljedeće rješenje dobijemo tako da broju $\frac{\pi}{3}$ dodamo temeljni period funkcije tangens, odnosno broj π:

$$\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\cdot\pi.$$

I taj broj pripada segmentu [0, 2 · π]. Sljedeće rješenje dobili bismo tako da broju $\frac{4}{3}\cdot\pi$ dodamo broj π, odnosno tako da broju $\frac{\pi}{3}$ dodamo 2 · π, ali to rješenje očito ne pripada segmentu [0, 2 · π]. Stoga su sva tražena rješenja $x_1=\frac{\pi}{3}$ i $x_2=\frac{4}{3}\cdot\pi$.

28. 1.) 0; 3. Prva koordinata tražene točke jednaka je 0 jer sve točke na osi ordinata imaju prvu koordinatu jednaku 0. Druga koordinata tražene točke jednaka je $f(0)$. Izračunajmo tu vrijednost:

$$f(0)=|5\cdot 0-3|=|0-3|=|-3|=3.$$

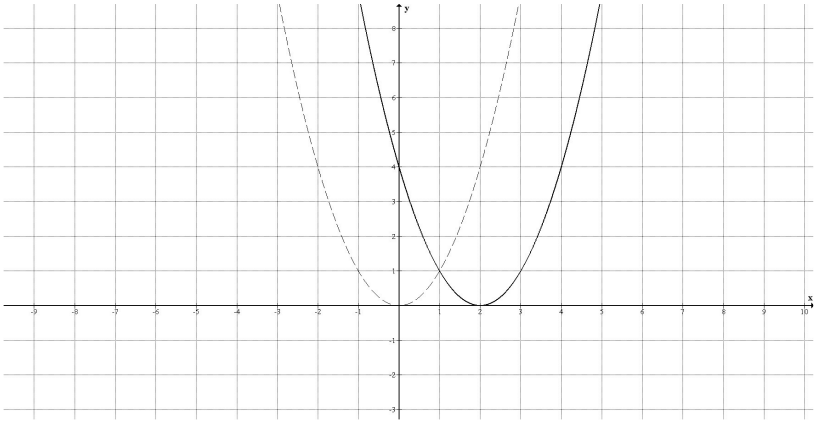
Dakle, tražena točka je $A=(0, 3)$.

2.) $\frac{10}{11}$. Tražena vrijednost je jednaka $g\left[f(7)\right]$. Stoga imamo redom:

$$f(7)=\frac{7^2+1}{5}=\frac{49+1}{5}=\frac{50}{5}=10,$$
$$g(10)=\frac{10}{10+1}=\frac{10}{11}.$$

Dakle, $(g\circ f)(7)=g\left[f(7)\right]=g(10)=\frac{10}{11}$.

3.) Vidjeti Sliku 2. Zadanu krivulju je najjednostavnije nacrtati tako da svaku točku parabole $y = x^2$ translatiramo za dvije jedinične dužine (na osi apscisa) udesno. Tako dobivamo krivulju prikazanu na Slici 2.



Slika 2.

Alternativno, traženu parabolu možemo nacrtati tako da odredimo bilo koje tri njezine različite točke od kojih je točno jedna tjeme parabole. Tjeme parabole $y = (x-a)^2$ je u njezinu sjecištu s osi apscisa, odnosno u točki $T = (a, 0)$. U ovome je slučaju, dakle, tjeme parabole točka $T = (2, 0)$. Preostaje odrediti još dvije točke parabole. Uzmimo npr. $x = 0$ i $x = 1$, pa izračunajmo pripadne vrijednosti varijable y:

$$y(0) = (0-2)^2 = (-2)^2 = 4,$$
$$y(1) = (1-2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Stoga u pravokutni koordinatni sustav ucrtamo točke T, $A = (0, 4)$ i $B = (1, 1)$, pa ih spojimo parabolom. Dobivamo krivulju prikazanu na Slici 2.

29. 1.) $\sqrt{19}$ **.** Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su vrhovi trokuta označeni s A, B i C, te da su $|\overline{AB}| = 6$ cm i $|\overline{BC}| = 7$ cm. Neka je D polovište dužine $\overline{AB}$. Znamo da je $|\overline{CD}| = 5$ cm. Budući da je D polovište dužine $\overline{AB}$, to je $|\overline{BD}| = \frac{1}{2}\cdot|\overline{AB}| = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ cm. Izračunajmo kosinus kuta $\beta := \angle DBC$ koristeći kosinusov poučak primijenjen na trokut BCD:

$$\cos\beta = \frac{|\overline{BD}|^2 + |\overline{BC}|^2 - |\overline{CD}|^2}{2\cdot|\overline{BD}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{3^2+7^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{9+49-25}{42} = \frac{33}{42} = \frac{11}{14}.$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak na trokut ABC. Pritom treba uočiti da je kut kod vrha B trokuta ABC ujedno i gore definiran kut β. Stoga imamo:

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 - 2\cdot|\overline{AB}|\cdot|\overline{BC}|\cdot\cos\beta = 6^2+7^2-2\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{11}{14} = 36+49-66 = 19.$$

Odatle slijedi $|\overline{AC}| = \sqrt{19} \approx 4.3588989435$ cm.

2.) $\frac{1}{12}\cdot a^{12}$**.** Neka je *P* polovište brida $\overline{CC_1}$. Manji od dobivenih dvaju dijelova je tetraedar *BCDP*. Osnovka toga tetraedra je pravokutan trokut *BCD* s pravim kutom kod vrha *C*. Visina tetraedra je dužina $\overline{CP}$.

U pravokutnom trokutu *BCD* znamo duljine dviju kateta: $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right| = a.$ Također, znamo i duljinu visine $\overline{CP}$: $\left|\overline{CP}\right| = \frac{a}{2}$. Stoga je obujam tetraedra jednak:

$$V_{BCDP} = \frac{1}{3}\cdot P_{\Delta BCD}\cdot\left|\overline{CP}\right| = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|\right)\cdot\left|\overline{CP}\right| = \frac{1}{6}\cdot a\cdot a\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{12}\cdot a^3.$$

3.) (3, –2). Odredimo sjecište zadanoga pravca i kružnice. U tu svrhu riješimo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = 2\cdot x + b, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu sustava uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&(x-1)^2 + (2\cdot x + b + 1)^2 = 5,\\
&x^2 - 2\cdot x + 1 + 4\cdot x^2 + 4\cdot(b+1)\cdot x + (b+1)^2 = 5,\\
&5\cdot x^2 + \left[4\cdot(b+1) - 2\right]\cdot x + (b+1)^2 + 1 - 5 = 0,\\
&5\cdot x^2 + (4\cdot b + 2)\cdot x + b^2 + 2\cdot b + 1 - 4 = 0,\\
&5\cdot x^2 + (4\cdot b + 2)\cdot x + b^2 + 2\cdot b - 3 = 0.
\end{aligned}$$

Da bi zadani pravac bio tangenta kružnice, posljednja kvadratna jednadžba mora imati jedinstveno rješenje. Nužan i dovoljan uvjet za jedinstvenost rješenja je da diskriminanta jednadžbe bude jednaka nuli. Odredimo diskriminantu *D*:

$$\begin{aligned}
D &= (4\cdot b + 2)^2 - 4\cdot 5\cdot(b^2 + 2\cdot b - 3) = 16\cdot b^2 + 2\cdot 4\cdot b\cdot 2 + 4 - 20\cdot b^2 - 40\cdot b + 60 =\\
&= -4\cdot b^2 - 24\cdot b + 64 = (-4)\cdot(b^2 + 6\cdot b - 16).
\end{aligned}$$

Njezina vrijednost će biti jednaka nuli ako i samo ako vrijedi $b^2 + 6\cdot b - 16 = 0$. Odredimo strogo negativno rješenje te jednadžbe (jer prema zahtjevu zadatka mora biti $b < 0$):

$$b = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot(-16)}}{2\cdot 1} = \frac{-6 - \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 - \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 - 10}{2} = -\frac{16}{2} = -8.$$

Uvrstimo $b = -8$ u izraz $5\cdot x^2 + (4\cdot b + 2)\cdot x + b^2 + 2\cdot b - 3 = 0$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
&5\cdot x^2 + \left[4\cdot(-8) + 2\right]\cdot x + (-8)^2 + 2\cdot(-8) - 3 = 0,\\
&5\cdot x^2 - 30\cdot x + 64 - 16 - 3 = 0,\\
&5\cdot x^2 - 30\cdot x + 45 = 0, \quad /:5\\
&x^2 - 6\cdot x + 9 = 0,\\
&(x-3)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Jedino rješenje ove jednadžbe je $x = 3$. U jednadžbu pravca $y = 2 \cdot x + b$ uvrstimo $x = 3$ i $b = -8$, pa dobivamo:

$$y = 2 \cdot 3 + (-8) = 6 - 8 = -2.$$

Dakle, tražena točka dodira je točka $S = (3, -2)$.

4.) $20 + 10 \cdot \sqrt{3}$**.** Odredimo najprije vrijednost a^2. U jednadžbu elipse uvrstimo $x = 8$ i $y = 3$, pa dobivamo:

$$25 \cdot 8^2 + a^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot a^2,$$
$$25 \cdot a^2 - 9 \cdot a^2 = 25 \cdot 64,$$
$$16 \cdot a^2 = 25 \cdot 64.$$

Odatle dijeljenjem sa 16 dobivamo $a^2 = 100$, odnosno $a = 10$. Dakle, jednadžba elipse glasi:

$$25 \cdot x^2 + 100 \cdot y^2 = 25 \cdot 100,$$

odnosno nakon dijeljenja s $25 \cdot 100$,

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Iz ovoga oblika očitamo $b^2 = 25$. Odatle razabiremo da je duljina male poluosi jednaka $b = 5$. To znači da su tjemena elipse na osi ordinata točke $T_1 = (0, -5)$ i $T_2 = (0, 5)$. Zbog simetrije elipse svejedno je koje od tih dvaju tjemena odaberemo, pa odaberimo npr. tjeme $T_2 = (0, 5)$.

Odredimo linearni ekscentricitet elipse (oznaka: e). On je jednak:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}.$$

Traženi opseg trokuta dobijemo tako da razmaku između žarišta elipse pribrojimo zbroj udaljenosti tjemena T_2 od obaju žarišta elipse. Razmak između žarišta elipse jednak je $2 \cdot e$. Točka T_2 pripada elipsi pa je, prema definiciji elipse, zbroj njezinih udaljenosti od žarišta elipse jednak $2 \cdot a$. Tako konačno dobivamo:

$$O = 2 \cdot e + 2 \cdot a = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 10 = 20 + 10 \cdot \sqrt{3} \text{ jediničnih duljina.}$$

30. (2, 6, 18, 30) i (32, 16, 8, 0). Označimo traženu četvorku brojeva s (a, b, c, d). Pišemo je kao uređenu četvorku jer je bitno koji broj je prvi, koji drugi itd. Iz podatka da prva tri broja čine geometrijski niz zaključujemo da vrijedi jednakost

$$b^2 = a \cdot c \ .$$

Iz podatka da posljednja tri broja čine aritmetički niz zaključujemo da vrijedi jednakost

$$2 \cdot c = b + d.$$

Iz podatka da je zbroj prvoga i četvrtoga broja jednak 32 zaključujemo da vrijedi jednakost

$$a + d = 32.$$

Naposljetku, iz podatka da je zbroj drugoga i trećega broja jednak 24 zaključujemo da vrijedi jednakost

$$b + c = 24.$$

Tako smo dobili sustav četiriju jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c, \\ 2 \cdot c = b + d, \\ a + d = 32, \\ b + c = 24. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Zbrojimo drugu, treću i četvrtu jednadžbu, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} &2 \cdot c + a + d + b + c = b + d + 32 + 24, \\ &a + 3 \cdot c = 56, \\ &a = 56 - 3 \cdot c. \end{aligned}$$

Iz četvrte jednadžbe izrazimo nepoznanicu b:

$$b = 24 - c.$$

U prvu jednadžbu sustava uvrstimo jednakosti $a = 56 - 3 \cdot c$ i $b = 24 - c$. Dobijemo:

$$\begin{aligned} &(24 - c)^2 = (56 - 3 \cdot c) \cdot c, \\ &576 - 48 \cdot c + c^2 = 56 \cdot c - 3 \cdot c^2, \\ &576 - 48 \cdot c + c^2 - 56 \cdot c + 3 \cdot c^2 = 0, \\ &4 \cdot c^2 - 104 \cdot c + 576 = 0, \quad / : 4 \\ &c^2 - 26 \cdot c + 144 = 0, \\ &c_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 576}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{26 \pm 10}{2}, \\ &c_1 = \frac{26 + 10}{2} = \frac{36}{2} = 18, \; c_2 = \frac{26 - 10}{2} = \frac{16}{2} = 8. \end{aligned}$$

Uvrstimo li $c = 18$ u jednakosti $a = 56 - 3 \cdot c$ i $b = 24 - c$, dobit ćemo $a = 2$ i $b = 6$. Potom iz $a + d = 32$ slijedi $d = 30$. Dakle, u ovom slučaju dobivamo uređenu četvorku (2, 6, 18, 30).

Uvrstimo li $c = 8$ u jednakosti $a = 56 - 3 \cdot c$ i $b = 24 - c$, dobit ćemo $a = 32$ i $b = 16$. Potom iz $a + d = 32$ slijedi $d = 0$. Stoga u ovom slučaju dobivamo uređenu četvorku (32, 16, 8, 0).

Prema tome, sva rješenja zadatka su uređene četvorke (2, 6, 18, 30) i (32, 16, 8, 0).

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač