Bojan Kovačić

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA GRUPNIH KONZULTACIJA IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

nerecenzirana verzija

Zagreb, siječanj 2018.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka u cijelosti obuhvaća gradivo predmeta *Vjerojatnost i statistika* koje se predaje na 2. godini preddiplomskoga stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Nastala je na temelju zadataka rješavanih na grupnim konzultacijama koje sam tijekom nekoliko akademskih godina držao svim zainteresiranim studentima. Zbog toga se može reći da je (doslovno) svaki zadatak u ovoj zbirci „akademski ispitan“ na studentima – slušačima navedenoga predmeta.

Upravo na temelju pitanja, primjedbi i komentara studenata, od kojih se posebno izdvajaju izvanredni studenti, napisano je poglavlje zbirke koje obuhvaća detaljna rješenja zadataka. To poglavlje je namjerno dano kao zasebna cjelina jer se preporučuje da svaki zainteresirani student najprije pokuša samostalno riješiti svaki postavljeni zadatak. U tu svrhu su uz svaki zadatak navedeni samo konačni rezultati.

Zbirka zadataka *nije* zamišljena kao zamjena za auditorne vježbe, nego kao dopuna tim vježbama. Sadašnja satnica predmeta *Vjerojatnost i statistika* u kojoj je predviđeno (samo) 15 sati auditornih vježbi pokazala se nedovoljnom za kvalitetnu pripremu polaganja ispita. „Problemski“ matematički zadaci i inače predstavljaju težu ili tešku kategoriju matematičkih zadataka za većinu studenata, pa se nadam da će im ova zbirka – zajedno sa zadacima riješenima na predavanjima i vježbama – značajno pomoći u pripremama za polaganje ispita.

Preporučuje se koristiti ovu zbirku zajedno s *Repetitorijem vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike*. Upravo zato u zbirci nije naveden pregled teorijskih pojmova, definicija i formula potrebnih za rješavanje zadataka. Osim što bi takav pregled doveo do (uvjeren sam, nepotrebnoga) povećanja opsega zbirke, drugi osnovni razlog za ovakvu odluku jest dozvoljenost *Repetitorija vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike* kao pomagala pri polaganju pismenoga ispita. Zbog toga smatram vrlo primjerenim da se zadaci rješavaju uz korištenje navedenoga *Repetitorija* (…) i na taj način svojevrsno „simulira“ polaganje pismenoga ispita.

Ugodna mi je dužnost zahvaliti svima koji su na bilo koji način doprinijeli stvaranju ove zbirke. To se ponajprije odnosi na cijenjene kolege Luku Marohnića i Mandi Orlić Bachler s kojima sam surađivao na pisanju *Repetitorij vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike*. Posebnu zahvalnost dugujem svojim studentima koji su brojnim pitanjima, primjedbama i komentarima utjecali na povećanje kvalitete teksta.

Svjestan sam da je, unatoč svim naporima, u zbirci „preživio“ određen broj pogrešaka. Svakome tko me upozori na bilo koju od tih pogrešaka unaprijed izražavam zahvalnost.

U Zagrebu, siječnja 2018.

Bojan Kovačić

1. GRUPA ZADATAKA

1. U grupi od 20 studenata ELO TVZ nalazi se točno 8 studenata smjera AiPR, točno 5 studenata smjera KiRT, a ostali studenti su studenti smjera EE. Na slučajan način odabiremo točno 3 studenta. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{$sa svakoga smjera izabran je točno jedan student$\}$;
b) $B = \{$barem jedan izabrani student je student smjera KiRT$\}$

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{14}{57}$; **b)** $P(B) = \frac{137}{228}$.

2. 5 umjetnih plavuša, 6 umjetnih crnki i 7 umjetnih brineta natječe se za Miss Šuplje Lipe. Sve natjecateljice međusobno razlikujemo. Prigodom prvoga predstavljanja žiriju i publici *casting-manager* izbora ih treba poredati na slučajan način. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{$sve umjetne plavuše su poredane jedna do druge$\}$;
b) $B = \{$barem dvije umjetne crnke nisu poredane jedna do druge$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{1}{612}$; **b)** $P(B) = \frac{1427}{1428}$.

3. U skladištu Visoke poslovne škole u Špičkovini nalazi se ukupno 20 različitih računala. Na 60% tih računala instaliran je operativni sustav *Windows* 10. Na slučajan način izabiremo 8 računala. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{$na točno polovici izabranih računala je instaliran *Windows* 10$\}$;
b) $B = \{$na barem jednom izabranom računalu nije instaliran *Windows* 10$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{1155}{4199}$; **b)** $P(B) = \frac{8365}{8398}$.

4. Za usmeni ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* Karlo je morao naučiti točno odgovoriti na 15 različitih pitanja. Međutim, naučio je točno odgovoriti na svega 7 pitanja. Za pozitivnu je ocjenu potrebno točno odgovoriti na barem 5 od 10 postavljenih pitanja. Izračunajte vjerojatnost da će Karlo uspjeti položiti ispit.

Rezultat: $p = \frac{82}{143}$.

5. U kružnicu je upisan kvadrat, a u taj kvadrat je upisana kružnica. Izračunajte vjerojatnost da će slučajno odabrana točka kruga omeđenoga većom kružnicom pripadati krugu omeđenom manjom kružnicom.

Rezultat: $p = \frac{1}{2}$.

6. Od konopca duljine 2 metra na slučajan način napravimo pravokutnik. Izračunajte vjerojatnost da je površina toga pravokutnika jednaka ili veća od 1600 cm^2.

Rezultat: $p = \frac{9}{25}$.

7. Na jesenkom ispitnom roku Veleučilišta u Gaćelezima ispitanici su mogli polagati točno dva predmeta: *Matematiku* i *Osnove elektrotehnike*. Nakon održanih ispita, utvrđeno je da 70% svih ispitanika nije položilo *Matematiku*, 60% svih ispitanika nije položilo *Osnove elektrotehnike*, a 40% svih ispitanika nije položilo nijedan od navedenih dvaju predmeta. Na slučajan način biramo jednoga ispitanika. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = {ako ispitanik nije položio *Matematiku*, onda nije položio *Osnove elektrotehnike*};
b) B = {ako ispitanik nije položio *Osnove elektrotehnike*, onda nije položio *Matematiku*};
c) C = {ispitanik je položio oba predmeta}.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{4}{7}$; **b)** $P(B) = \frac{2}{3}$; **c)** $P(C) = \frac{1}{10}$.

8. 60% svih poštanskih pošiljaka otprema se vlakom, 25% poštanskim kombijima, dok se sve preostale pošiljke otpremaju zrakoplovom. Udjeli paketa u tim vrstama pošiljaka su redom 70%, 40% i 30%. Na slučajan je način izabrana jedna pošiljka.

a) Izračunajte vjerojatnost da je izabrana pošiljka paket.
b) Ako je izabrana pošiljka paket, izračunajte vjerojatnost da je taj paket stigao zrakoplovom.

Rezultati: **a)** $p_1 = \frac{113}{200}$; **b)** $p_2 = \frac{9}{113}$.

9. U tvrtki *Samo za moj džep* d.d. iz Djedine Rijeke 10% zaposlenika ima magisterij znanosti, 30% zaposlenika ima visoku stručnu spremu, a svi ostali zaposlenici imaju srednju stručnu spremu. Vjerojatnost da će zaposlenik koji ima magisterij znanosti raditi u toj tvrtki barem 5 godina iznosi 20%. Analogne vjerojatnosti za zaposlenike

sa visokom, odnosno srednjom stručnom spremom iznose 40% i 70%. Na slučajan način biramo jednoga zaposlenika.

a) Izračunajte vjerojatnost da izabrani zaposlenik u tvrtki radi barem 5 godina.
b) Ako izabrani zaposlenik radi u tvrtki barem 5 godina, izračunajte vjerojatnost da taj zaposlenik ima visoku stručnu spremu.

Rezultati: **a)** $p_1 = \frac{14}{25}$; **b)** $p_2 = \frac{3}{14}$.

10. Prateći ispravnost rada točno 10 osobnih računala u računalnoj učionici Veleučilišta u Babinoj Gredi, sistem-administrator Miroslav je utvrdio da vjerojatnost „pada“ operativnoga sustava na svakom računalu tijekom jednoga radnoga dana iznosi 0.6. Operativni sustavi „padaju“ slučajno i nezavisno. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A = \{$u slučajno izabranom radnom danu operativni sustav „pada“ na barem jednom računalu$\}$.
b) $B = \{$u slučajno izabranom radnom danu operativni sustav nije „pao“ na najviše jednom računalu$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{9\,764\,601}{9\,765\,625}$; **b)** $P(B) = \frac{452\,709}{9\,765\,625}$.

2. GRUPA ZADATAKA

1. U nekom skladištu računala utvrdili su da je broj ispravnih računala trostruko veći od broja neispravnih računala. Ako se na slučajan način izaberu dva računala, vjerojatnost da će barem jedno od njih biti neispravno iznosi $\frac{17}{38}$. Koliko ukupno računala ima u skladištu?

Rezultat: 20 računala.

2. (*problem rođendana*) U grupi se nalazi ukupno 24 studenta. Izračunajte vjerojatnost da među njima postoji najmanje dvoje studenata rođenih na isti datum (ne nužno iste godine). Pretpostavite da godina ima točno 365 dana.

Rezultat: $p \approx 0.53834$.

3. Pripremajući se za usmeni ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* Marko je naučio odgovore na točno 15 od ukupno 25 pitanja. Na usmenom ispitu nastavnik postavlja točno tri pitanja (od njih ukupno 25). Usmeni ispit je položen ako student zna točno odgovoriti na barem dva postavljena pitanja. Izračunajte vjerojatnost da Marko neće položiti usmeni ispit.

Rezultat: $p = \frac{159}{460} \approx 0.345652$.

4. Na izvanrednom ispitnom roku moguće je polagati točno jedan ispit. Poznato je da 40% studenata izabire *Osnove elektrotehnike*, 30% studenata *Matematiku*, a svi ostali studenti *Fiziku*. Prolaznost iz *Osnova elektrotehnike* 1 iznosi 20%, iz *Matematike* 30%, a iz *Fizike* 40%.

a) Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani student položio svoj izabrani ispit.

b) Ako znamo da je slučajno odabrani student položio svoj izabrani ispit, izračunajte vjerojatnost da je taj student položio *Matematiku*.

Rezultati: **a)** $p_1 = \frac{29}{100} = 0.29$; **b)** $p_2 = \frac{9}{29} \approx 0.31034$.

5. Preparat protiv ćelavosti „*Ćelotonic*“ proizvode tri tvornice smještene u Babinoj Gredi, Banovoj Jaruzi i Generalskom Stolu. Tvornica u Babinoj Gredi proizvodi dvostruko više preparata od tvornice u Banovoj Jaruzi, a za 30% više preparata od tvornice u Generalskom Stolu. Statistički pokazatelji pokazuju da je neispravno 2%

preparata iz tvornice u Babinoj Gredi, 3% preparata iz tvornice u Banovoj Jaruzi i 2.5% preparata iz tvornice u Generalskom Stolu. U nekom se skladištu nalaze preparati iz svih triju tvornica i na slučajan način bira se jedan preparat.

a) Izračunajte vjerojatnost da je slučajno izabrani preparat neispravan.
b) Ako znamo da je slučajno izabrani preparat neispravan, izračunajte vjerojatnost da ga je proizvela tvornica iz Banove Jaruge.

Rezultati: **a)** $p_1 = \frac{36}{1475} \approx 0.02441$; **b)** $p_2 = \frac{13}{48} \approx 0.27083$.

6. Mirela želi stići u zračnu luku korištenjem taxi-prijevoza. Na raspolaganju su joj tri prijevozne tvrtke: *Cammeleo*, *Mobitaxi* i *Uber alles*. Mirelini statistički podaci pokazuju da je od ukupno 20 vožnji prema zračnoj luci 8 puta koristila vozila *Cammelea*, 7 puta vozila *Mobitaxija*, a vozila *Uber allesa* u svim ostalim vožnjama. Iskustva putnika objavljena na Facebook stranici *Taxi naš svagdašnji* tvrde da vozilo *Cammelea* stigne pravovremeno u 85% slučajeva, vozilo *Mobitaxija* u 75% slučajeva, a vozilo *Uber alles* u 90% slučajeva. Na slučajan način izabiremo jednu Mirelinu vožnju.

a) Izračunajte vjerojatnost da je u toj vožnji Mirela nepravovremeno stigla u zračnu luku.
b) Ako je u toj vožnji Mirela pravovremeno stigla u zračnu luku, izračunajte vjerojatnost da je pritom koristila vozilo *Cammelea*.

Rezultati: **a)** $p_1 = \frac{69}{400} = 0.1725$; **b)** $p_2 = \frac{136}{331} \approx 0.41088$.

7. Dva cruisera trebaju uploviti u luku na Mulinama. Zbog tehničkih preduvjeta, jedan cruiser smije uploviti u luku ako i samo ako se u njoj ne nalazi drugi cruiser. Vrijeme dolaska svakoga cruisera je slučajan trenutak u toku jednoga dana. Vrijeme zadržavanja prvoga cruisera je dva sata, a drugoga cruisera tri sata. Izračunajte vjerojatnost da će jedan od tih cruisera morati čekati da drugi cruiser napusti luku.

Rezultat: $p = \frac{227}{1152}$.

8. Zadan je jednakokračan trokut kojemu je duljina osnovice 16 cm, dok su krakovi duljine 10 cm. Na slučajan način izabiremo jednu točku unutar trokuta. Izračunajte vjerojatnost da ta točka ne pripada krugu kojega omeđuje trokutu upisana kružnica.

Rezultat: $p = 1 - \frac{4}{27} \cdot \pi \approx 0.53458$.

9. Krug u igri *Kolo sreće* podijeljen je na četiri kružna isječka: 1, 2, 3 i 4 tako da za svaki $i = 1,\ 2,\ 3,$ kružni isječak i ima dvostruko manju površinu od isječka $i+1$. Izračunajte vjerojatnost da se kazaljka zaustavi na „neparnu“ isječku (tj. isječku kojemu pripada neparan broj).

Rezultat: $p = \frac{1}{3}$.

10. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka kocke pripada toj kocki upisanoj:

a) sferi;
b) kugli.

Rezultati: **a)** $p = 0$; **b)** $p = \frac{\pi}{6}$.

3. GRUPA ZADATAKA

1. Živeći skladno u dugom i sretnom braku, Kate je doživjela 80 godina, a njezin suprug William 85 godina. Obiteljski genetičar Harry izračunao je da vjerojatnost da će Kate živjeti još najmanje 10 godina iznosi 30%, dok vjerojatnost da će William živjeti još najmanje 10 godina iznosi 25%. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A = \{$barem jedno od njih dvoje biti živ nakon sljedećih 10 godina$\}$;
b) $B = \{$samo Kate će biti živa nakon sljedećih 10 godina$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{19}{40} = 0.475$, **b)** $P(B) = \frac{9}{40} = 0.225$.

2. Nikola Vlašić, Mario Gavranović i Luka Modrić nezavisno izvode točno jedan slobodan udarac prema golu Dantea Stipice. Vjerojatnosti postizanja zgoditka iznose redom 60%, 70% i 50%. Izračunajte vjerojatnost da točno jedan od njih postigne zgoditak.

Rezultat: $p = \frac{1}{4} = 0.25$.

3. Administrator Miroslav nadgleda rad triju međusobno nezavisnih poslužitelja. Vjerojatnosti da u tijeku jednoga dana neće biti potrebe za intervencijom na pojedinom poslužitelju iznose redom 90%, 85% i 80%. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{$bit će potrebna intervencija na točno jednom poslužitelju$\}$;
b) $B = \{$ni na jednom poslužitelju neće biti potrebna intervencija$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{329}{1000} = 0.329$; **b)** $P(B) = \frac{153}{250} = 0.612$.

4. Dario Šarić izvodi slobodna bacanja nezavisno jedno za drugim. Vjerojatnost ubačaja u koš za svako pojedino slobodno bacanje iznosi 75%. Koliko najmanje slobodnih bacanja treba izvesti Dario tako da vjerojatnost ubačaja barem jednoga koša bude najmanje 99%?

Rezultat: $n = 4$.

5. Bojan Bogdanović i Kruno Simon nezavisno gađaju „trice“. Vjerojatnost da Bojan pogodi „tricu“ iznosi 70%, a vjerojatnost da Kruno pogodi „tricu“ iznosi 60%. Bojan smije uputiti točno dva šuta prema košu. Koliko najmanje šuteva treba uputiti Kruno tako da vjerojatnost ubačaja barem jedne „trice“ bude najmanje 99%?

Rezultat: $n = 3$.

6. Ivan Rakitić nezavisno izvodi ukupno 6 slobodnih udaraca prema golu Manuela Neuera s vjerojatnošću postizanja zgoditka od 40%. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{$Ivan Rakitić će postići točno tri zgoditka$\}$;
b) $B = \{$Ivan Rakitić će postići barem dva zgoditka$\}$;
c) $C = \{$Ivan Rakitić neće postići nijedan zgoditak$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{864}{3125} \approx 0.27648$; **b)** $P(B) = \frac{2396}{3125} \approx 0.76672$, **c)** $P(C) = \frac{729}{15625} \approx 0.04666$.

7. U doigravanju NBA lige sastaju se košarkaši Miami Heata i Indiana Pacersa. Potrebno je odigrati onoliko utakmica sve dok točno jedna momčad ne ostvari četiri pobjede. Svaka utakmica mora završiti pobjedom jedne momčadi (tj. nema neriješenoga ishoda). Kladioničari prognoziraju da vjerojatnost pobjede Miami Heata u svakoj utakmici iznosi 55%. Sve utakmice su međusobno nezavisne i „nenamještene“. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

1. $A = \{$Miami Heat će pobijediti u doigravanju$\}$;
2. $B = \{$Indiana Pacersi neće pobijediti ni u jednoj utakmici$\}$;
3. $C = \{$Miami Heat će pobijediti u točno dvije utakmice$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) \approx 0.86719$; **b)** $P(B) \approx 0.09151$; **c)** $P(C) \approx 0.18607$.

8. Karlo se priprema za polaganje ispita iz *Elektroničkih strojeva*. Vjerojatnost da Karlo položi ispit jednaka je udjelu gradiva koje je naučio u odnosu na ukupno gradivo predmeta. Udio gradiva koje je Karlo naučio ne ovisi o broju izlaska na ispit. Polaganja ispita su međusobno nezavisni događaji.

a) Pretpostavimo da Karlo pri svakom izlasku na ispit nauči 40% gradiva. Koliko bi najmanje puta Karlo trebao polagati ispit tako da se s vjerojatnošću od najmanje 90% može tvrditi da je položio ispit?

b) Koliki dio ukupnoga gradiva bi Karlo trebao naučiti pri svakom izlasku na ispit tako da vjerojatnost da će ispit položiti najkasnije iz trećega pokušaja bude najmanje 90%? (Iskažite rješenje u postotcima.)

Rezultati: **a)** $n = 5$ puta; **b)** $x = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \approx 53.584\%$.

9. Ispit se sastoji od 10 pitanja. Uz svako pitanje navedena su točno četiri odgovora, od kojih je samo jedan točan. Ispitanik je položio ispit ako je točno odgovorio na barem polovicu svih postavljenih pitanja. Nevesinko nije naučio ispitno gradivo, pa uz svako pitanje slučajno i nezavisno zaokružuje točno jedan od ponuđenih odgovora. (Zaokruženi odgovor na svako pitanje ne zavisi ni o jednom od prethodnih odgovora.) Izračunajte vjerojatnost da će Nevesinko uspjeti položiti ispit.

Rezultat: $p = \frac{40961}{524288} \approx 0.07813.$

4. GRUPA ZADATAKA

1. Na uzorku od 50 slučajno izabranih studenata Veleučilišta u Djedinoj Rijeci 27.11.2017. provedeno je anketiranje o broju članova domaćinstva. Dobiveni su sljedeći podaci.

Broj članova	3	4	5	6	7	8	*Ukupno*
Broj studenata	5	12	20	8	3	2	50

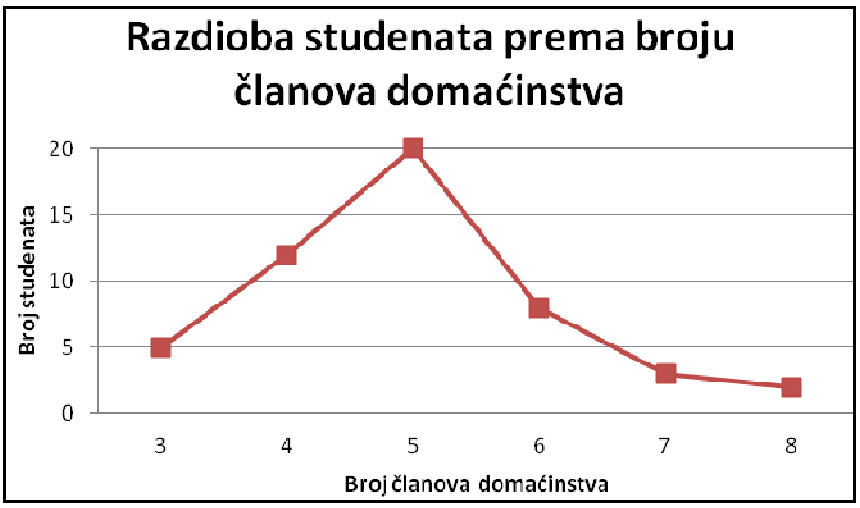
Tablica 1. Razdioba studenata prema broju članova domaćinstva

Izračunajte sljedeće statističke pokazatelje i objasnite njihovo značenje:

a) aritmetička sredina;
b) prvi (donji) kvartil;
c) medijan;
d) treći (gornji) kvartil;
e) mod;
f) raspon varijacije;
g) interkvartil;
h) standardna devijacija;
i) koeficijent kvartilne devijacije;
j) koeficijent varijacije.

Potom prikažite zadanu razdiobu poligonom frekvencija.

Rezultati: **a)** $\bar{x} = 4.96 \approx 5$; **b)** $Q_1 = 4$; **c)** $Me = Q_2 = 5$; **d)** $Q_3 = 6$; **e)** $Mo = 5$; **f)** $R = 5$; **g)** $I_q = 2$; **h)** $\sigma \approx 1.18254$; **i)** $V_Q = 0.2$; **j)** $V \approx 23.842\%$.



Slika 1.

2. Na uzorku od 60 slučajno izabranih studenata 2. godine Veleučilišta u Svrzigaćama 27.11.2017. provedeno je anketiranje o ukupnom broju predmeta iz kojih su ocijenjeni ocjenom izvrstan(5) . Dobiveni su sljedeći podaci.

Broj predmeta	2	3	4	5	7	10	*Ukupno*
Broj studenata	4	6	8	20	12	10	60

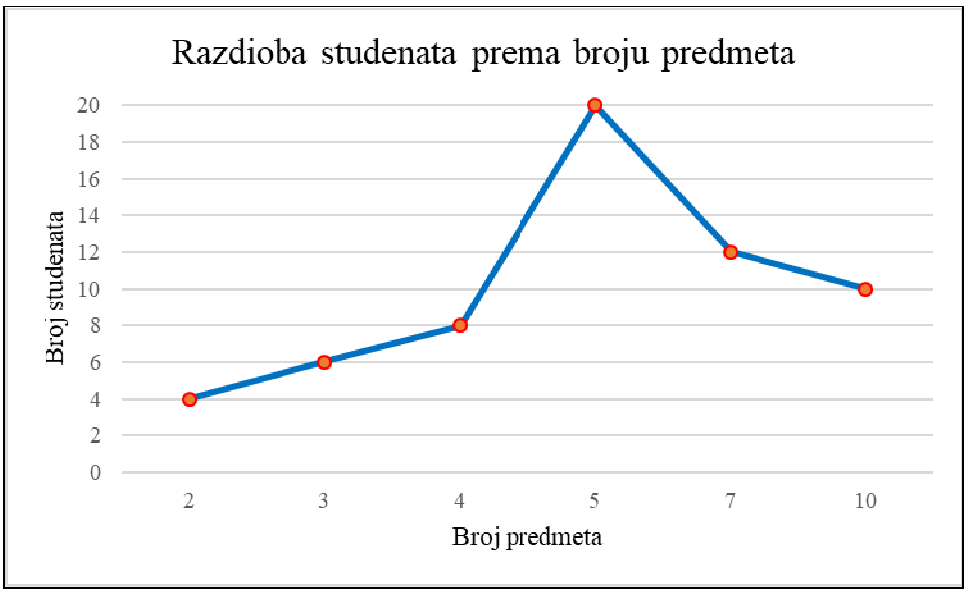
Tablica 2. Razdioba studenata prema broju predmeta.

Izračunajte sljedeće statističke pokazatelje i objasnite njihovo značenje:

a) aritmetička sredina;
b) prvi (donji) kvartil;
c) medijan;
d) treći (gornji) kvartil;
e) mod;
f) raspon varijacije;
g) interkvartil;
h) standardna devijacija;
i) koeficijent kvartilne devijacije;
j) koeficijent varijacije.

Potom prikažite zadanu razdiobu poligonom frekvencija.

Rezultati: **a)** $\bar{x} = 5.7 \approx 6$; **b)** $Q_1 = 4$; **c)** $Me = Q_2 = 5$; **d)** $Q_3 = 7$; **e)** $Mo = 5$; **f)** $R = 8$; **g)** $I_q = 3$; **h)** $\sigma \approx 2.36854$; **i)** $V_Q \approx 0.27273$; **j)** $V \approx 41.553\%$.



Slika 2.

3. Na uzorku od 100 slučajno izabranih studenata Visoke škole za primijenjeni menadžment u Piškorevcima 27.11.2017. provedena je anketa o ukupnom broju prijatelja koje imaju na Facebooku. Dobiveni su sljedeći podaci.

Broj prijatelja	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 – (100)	*Ukupno*
Broj studenata	5	10	10	20	25	30	100

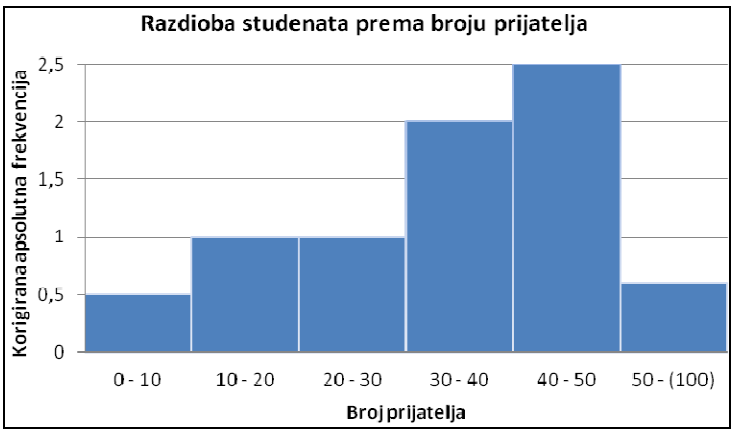
Tablica 3. Razdioba studenata prema broju prijatelja na Facebooku.

Izračunajte sljedeće statističke pokazatelje i objasnite njihovo značenje:

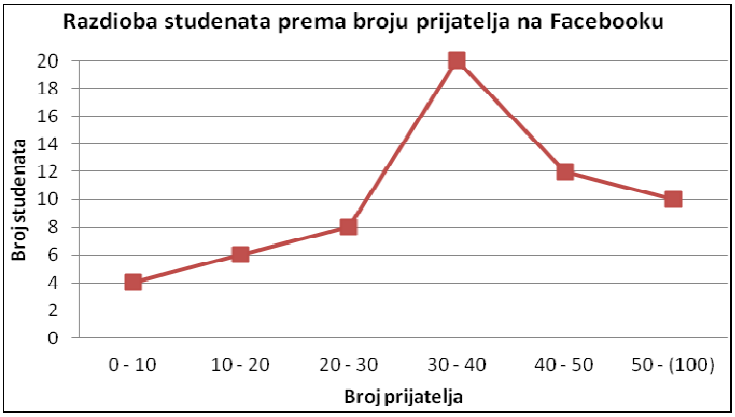
a) aritmetička sredina;
b) standardna devijacija;
c) koeficijent varijacije.

Potom prikažite zadanu razdiobu histogramom i poligonom frekvencija.

Rezultati: **a)** $\bar{x} = 45$; **b)** $\sigma \approx 22.36068$; **c)** $V \approx 49.69\%$.



Slika 3.



Slika 4.

4. Na uzorku od 80 slučajno izabranih studenata Visoke poslovne škole u Ripištu 27.11.2017. provedena je anketa o ukupnom broju slavnih osoba (hrvatski: *celebrityja*) koje studenti prate na Instagramu. Dobiveni su sljedeći podaci.

Broj celebrityja	0 - 30	30 - 50	50 - 60	60 - 80	80 – 100	100 – (200)	*Ukupno*
Broj studenata	4	16	24	12	16	8	80

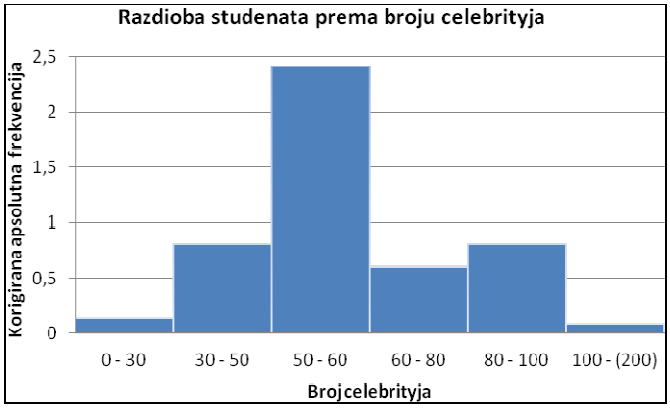
Tablica 4. Razdioba studenata prema broju slavnih osoba koje prate na Instagramu

Izračunajte sljedeće statističke pokazatelje i objasnite njihovo značenje:

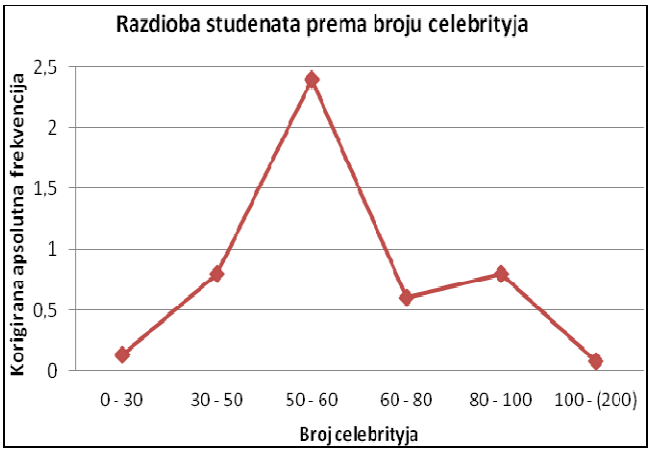
a) aritmetička sredina;
b) standardna devijacija;
c) koeficijent varijacije.

Potom prikažite zadanu razdiobu histogramom i poligonom frekvencija.

Rezultati: **a)** $\bar{x} = 68.75 \approx 69$; **b)** $\sigma \approx 33.42436$; **c)** $V \approx 48.617\%$



Slika 5.



Slika 6.

5. GRUPA ZADATAKA

Napomena: U zadacima 1. – 5. pretpostavite da se radi o binomnoj razdiobi, a u zadacima 6. – 12. pretpostavite da se radi o Poissonovoj razdiobi.

1. U Poreznoj upravi Frkljevci ukupno 10 poreznih obveznika treba predati poreznu prijavu. Na temelju podataka iz prethodnih godina utvrđeno je da u prosjeku jedna od pet poreznih prijava nije ispravno ispunjena. Izračunajte:

a) očekivani broj neispravno ispunjenih poreznih prijava;
b) vjerojatnost da će sve porezne prijave biti ispravno ispunjene;
c) vjerojatnost da će više od polovice poreznih prijava biti ispravno ispunjeno.

Rezultati: **a)** $m = 2$, **b)** $p \approx 0.10737$; **c)** $p \approx 0.96721$.

2. U tvornici električnih žarulja *I bi svjetlo* iz Podbablja utvrdili su da se prosječno proizvede 5% neispravnih žarulja. Na slučajan način izabire se točno 100 uzoraka od kojih svaki sadrži 20 žarulja. Izračunajte:

a) očekivani ukupan broj uzoraka bez ijedne neispravne žarulje;
b) vjerojatnost da slučajno odabrani uzorak sadrži barem dvije neispravne žarulje.

Rezultati: **a)** $m \approx 36$; **b)** $p \approx 0.26416$.

3. U tvornici čokolade *Mljac–mljac* iz Čečavca uočili su da je 1% proizvedenih čokoladnih pločica škartirano (npr. pločica ima manju masu od propisane). Koliko najmanje čokoladnih pločica treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave barem jedne škartirane pločice bude strogo veća od 90%?

Rezultat: $n = 230$.

4. Vjerojatnost pojave smetnji na DVB–T prijemniku unutar slučajno odabranoga sata iznosi 2%. Izračunajte:

a) vjerojatnost da se smetnje pojave točno jednom unutar 8 uzastopnih sati;
b) očekivani broj pojava smetnji tijekom jednoga mjeseca (= 30 dana).

Rezultati: **a)** $p \approx 0.1389$; **b)** $m \approx 14$.

5. Statistički podaci pokazuju da 45% darivatelja krvi ima krvnu grupu 0. Na slučajan način odabran je uzorak od 50 darivatelja krvi. Izračunajte:

a) očekivani broj darivatelja s krvnom grupom 0 u odabranom uzorku;
b) vjerojatnost da u odabranom uzorku nema nijednoga darivatelja s krvnom grupom 0.

Rezultati: **a)** $m \approx 23$; **b)** $p \approx 1.04264 \cdot 10^{-13}$.

6. Tvornica alkoholnih pića *Čokanjčić* iz Šljivovca proizvodi rakiju. Uočeno je da 0.05% boca rakije ima volumni udio alkohola manji od deklariranoga. Na slučajan način izabran je uzorak od 10 000 boca. Izračunajte:

a) očekivani broj boca rakije s manjim volumnim udjelom alkohola u tom uzorku;
b) vjerojatnost da uzorak sadrži barem 6 boca s manjim volumnim udjelom alkohola.

Rezultati: **a)** $m = 5$; **b)** $p_1 \approx 0.38404$.

7. Vjerojatnost pojave kratkoga zastoja pri dnevnom emitiranju signala odašiljača iznosi 3%. Uz pretpostavku da jedan mjesec ima 30 dana, izračunajte:

a) očekivani godišnji broj pojava kratkoga zastoja;
b) vjerojatnost pojave kratkoga zastoja najviše triput godišnje.

Rezultati: **a)** $m \approx 11$; **b)** $p_3 \approx 0.00571$.

8. Kroz naplatnu kućicu na autocesti Dugopolje – Šestanovac dnevno prođu prosječno dva automobila. Uz pretpostavku da jedan mjesec ima 30 dana, izračunajte:

a) očekivani godišnji broj automobila koji će proći kroz navedenu naplatnu kućicu;
b) vjerojatnost da u slučajno odabranom danu kroz naplatnu kućicu neće proći nijedan automobil.

Rezultati: **a)** $m = 720$; **b)** $p = \frac{1}{e^2} \approx 0.13534$.

9. Agent životnoga osiguranja tjedno proda prosječno dvije police životnoga osiguranja. Izračunajte vjerojatnost da će u slučajno odabranom tjednu agent prodati:

a) barem jednu policu životnoga osiguranja;
b) barem dvije, ali najviše pet polica životnoga osiguranja;
c) jednu policu životnoga osiguranja u slučajno odabranom danu toga tjedna. (Pretpostavljamo da tjedan ima točno pet radnih dana.)

Rezultati: **a)** $p_1 = 1 - e^{-2} \approx 0.86466$; **b)** $p_2 = \dfrac{64}{15 \cdot e^2} \approx 0.57743$; **c)** $p_3 = \dfrac{2}{5 \cdot e^{0.4}} \approx 0.26813$.

10. U tvornici keksa *Keksić* iz Crnoga Dabra uočili su da se proizvodi 0.5% pakiranja keksa s masom strogo manjom od deklarirane. Koliko najmanje pakovanja keksa treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave barem jednoga pakovanja čija je masa strogo manja od deklarirane bude strogo veća od 50%?

Rezultat: $n = 139$.

11. U tvornici mesnih prerađevina *Jegerčić* iz Kobasičara uočili su da se proizvodi 1% pakiranja hrenovki s masom strogo manjom od deklarirane. Koliko najmanje pakiranja hrenovki treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave barem dva pakovanja čija je masa strogo manja od deklarirane bude strogo veća od 30%?

Rezultat: $n = 110$.

12. Očekivani broj telefonskih poziva koje u jednoj minuti primi recepcija hotela *Svakoga gosta tri dana dosta* je jednak 3. Pretpostavimo da su brojevi poziva koje recepcija primi u dvije različite minute međusobno nezavisni. Izračunajte vjerojatnost da će u te dvije različite minute recepcija primiti najmanje dva poziva.

Rezultat: $p = 1 - \dfrac{7}{e^6} \approx 0.98265$.

6. GRUPA ZADATAKA

1. Na raspolaganju imamo četiri žarulje čije snage redom iznose 40 W, 60 W, 75 W i 100 W. Na slučajan način izabiremo jednu žarulju. Vjerojatnosti izbora žarulja upravno su razmjerne snagama žarulja. Neka je X slučajna varijabla koja označava snagu žarulje.

a) Napišite zakon razdiobe varijable X.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable X.

Rezultati: **a)** $X \sim \begin{pmatrix} 40 & 60 & 75 & 100 \\ \frac{8}{55} & \frac{12}{55} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$, **b)** $E(X) = \frac{833}{11} \approx 75.73,\ \sigma(X) = \frac{6}{11} \cdot \sqrt{1526} \approx 21.31.$

2. Četiri tajnice – Brunhilda, Gertruda, Maruška i Vjekoslava – mogu pretipkati poslovni dopis redom za 2 minute, 3 minute, 4 minute i 5 minuta. Vjerojatnost izbora pojedine tajnice obrnuto je razmjerna vremenu pretipkavanja dopisa. Na slučajan način izabire se jedna tajnica. Neka je Y slučajna varijabla koja označava vrijeme pretipkavanja dopisa.

a) Napišite zakon razdiobe varijable Y.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable Y.

Rezultati: **a)** $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{30}{77} & \frac{20}{77} & \frac{15}{77} & \frac{12}{77} \end{pmatrix}$; **b)** $E(Y) = \frac{240}{77} \approx 3.12,\ \sigma(Y) = \frac{2}{77} \cdot \sqrt{1770} \approx 1.09276$.

3. Neka je Z slučajna varijabla koja označava prvi broj izvučen u jednom kolu igre LOTO 6/45. Pretpostavimo da su svi elementarni ishodi su jednako vjerojatni.

a) Napišite zakon razdiobe varijable Z.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable Z.

Rezultati: **a)** $Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 44 & 45 \\ \frac{1}{45} & \frac{1}{45} & \frac{1}{45} & \dots & \frac{1}{45} & \frac{1}{45} \end{pmatrix}$; **b)** $E(Z) = 23,\ \sigma(Z) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1518} \approx 13.$

4. U igri TV Bingo izvlači se točno 15 od ukupno 90 brojeva. Pretpostavimo da su kuglice označene prirodnim brojevima od 1 do 90, te da je izvlačenje pravedno. Neka je B slučajna varijabla koja označava prvi broj izvučen u jednom kolu igre TV Bingo.

a) Napišite zakon razdiobe varijable B.

b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable B.

Rezultati: **a)** $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 89 & 90 \\ \frac{1}{90} & \frac{1}{90} & \frac{1}{90} & \dots & \frac{1}{90} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}$; **b)** $E(B) = \frac{91}{2} = 45.5,\ \sigma(B) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{24297} \approx 25.98$.

5. Ivan Rakitić nezavisno izvodi slobodne udarce prema golu Danijela Subašića sve dok ne postigne zgoditak. Vjerojatnost da će Ivan postići zgoditak u jednom udarcu prema golu iznosi 40%. Izračunajte:

a) očekivani broj udaraca prema golu;
b) vjerojatnost da će Ivan uputiti najmanje 4 udarca prema golu.

Rezultati: **a)** $n \approx 3$; **b)** $p = \frac{27}{125}$.

6. Zlatko Horvat nezavisno izvodi sedmerce prema golu Filipa Ivića sve dok ne postigne zgoditak. Vjerojatnost da će Zlatko postići zgoditak u jednom sedmercu iznosi 80%. Izračunajte:

a) očekivani broj udaraca prema golu;
b) vjerojatnost da će Zlatko uputiti najviše tri udarca prema golu.

Rezultati: **a)** $n \approx 1$; **b)** $p = \frac{124}{125}$.

7. Na raspolaganju imamo 40 uzoraka punjivih baterija vrste AAA. U svakom uzorku nalazi se točno 8 baterija. Provjeravamo ima li svaka baterija dimenzije 10.5 mm × 44.5 mm. Ako je barem jedna dimenzija različita od propisane, bateriju proglašavamo neispravnom. Rezultati ispitivanja navedeni su u donjoj tablici.

Broj neispravnih baterija	0	1	2	3	*Ukupno*
Broj uzoraka	15	10	10	5	40

Tablica 5. Podaci za Zadatak 7.

Odredite parametre prilagođene binomne razdiobe koja najbolje opisuje gornje rezultate ispitivanja. Potom izračunajte očekivani broj uzoraka u kojima su sve baterije ispravne.

Rezultati: $X \sim B(81, 0.0139)$, $n_0 \approx 13$.

8. Riješite prethodni zadatak koristeći parametar prilagođene Poissonove razdiobe.

Rezultati: $X \sim Po(1.125)$, $n_0 \approx 13$.

9. Rezultati 1. kolokvija iz *Matematike* na Veleučilištu u Svrzigaćama prikazani su u sljedećoj tablici.

Broj bodova	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	*Ukupno*
Broj studenata	10	77	9	4	100

Tablica 6. Podaci za Zadatak 9.

Odredite parametre prilagođene binomne razdiobe koja najbolje opisuje gornje rezultate kolokvija. Potom izračunajte očekivani broj studenata koji su postigli točno 8 bodova.

Rezultati: $X \sim B(52, 0.12076)$, $n_8 \approx 12$.

10. Za svaki radni dan u studenom 2017. ugledni obiteljski liječnik Flek Trbosjek bilježio je broj pregledanih pacijenata oboljelih od crijevne viroze. Dobio je sljedeću tablicu,

Dnevni broj pregledanih pacijenata	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	*Ukupno*
Broj dana	4	9	6	11	30

Tablica 7. Podaci za Zadatak 10.

Odredite parametar prilagođene Poissonove razdiobe koja najbolje opisuje gornje rezultate. Potom izračunajte očekivani ukupan broj dana u kojima će dnevno biti pregledana točno tri pacijenta koja boluju od crijevne viroze.

Rezultati: $X \sim Po(4)$, $n_3 \approx 6$.

7. GRUPA ZADATAKA

1. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X definirana je pravilom:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-x}{2}, & \text{za } x\in[-1,1],\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

a) Odredite vrijednost realnoga parametra a.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable X.
c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable X. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.
d) Izračunajte $P(0<X<2)$.

Rezultati: **a)** $a=1$; **b)** $E(X)=-\frac{1}{3}$, $\sigma(X)=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}$; **c)** $F(x)=\begin{cases}0, & \text{za } x<-1,\\ -\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}, & \text{za } x\in[-1,1],\\ 1, & \text{za } x>1;\end{cases}$ **d)** $p=\frac{1}{4}$.

2. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable Y definirana je pravilom:

$$f(y)=\begin{cases}a\cdot e^{1-y}, & \text{za } y\geq 1,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

a) Odredite vrijednost realnoga parametra a.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable Y.
c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable Y. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.
d) Izračunajte $P(2\leq Y<3)$.

Rezultati: **a)** $a=1$; **b)** $E(Y)=2$, $\sigma(Y)=1$; **c)** $F(y)=\begin{cases}1-e^{1-y}, & \text{za } y\geq 1,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$ **d)** $P(2\leq Y<3)=\frac{e-1}{e^2}$.

3. Martina i Andrijana svakoga radnoga dana zajedno dolaze na nastavu, a sastaju se na Trgu kralja Tomislava. Martina uvijek dolazi prva i čeka Andrijanu između 10 i 15 minuta. Trenutak Andrijanina dolaska u tom vremenskom intervalu je slučajan. Neka je M jednolika slučajna varijabla koja označava trajanje Martinina čekanja.

a) Odredite funkciju gustoće varijable M.
b) Izračunajte očekivano trajanje Martinina čekanja i pripadnu standardnu devijaciju.

c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable M. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.

d) Izračunajte vjerojatnost da će Martina čekati više od 12, ali manje od 14 minuta.

Rezultati: **a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, \text{ za } x\in[10,15],\\ 0, \text{ inače.}\end{cases}$ **b)** $E(M)=\frac{25}{2}$, $\sigma(M)=\frac{5}{6}\cdot\sqrt{3}$; **c)** $F(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x<10,\\ \frac{1}{5}\cdot x-2, \text{ za } x\in[10,15],\\ 1, \text{ za } x>15.\end{cases}$ **d)** $p=\frac{2}{5}$.

4. Slavica svakoga radnoga dana putuje taksijem na posao. Utvrdila je da vrijeme čekanja od trenutka poziva do trenutka dolaska taksija iznosi najmanje jednu minutu, a najviše pet minuta. Neka je S slučajna varijabla koja označava Slavičino dnevno vrijeme čekanja.

a) Odredite funkciju gustoće varijable S.

b) Izračunajte očekivano vrijeme Slavičina čekanja i pripadnu standardnu devijaciju.

c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable S. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.

d) Izračunajte vjerojatnost da će Slavica čekati taksi najviše tri minute.

Rezultati: **a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, \text{ za } x\in[1,5],\\ 0, \text{ inače.}\end{cases}$ **b)** $E(S)=3$, $\sigma(S)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$; **c)** $F(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x<1,\\ \frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{4}, \text{ za } x\in[1,5],\\ 1, \text{ za } x>5.\end{cases}$ **d)** $P(S\le 3)=\frac{1}{2}$.

11. Na pisač Veleučilišta u Svrzigaćama u prosjeku se upute tri zahtjeva za ispis u jednom satu. Pretpostavimo da je trenutak upućivanja zahtjeva za ispis slučajan. Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla koja označava vrijeme (u satima) između dvaju uzastopnih zahtjeva za ispis. Odredite:

a) očekivano vrijeme proteklo između dva uzastopna zahtjeva za ispis;

b) vjerojatnost da će između dva uzastopna zahtjeva za ispis proći najviše 5 minuta;

c) koliko najmanje, računajući od trenutka upućivanja prvoga zahtjeva, trebamo čekati na drugi zahtjev tako da vjerojatnost upućivanja drugoga zahtjeva u tom vremenu bude barem 90%.

Rezultati: $X\sim Exp(3)$. **a)** $E(X)=20$ minuta; **b)** $p=1-e^{-\frac{1}{4}}\approx 0.2212$; **c)** $t_{\min}=\frac{1}{3}\cdot\ln 10\approx 46$ minuta.

12. Prosječan minutni broj posjetâ internetskoj stranici *Podnevnoga lista* jednak je 2. Pretpostavimo da je trenutak posjete stranici slučajan. Neka je Y eksponencijalna slučajna varijabla koja označava vrijeme (u minutama) između dviju uzastopnih posjeta. Odredite:

a) očekivano trajanje vremena između dvije uzastopne posjete;
b) vjerojatnost da će između dvije uzastopne posjete proći najmanje 40 sekundi;
c) vjerojatnost da će između dvije uzastopne posjete proći najmanje 1 minuta i 40 sekundi ako u prvoj minuti mjerenja (računajući od trenutka prve od tih dviju posjeta) ne bude zabilježena nijedna posjeta.

Rezultati: $X \sim Exp(2)$. **a)** $E(X) = 30$ sekundi; **b)** i **c)** $p = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.264$.

13. Neka je X standardna normalna slučajna varijabla.

a) Odredite $P(X < 0.12)$.
b) Nađite $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \geq x) = 0.1335$.

Rezultati: a) $p = 0.54776$; **b)** $x = 1.11$.

14. Neka je X standardna normalna slučajna varijabla.

a) Odredite $P(X > -0.5)$.
b) Nađite $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \leq x) = 0.02275$

Rezultati: **a)** $p = 0.69146$; **b)** $x = -2$.

15. Neka je $X \sim N(1, 2^2)$.

a) Odredite $P(0.8 \leq X < 1.2)$.
b) Nađite $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \geq x) = 0.02807$.

Rezultati: **a)** $p = 0.07966$; **b)** $x = 4.82$.

16. Neka je $Z_1 \sim N(x, 20^2)$. Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi jednakost $P(Z_1 \leq 10) = 0.15866$.

Rezultat: $x = 30$.

17. Neka je $Z_2 \sim N(60, \sigma^2)$. Odredite $\sigma > 0$ tako da vrijedi jednakost $P(Z_2 > 50) = 0.97725$.

Rezultat: $\sigma = 5$.

18. Prosječna brzina vozila tipa *Ficho* je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje 50 km/h, a standardna devijacija 10 km/h. Izračunajte:

a) vjerojatnost da slučajno odabrano vozilo tipa *Ficho* ima prosječnu brzinu između 45 km/h i 55 km/h;
b) vjerojatnost da slučajno odabrano vozilo tipa *Ficho* ima prosječnu brzinu veću od 60 km/h;
c) vjerojatnost da slučajno odabrano vozilo tipa *Ficho* ima prosječnu brzinu manju od 40 km/h;
d) očekivanu najveću prosječnu brzinu za 90% svih vozila tipa *Ficho*.

Rezultati: **a)** $p_1 = 0.38292$; **b)** i **c)** $p_2 = p_3 = 0.15866$; **d)** $v_{\max} \approx 62.8$ km/h.

19. Ukupan godišnji prihod trgovačkoga lanca *Zumkon* je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje 10 000 000 €, a standardna devijacija 2 000 000 €. Izračunajte:

a) vjerojatnost da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* imati godišnji prihod između 9 000 000 € i 13 000 000 €;
b) vjerojatnost da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* ostvariti godišnji prihod strogo manji od 8 000 000 €;
c) vjerojatnost da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* ostvariti godišnji prihod strogo veći od 15 000 000 €;
d) najveći iznos x takav da se s vjerojatnošću od barem 95% može tvrditi da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* ostvariti prihod strogo veći od x €.

Rezultati: **a)** $p_1 = 0.62645$; **b)** $p_2 = 0.15866$; **c)** $p_3 = 0.06681$; **d)** $x = 6\ 700\ 000$.

8. GRUPA ZADATAKA

1. U trgovini računalom opremom „*Muljažić-commerce* d.o.o.“ uočili su da na svakih 100 primljenih računala postoje prosječno četiri računala s određenim tehničkim nedostatkom. U njihovo skladište upravo je prispjela pošiljka u kojoj je točno 80 računala. Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava broj ispravnih računala u primljenoj pošiljci.

a) Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

I. $A = \{$sva računala u pošiljci su ispravna$\}$;
II. $B = \{$u pošiljci se nalazi točno 77 ispravnih računala$\}$;
III. $C = \{$u pošiljci se nalazi barem 78 ispravnih računala$\}$.

b) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable X.

Rezultati: **a)** $P(A) \approx 0.03817$, $P(B) \approx 0.22684$, $P(C) \approx 0.37479$;
b) $E(X) = \frac{384}{5} = 76.8$, $V(X) = \frac{384}{125} = 3.072$, $\sigma(X) = \frac{8}{25} \cdot \sqrt{30} \approx 1.75271$.

2. U pošiljci od 200 istovrsnih baterija nalazi se točno 40 neispravnih. Na slučajan način je izabran uzorak u kojem se nalazi točno 60 baterija. Neka je Y binomna slučajna varijabla koja označava broj ispravnih baterija u izabranom uzorku.

a) Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

I. $A = \{$sve baterije u uzorku su ispravne$\}$;
II. $B = \{$uzorak sadrži najviše dvije neispravne baterije$\}$.

b) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable Y.

Rezultati: **a)** $P(A) \approx 1.5325 \cdot 10^{-6}$, $P(B) \approx 1.94052 \cdot 10^{-4}$; **b)** $E(Y) = 12$, $V(Y) = \frac{48}{5} = 9.6$, $\sigma(Y) = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{15} \approx 3.09839$.

3. Nekim statističkim istraživanjem utvrđeno je da u ljudskoj populaciji ima 2% ljevaka. Na slučajan način izabiremo uzorak od 100 ljudi. Neka je LJ Poissonova slučajna varijabla koja označava broj ljevaka u uzorku.

a) Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

I. $A = \{$među odabranim ljudima nema niti jednoga ljevaka$\}$;
II. $B = \{$među odabranim ljudima su najmanje tri ljevaka$\}$.

b) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable LJ.

Rezultati: **a)** $P(A)=\frac{1}{e^2}\approx 0.13534,\ P(B)=1-\frac{5}{e^2}\approx 0.32332$; **b)** $E(LJ)=V(LJ)=2,\ \sigma(LJ)=\sqrt{2}\approx 1.41421$.

4. U tvornici čokolade „*Mljac–mljac*“ iz Piškorevaca uočili su da prosječno proizvode 1% „škartnih“ čokolada (tj. čokolada koje imaju vrijednost barem jednoga obilježja (masa, maseni udio kakaa, volumni udio mlijeka i sl.) različitu od standardizirane). U jednom danu proizvedeno je ukupno 300 čokolada. Neka je $\check{C}$ Poissonova slučajna varijabla koja označava broj „škartnih“ čokolada među svim proizvedenima.

a) Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

I. A = {među odabranim čokoladama nema niti jedne „škartne“};

II. B = {među odabranim čokoladama su najviše dvije „škartne“.}.

b) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable $\check{C}$.

Rezultati: **a)** $P(A)=\frac{1}{e^3}\approx 0.04979,\ P(B)=\frac{17}{e^3}\approx 0.84638$. **b)** $E(\check{C})=V(\check{C})=3,\ \sigma(\check{C})=\sqrt{3}\approx 1.73205$.

5. Otpor nekoga otpornika je normalna slučajna varijabla X čije je očekivanje 1 kΩ, a standardna devijacija 20 Ω. Na slučajan način izabiremo jedan otpornik. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = {otpor izabranoga otpornika je strogo manji od 990 Ω};
b) B = {otpor izabranoga otpornika nije manji od 1030 Ω};
c) C = {otpor slučajno izabranoga otpornika nalazi se između 1000 Ω i 1050 Ω}.

Procijenite koliko najmanje otpornika treba uzeti tako da barem deset izabranih otpornika ima otpor između 970 Ω i 990 Ω.

Rezultati: $P(A)=0.30853,\ P(B)=0.06681,\ P(C)=0.49379,\ n\approx 42$.

6. Meteorološkim mjerenjima je utvrđeno da je najviša siječanjska dnevna temperatura zraka (iskazana u °C) izmjerena u Velikim Zdencima normalna slučajna varijabla T čije je očekivanje 5°C, a standardna devijacija 4°C. Izračunajte:

a) vjerojatnost da najviša temperatura zraka u Velikim Zdencima u slučajno izabranom danu bude strogo manja od 6°C;
b) vjerojatnost da najviša temperatura zraka u Velikim Zdencima u slučajno izabranom danu siječnja bude između 4°C i 7°C;
c) očekivani broj siječanjskih dana u kojima će najviša temperatura u Velikim Zdencima biti strogo veća od 8°C.

Rezultati: **a)** $p_1=0.59871$; **b)** $p_2=0.29017$; **c)** $n\approx 7$.

9. GRUPA ZADATAKA

1. Trajanje usmenoga ispita iz predmeta *Vjerojatnost i statistika* je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje 15 minuta, a standardna devijacija 5 minuta. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A = \{$slučajno odabrani ispitanik će usmeno odgovarati između 10 i 20 minuta$\}$;
b) $B = \{$slučajno odabrani ispitanik će usmeno odgovarati kraće od 5 minuta$\}$;
c) $C = \{$ispitanik će usmeno odgovarati dulje od 25 minuta$\}$;
d) $D = \{$ispitanik će usmeno odgovarati točno pola sata$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = 0.68268$; **b)** i **c)** $P(B) = P(C) = 0.02275$; **d)** $P(D) = 0$.

2. Najveća siječanjska dnevna temperatura zraka u Konjskom Brdu je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje –2°C, a standardna devijacija 4°C. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A = \{$dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom danu siječnja nije bila veća od 0°C$\}$;
b) $B = \{$najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom danu siječnja bila je između –5°C i –1°C$\}$;
c) $C = \{$najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom danu siječnja bila je strogo veća od –10°C$\}$.
d) Odredite očekivani broj siječanjskih dana u kojima će najveća dnevna temperatura biti strogo pozitivna.
e) Odredite vrijednost x tako da se s vjerojatnošću od najmanje 90% može tvrditi da najveća dnevna temperatura zraka u siječnju neće biti strogo veća od x°C. (Dobiveni rezultat zaokružite na cijeli broj.)
f) Odredite vrijednost y tako da se s vjerojatnošću od najmanje 90% može tvrditi da najveća dnevna temperatura zraka u siječnju neće biti strogo manja od y°C. (Dobiveni rezultat zaokružite na cijeli broj.)

Rezultati: **a)** **a)** $P(A) = 0.69146$; **b)** $P(B) = 0.37208$; **c)** $P(C) = 0.97725$; **d)** $n \approx 10$; **e)** $x = 4$; **f)** $y = -8$.

3. Vrijeme čekanja na pregled pacijenta u liječničkoj ordinaciji doktora Jojbolija je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 20 minuta. Doktor Jojboli je utvrdio da 21.186% svih njegovih pacijenata čeka na pregled manje od 15 minuta.

a) Izračunajte vjerojatnost da će slučajno odabrani pacijent čekati na pregled najviše 10 minuta.

b) Izračunajte vjerojatnost da će slučajno odabrani pacijent čekati na pregled barem pola sata.

Rezultati: **a)** i **b)** $p = 0.0548$.

4. Prilikom ocjenjivanja pismenoga ispita asistent Goran primjenjuje normalnu razdiobu s očekivanjem 60 bodova i standardnom devijacijom 20 bodova. Nakon što je silazno sortirao ispitanike prema broju postignutih bodova, Goran je utvrdio da je gornjih 59.871% ispitanika položilo ispit. Odredite najmanji broj bodova potreban za dobivanje pozitivne ocjene.

Rezultat: $n = 55$.

5. Vrijeme ispravnoga rada („životni vijek“) određene vrste baterija je normalna slučajna varijabla sa standardnom devijacijom 50 dana. Utvrđeno je da 84.134% svih baterija te vrste ima „životni vijek“ dulji od 450 dana.

a) Koji dio svih baterija ima „životni vijek“ dulji od godinu i pol (= 549 dana)?
b) Odredite najveću vrijednost x takvu da možemo očekivati da najmanje 75% svih baterija navedene vrste ima „životni vijek“ dulji od x dana.

Rezultati: **a)** $p = 16.354\%$; **b)** $x = 466$.

6. Masa studenata Veleučilišta u Špičkovini je normalna slučajna varijabla. Poznato je da 99.73% studenata Veleučilišta u Špičkovini ima masu između 50 i 110 kg.

a) Koji dio svih studenata ima masu manju od 70 kg?
b) Koji dio svih studenata ima masu veću od 100 kg?
c) Ako na veleučilištu studira ukupno 300 studenata, odredite očekivani broj studenata čija je masa između 80 i 90 kg.

Rezultati: **a)** $p_1 = 15.866\%$; **b)** $p_2 = 2.275\%$; **c)** $n \approx 102$.

7. Visina studenata Veleučilišta u Donjem Muću je normalna slučajna varijabla. Poznato je da je 95.45% studenata Veleučilišta u Donjem Muću visoko između 1.6 m i 2 m.

a) Koji dio svih studenata je niži od 180 cm?
b) Koji dio svih studenata je viši od 195 m?
c) Ako na veleučilištu studira ukupno 250 studenata, odredite očekivani broj studenata visokih između 175 cm i 185 cm.

Rezultati: **a)** $p_1 = 50\%$; **b)** $p_2 = 6.681\%$; **c)** $n \approx 96$.

8. Dnevni promet vozila na dijelu autoceste Gornje Sitno – Donje Sitno je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 800. Istraživanjem je utvrđeno da je u 97.725% dana dnevni promet strogo manji od 1000 vozila. Odredite:

a) standardnu devijaciju dnevnoga broja vozila;
b) vjerojatnost da u slučajno odabranom danu autocestom prođe između 600 i 700 vozila;
c) najveću vrijednost x takvu da u barem 90% dana autocestom prođe najviše x vozila.

Rezultati: **a)** $\sigma = 625$ vozila; **b)** $p = 0.13591$; **c)** $x_{\max} = 929$.

9. Trajanje Majina putovanja na posao je normalna slučajna varijabla čija je standardna devijacija 15 minuta. U 84.134% radnih dana njezino putovanje traje najviše sat vremena.

a) Odredite očekivano trajanje Majina putovanja na posao.
b) Odredite vjerojatnost da će Maja putovati na posao barem sat i pol.
c) Kada najkasnije (u odnosu na početak radnoga vremena) Maja treba krenuti na posao tako da vjerojatnost njezina pravovremena dolaska na posao bude barem 95%? (Zaokružite rezultat na prirodan broj.)

Rezultati: **a)** 45 minuta; **b)** $p = 0.00135$; **c)** 70 minuta prije početka radnoga vremena.

10. GRUPA ZADATAKA

1. Zadana je razdioba svih studenata 2. godine stručnoga studija elektrotehnike na Veleučilištu u Frkljevcima u akademskoj godini 2017./2018. prema ocjeni iz predmeta *Materijali u elektrotehnici*.

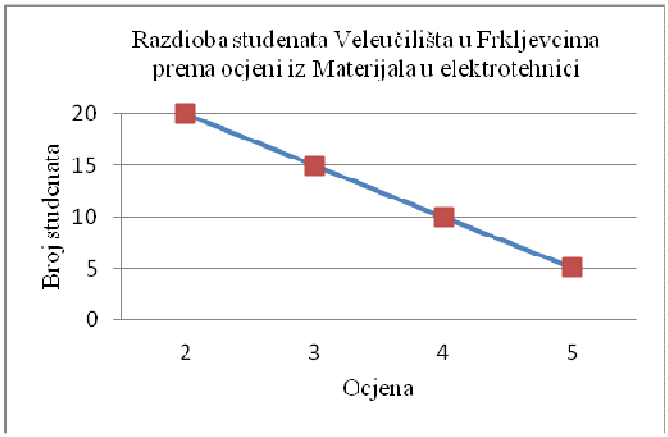
Ocjena	2	3	4	5	*Ukupno*
Broj studenata	20	15	10	5	50

Tablica 8. Podaci za zadatak 1.

a) Izračunajte pripadnu aritmetičku sredinu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije.

b) Prikažite zadanu razdiobu poligonom frekvencija.

Rezultat: **a)** $\bar{x} = 3,\ \sigma = 1,\ V = \frac{1}{3} \approx 33.33\%.$ **b)** Vidjeti sliku 8.



Slika 8.

2. Radi nadzora ispravnosti rada, porezni inspektor Zdravko na slučajan način bira točno jednu između triju ravnopravnih trgovina *LNT*, *Rumke* i *Zumkon*. Vjerojatnost da će u *LNT*-u biti utvrđena nepravilnost u radu iznosi 65%, vjerojatnost da će ta nepravilnost biti utvrđena u *Rumkeu* iznosi 95%, a vjerojatnost da će nepravilnost biti utvrđena *Zumkonu* iznosi 90%. Ako je Zdravko naposljetku utvrdio nepravilnost u radu, izračunajte vjerojatnost da je ta nepravilnost utvrđena u *Zumkonu*.

Rezultat: $p = \frac{9}{25} = 0.36.$

3. Iz segmenta $[0, 4]$ slučajno i nezavisno biramo točno dva broja. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj izabranih brojeva strogo manji od 6.

Rezultat: $p = \frac{7}{8} = 0.875.$

4. Dnevni broj željezničkih nesreća na željezničkoj pruzi Gradec – Sveti Ivan Žabno je Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda = 1$. Izračunajte vjerojatnost da se u slučajno odabranom danu na toj pruzi dogode barem dvije nesreće.

Rezultat: $p = 1 - \frac{2}{e} \approx 0.26424.$

5. Masa studenata Veleučilišta iz Frkljevaca je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 86 kg i standardnom devijacijom 8 kg. Na tom veleučilištu studira ukupno 200 studenata. Procijenite očekivani broj studenata čija je masa najmanje 90 kg. (Zaokružite dobiveni rezultat na najbliži prirodan broj.)

Rezultat: $n \approx 62.$

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. GRUPA ZADATAKA

1. Ukupno 3 studenata iz skupa od 20 studenata možemo izabrati na $\binom{20}{3}$ različitih načina. Taj broj je ujedno jednak broju svih mogućih ishoda u obama podzadacima.

a) Točno jednoga studenta sa smjera AiPR možemo izabrati na 8 različitih načina, točno jednoga studenta sa smjera KiRT na 5 različitih načina, a točno jednoga studenta sa smjera EE na $20-(8+5)=7$ različitih načina. Zbog toga je ukupan broj načina za izbor svih triju studenata jednak $8\cdot 5\cdot 7$. Taj broj je ujedno jednak broju svih povoljnih ishoda. Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka

$$P(A)=\frac{8\cdot 5\cdot 7}{\binom{20}{3}}=\frac{14}{57}\approx 0.24561.$$

b) Promotrimo suprotni događaj. Taj događaj je B^C = {nijedan izabrani student nije student smjera KiRT}. To znači da smo sva tri studenta izabrali između 8 studenata smjera AiPR i 7 studenata smjera EE, tj. među ukupno $8+7=15$ studenata. Ukupan broj različitih načina na koji možemo izabrati 3 studenta iz skupa od 15 studenata jednak je $\binom{15}{3}$. Taj broj je ujedno jednak broju svih ishoda povoljnih za događaj B^C. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B)=1-P\left(B^C\right)=1-\frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}}=\frac{137}{228}\approx 0.60088.$$

2. Svih $5+6+7=18$ natjecateljica međusobno razlikujemo, pa je ukupan broj različitih načina na koje ih možemo poredati u niz jednak $18!$. Taj broj je ujedno jednak broju mogućih ishoda u obama podzadacima.

a) Sve umjetne plavuše najprije shvatimo kao jedan objekt (uz ispriku svim natjecateljicama, naravno). Ukupan broj različitih načina na koje $1+6+7=14$ objekata možemo složiti u niz jednak je $14!$. Na taj smo način posložili sve djevojke u niz tako da sve plavuše stoje jedna do druge. Međutim, budući da sve djevojke međusobno razlikujemo, same plavuše možemo međusobno posložiti u

niz na $5!$ različitih načina. Zbog toga je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak $14!\cdot 5!$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A)=\frac{14!\cdot 5!}{18!}=\frac{1}{612}\approx 0.00163.$$

b) Promotrimo događaj suprotan zadanom. To je događaj B^C = {sve umjetne crnke su poredane jedna do druge}. Izračunajmo vjerojatnost toga događaja. Postupimo analogno kao u **a)** podzadatku, pa lako dobijemo:

$$P(B)=1-\frac{13!\cdot 6!}{18!}=\frac{1427}{1428}\approx 0.9993.$$

3. Ukupan broj različitih načina na koje možemo izabrati točno 8 računala iz skupa od 20 računala jednak je $\binom{20}{8}$. Taj broj je ujedno broj svih mogućih ishoda u obama podzadacima.

a) Ukupan broj računala na kojima je instaliran *Windows* 10 jednak je $\frac{60}{100}\cdot 20=12$, a ukupan broj računala na kojima nije instaliran *Windows* 10 jednak je $20-12=8$. Događaj A će se dogoditi ako točno $\frac{50}{100}\cdot 8=4$ računala izaberemo iz skupa od 12 računala na kojima je instaliran *Windows* 10 i ako preostalih $8-4=4$ računala izaberemo iz skupa od 8 računala na kojima nije instaliran *Windows* 10. Broj različitih načina na koje možemo izabrati 4 računala iz skupa od 12 računala jednak je $\binom{12}{4}$, a broj različitih načina na koje možemo izabrati 4 računala iz skupa od 8 računala jednak je $\binom{8}{4}$. Zbog toga je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A)=\frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{20}{8}}=\frac{1155}{4199}\approx 0.27507.$$

b) Promotrimo događaj suprotan događaju B. To je događaj B^C = {na svim izabranim računalima je instaliran *Windows* 10}. Prema razmatranju iz **a)** podzadatka, to znači da smo svih 8 računala izabrali iz skupa od 12 računala na

kojima je instaliran *Windows* 10. Taj izbor smo mogli napraviti na ukupno $\binom{12}{8}$ različitih načina. Taj broj je ujedno broj ishoda povoljnih za događaj B^C. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B)=1-P\left(B^C\right)=1-\frac{\binom{12}{8}}{\binom{20}{8}}=\frac{8365}{8398}\approx 0.99607.$$

4. Ukupan broj načina na koje možemo izabrati 10 pitanja iz skupa od 15 različitih pitanja jednak je $\binom{15}{10}=\binom{15}{15-10}=\binom{15}{5}$. Taj broj je ujedno jednak broju svih mogućih ishoda.

Karlo će uspjeti položiti ispit bude li znao točno odgovoriti ili na točno 5 pitanja ili na točno 6 pitanja ili na točno 7 pitanja. (On ne može točno odgovoriti na svih 10 postavljenih pitanja jer je naučio odgovoriti na samo 7 pitanja.) Zbog toga razlikujemo sljedeće disjunktne slučajeve:

I.) Karlo će točno odgovoriti na točno 5 pitanja. Tih 5 pitanja tada biramo iz skupa od 7 pitanja na koja Karlo zna točan odgovor. Preostalih $10-5=5$ pitanja biramo iz skupa od $15-7=8$ pitanja na koja Karlo ne zna točno odgovoriti. Ukupan broj načina na koji možemo izvršiti oba izbora jednak je:

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{8}{5}=\binom{7}{7-5}\cdot\binom{8}{8-5}=\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{3}.$$

II.) Karlo će točno odgovoriti na točno 6 pitanja. Tih 6 pitanja tada biramo iz skupa od 7 pitanja na koja Karlo zna točan odgovor. Preostala $10-6=4$ pitanja biramo iz skupa od $15-7=8$ pitanja na koja Karlo ne zna točno odgovoriti. Ukupan broj načina na koji možemo izvršiti oba izbora jednak je:

$$\binom{7}{6}\cdot\binom{8}{4}=\binom{7}{7-6}\cdot\binom{8}{4}=\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{4}.$$

III.) Karlo će točno odgovoriti na točno 7 pitanja. To su ujedno sva pitanja na koja Karlo zna točan odgovor, pa je njihov izbor jedinstven. Preostala $10-7=3$ pitanja

biramo iz skupa od $15-7=8$ pitanja na koja Karlo ne zna točno odgovoriti. Ukupan broj načina na koji možemo izvršiti oba izbora jednak je $1\cdot\binom{8}{3}=\binom{8}{3}$.

Prema pravilu zbroja zaključujemo da je ukupan broj svih ishoda povoljnih za zadani događaj jednak $\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{3}+\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{4}+\binom{8}{3}$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{3}+\binom{7}{1}\cdot\binom{8}{4}+\binom{8}{3}}{\binom{15}{5}}=\frac{82}{143}\approx 0.57343.$$

5. Neka su R polumjer veće kružnice, a duljina stranice upisanoga kvadrata i r polumjer manje kružnice. Duljina dijagonale upisanoga kvadrata jednaka je promjeru veće kružnice. Zbog toga mora vrijediti jednakost $a\cdot\sqrt{2}=2\cdot R$, a odavde je $a=\sqrt{2}\cdot R$. Nadalje, promjer manje kružnice jednak je duljini stranice upisanoga kvadrata. Zbog toga mora vrijediti jednakost $2\cdot r=a$. Ovamo uvrstimo jednakost $a=\sqrt{2}\cdot R$, pa dobijemo:

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot R\Leftrightarrow\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prema tome, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$p=\frac{r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi}=\frac{r^2}{R^2}=\left(\frac{r}{R}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

6. Neka su x i y duljine stranica pravokutnika. Opseg pravokutnika mora biti 2 metra = 200 cm, pa zaključujemo da vrijedi jednakost $2\cdot(x+y)=200$, odnosno $x+y=100$. Odavde je $y=100-x$, pa je površina pravokutnika jednaka:

$$P=x\cdot y=x\cdot(100-x)=-x^2+100\cdot x.$$

Znamo da je $x+y=100$, kao i $x,y\geq 0$, pa odatle zaključujemo da je $x\in[0,100]$. Zbog toga promatramo funkciju $P=P(x)=-x^2+100\cdot x$ na segmentu $[0,100]$. Njezina najmanja vrijednost na tom segmentu jednaka je 0, dok je njezina najveća vrijednost na tom segmentu jednaka 2500 (dokažite!). Tako smo zaključili da

vrijednost površine P pripada segmentu $[0,2500]$. Taj segment je ujedno skup svih mogućih ishoda.

Skup svih povoljnih ishoda je očito segment $[1600,2500]$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{2500-1600}{2500}=\frac{9}{25}=0.36.$$

7. Označimo:

A_1 = {ispitanik nije položio *Matematiku*};
A_2 = {ispitanik nije položio *Osnove elektrotehnike*};
A_3 = {ispitanik nije položio ni *Matematiku*, ni *Osnove elektrotehnike*}.

Primijetimo da je $A_3=A_1\cap A_2$. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A_1)=70\%=0.7,\ P(A_2)=60\%=0.6,\ P(A_3)=P(A_1\cap A_2)=40\%=0.4.$$

a) Tražena vjerojatnost je jednaka $P(A_2\mid A_1)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti je:

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}\approx 0.57143.$$

b) Tražena vjerojatnost je jednaka $P(A_1\mid A_2)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti je:

$$P(A_1\mid A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\approx 0.66667.$$

c) Promotrimo događaj suprotan događaju C. To je događaj C^C = {ispitanik nije položio barem jedan predmet}. Taj događaj je unija događaja A_1 i A_2. Prema formuli za vjerojatnost unije događaja vrijedi:

$$P(C^C)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_3)=0.7+0.6-0.4=0.9.$$

Prema tome, tražena vjerojatnost je jednaka $P(C)=1-P(C^C)=1-0.9=0.1=\frac{1}{10}$.

8. Svaka pošiljka (neovisno o tome je li paket ili nije) otprema se ili vlakom ili poštanskim kombijem ili zrakoplovom. Zbog toga postavljamo hipoteze:

H_1 = {pošiljka je otpremljena vlakom},
H_2 = {pošiljka je otpremljena poštanskim kombijem},
H_3 = {pošiljka je otpremljena zrakoplovom}.

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(H_1)=60\%=0.6,\ P(H_2)=25\%=0.25,\ P(H_3)=1-\big(P(H_1)+P(H_2)\big)=1-(0.6+0.25)=0.15.$$

Neka je A = {izabrana pošiljka je paket}. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A\,|\,H_1)=70\%=0.7,\ P(A\,|\,H_2)=40\%=0.4,\ P(A\,|\,H_3)=30\%=0.3.$$

a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=0.6\cdot 0.7+0.25\cdot 0.4+0.15\cdot 0.3=\frac{113}{200}=0.565.$$

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_3\,|\,A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)}{P(A)}=\frac{0.15\cdot 0.3}{0.565}=\frac{9}{113}\approx 0.07965.$$

9. Svaki zaposlenik (neovisno o tome koliko dugo radi u tvrtki) ima ili magisterij znanosti ili visoku stručnu spremu ili srednju stručnu spremu. Zbog toga postavljamo hipoteze:

H_1 = {zaposlenik ima magisterij znanosti},
H_2 = {zaposlenik ima visoku stručnu spremu},
H_3 = {zaposlenik ima srednju stručnu spremu}.

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(H_1)=10\%=0.1,\ P(H_2)=30\%=0.3,\ P(H_3)=1-\big(P(H_1)+P(H_2)\big)=1-(0.1+0.3)=0.6.$$

Neka je A = {izabrani zaposlenik u tvrtki radi barem 5 godina}. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A\,|\,H_1)=20\%=0.2,\ P(A\,|\,H_2)=40\%=0.4,\ P(A\,|\,H_3)=70\%=0.7.$$

a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=0.1\cdot 0.2+0.3\cdot 0.4+0.6\cdot 0.7=\frac{14}{25}=0.56.$$

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_2\,|\,A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2).}{P(A)}=\frac{0.3\cdot 0.4}{0.56}=\frac{3}{14}\approx 0.21429.$$

10. Primijetimo da promatrani slučajni pokus (ispitivanje ispravnosti rada operativnoga sustava na računalu u slučajno izabranom danu) ima točno dva ishoda: *uspjeh* (tj. ako nije zabilježen „pad“ operativnoga sustava) i *neuspjeh* (ako je zabilježen „pad“ operativnoga sustava). Vjerojatnost *neuspjeha* iznosi $q=0.6$. Zbog toga možemo primijeniti Bernoullijevu shemu.

a) Promotrimo događaj suprotan događaju A. To je događaj A^C = {operativni sustav nije „pao“ ni na jednom računalu}. Njegova je vjerojatnost jednaka $P\left(A^C\right)=(1-q)^{10}=0.4^{10}$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A)=1-P\left(A^C\right)=1-0.4^{10}=0.9998951424=\frac{9\,764\,601}{9\,765\,625}.$$

b) Zadani događaj je disjunktna unija dvaju događaja: B_1 = {operativni sustav je „pao“ na svim računalima} i B_2 = {operativni sustav je „pao“ na točno 9 računala}. Zbog toga imamo:

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)=q^{10}+\binom{10}{9}\cdot(1-q)\cdot q^9=0.6^{10}+10\cdot 0.4\cdot 0.6^9=0.0463574016=\frac{452\,709}{9\,765\,625}.$$

2. GRUPA ZADATAKA

1. Neka je n traženi broj računala. Broj ispravnih računala mora biti trostruko veći od broja neispravnih računala, a ukupan zbroj tih brojeva mora biti jednak ukupnom broju računala, tj. n. Odatle zaključujemo da je broj ispravnih računala jednak $\frac{3}{4}\cdot n$, a broj neispravnih računala $\frac{1}{4}\cdot n$.

Izaberemo li točno dva računala iz skupa od n računala, taj izbor možemo izvršiti na $\binom{n}{2}$ različitih načina. Taj broj je ujedno i broj svih mogućih ishoda.

Nadalje, neka je $A = \{$barem jedno izabrano računalo je neispravno$\}$. Promotrimo događaj suprotan događaju A. To je događaj $A^C = \{$oba izabrana računala su ispravna$\}$. Odredimo vjerojatnost događaja A^C. Ako su oba izabrana računala ispravna, to znači da smo ta računala zapravo izabrali iz skupa svih ispravnih računala. Prema gornjem razmatranju, taj skup ima $\frac{3}{4}\cdot n$ elemenata. Ukupan broj različitih načina na koji možemo izabrati točno dva elementa iz skupa od $\frac{3}{4}\cdot n$ elemenata jednak je $\binom{\frac{3}{4}\cdot n}{2}$. Taj broj je ujedno ukupan broj svih ishoda povoljnih za događaj A^C. Zbog toga je vjerojatnost toga događaja jednaka

$$P(A^c)=\frac{\binom{\frac{3}{4}\cdot n}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot n\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot n-1\right)}{2!}}{\frac{n\cdot(n-1)}{2!}}=\frac{\frac{9}{16}\cdot n-\frac{3}{4}}{n-1}=\frac{9\cdot n-12}{16\cdot n-16}.$$

Odatle slijedi da je vjerojatnost događaja A jednaka

$$P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{9\cdot n-12}{16\cdot n-16}=\frac{16\cdot n-16-(9\cdot n-12)}{16\cdot n-16}=\frac{7\cdot n-4}{16\cdot n-16}.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vjerojatnost treba biti jednaka $\frac{17}{38}$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{7\cdot n-4}{16\cdot n-16}=\frac{17}{38}.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
&38\cdot(7\cdot n-4)=17\cdot(16\cdot n-16),\\
&266\cdot n-152=272\cdot n-272,\\
&38\cdot(7\cdot n-4)=17\cdot(16\cdot n-16),\\
&266\cdot n-152=272\cdot n-272,\\
&266\cdot n-272\cdot n=-272+152,\\
&-6\cdot n=-120,\quad /:(-6)\\
&n=20.
\end{aligned}$$

Dakle, u skladištu ima ukupno 20 računala.

2. Neka je A = {postoji najmanje dvoje studenata rođenih na isti datum}. Promotrimo događaj suprotan događaju A. To je događaj A^C = {nikoja dva studenta nisu rođena na isti datum}. Izračunajmo vjerojatnost događaja A^C.

Ako grupu tvore ukupno 24 studenta, onda svaki od njih može izabrati točno jedan od 365 dana u godini za datum svojega rođendana. Pritom prirodno dozvoljavamo mogućnost da barem dva studenta (pa čak i svi studenti!) izaberu isti datum. Dakle, riječ je o 24-permutaciji s ponavljanjem skupa od ukupno 365 elemenata. Ukupan broj svih takvih permutacija jednak je 365^{24}. Taj broj jednak je ukupnom broju mogućih ishoda.

Odredimo broj ishoda povoljnih za događaj A^C. Prvi student može izabrati svoj datum rođenja na 365 različitih načina. Drugi student može izabrati svoj datum rođenja na 364 različita načina. Treći student može izabrati svoj datum rođenja na 363 različita načina. Postupak nastavimo dalje sve dok i posljednji, 24. student ne izabere svoj datum rođenja. On to može učiniti na 342 različita načina. Dakle, ukupan broj svih ishoda povoljnih za događaj A^C jednak je ukupnom broju 24-permutacija bez ponavljanja 365-članoga skupa, a taj je broj jednak $365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot 343\cdot 342=\binom{365}{24}\cdot 24!$.

Odatle slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=1-\frac{\binom{365}{24}\cdot 24!}{365^{24}}\approx 0.53834.$$

3. Ukupan broj različitih načina na koji nastavnik može izabrati točno tri pitanja iz skupa od 25 pitanja jednak je $\binom{25}{3}$. Taj broj je jednak ukupnom broju svih mogućih ishoda.

Marko neće položiti usmeni ispit ako bude znao odgovoriti na najviše jedno pitanje, odnosno ako ili ne bude znao odgovoriti ni na jedno pitanje ili bude znao odgovoriti na točno jedno pitanje. Riječ je o međusobno disjunktnim slučajevima, pa razmotrimo zasebno svaki od njih.

Ako Marko ne zna odgovoriti ni na jedno pitanje, to znači da su sva tri pitanja izabrana iz skupa od ukupno $25-15=10$ pitanja na koja Marko ne zna odgovoriti. Ukupan broj različitih načina na koji je moguće napraviti taj izbor jednak je $\binom{10}{3}$.

Ako Marko zna odgovoriti na točno jedno pitanje, to znači da je to pitanje izabrano iz skupa od 15 pitanja na koja Marko zna odgovoriti, a da su preostala dva pitanja izabrana iz skupa od ukupno 10 pitanja na koja Marko ne zna odgovoriti. Ukupan broj različitih načina na koji je moguće napraviti taj izbor jednak je $\binom{15}{1}\cdot\binom{10}{2}$.

Primjenom pravila zbroja zaključujemo da je ukupan broj povoljnih ishoda jednak $\binom{10}{3}+\binom{15}{1}\cdot\binom{10}{2}$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{\binom{10}{3}+\binom{15}{1}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{25}{3}}=\frac{159}{460}\approx 0.34565.$$

4. Svaki student bira ili *Matematiku* ili *Osnove elektrotehnike* 1 ili *Osnove elektrotehnike* 2. Zbog toga postavljamo hipoteze:

H_1 = {izabrane su *Osnove elektrotehnike*},
H_2 = {izabrana je *Matematika*},
H_3 = {izabrana je *Fizika*}.

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(H_1)=40\%=0.4,\ P(H_2)=30\%=0.3,\ P(H_3)=1-\big(P(H_1)+P(H_2)\big)=1-(0.4+0.3)=0.3.$$

Neka je A = {student je položio izabrani predmet}. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A \mid H_1) = 20\% = 0.2,\ P(A \mid H_2) = 30\% = 0.3,\ P(A \mid H_3) = 40\% = 0.4.$$

a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4 = \frac{29}{100} = 0.29.$$

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_2 \mid A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.29} = \frac{9}{29} \approx 0.31034.$$

5. Svaki preparat je proizveden ili u Babinoj Gredi ili u Banovoj Jaruzi ili u Generalskom Stolu. Zbog toga postavljamo hipoteze:

H_1 = {preparat je proizveden u Babinoj Gredi },
H_2 = {preparat je proizveden u Banovoj Jaruzi},
H_3 = {preparat je proizveden u Generalskom Stolu}.

Najprije trebamo izračunati koji dio svih preparata se proizvodi na svakoj pojedinoj lokaciji. Ti brojevi će ujedno biti i vjerojatnosti postavljenih hipoteza. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da tvornica u Generalskom Stolu proizvodi točno 100 preparata. Tada tvornica u Babinoj Gredi proizvodi $100 + \frac{30}{100} \cdot 100 = 100 + 30 = 130$ preparata, a tvornica u Banovoj Jaruzi $\frac{1}{2} \cdot 130 = 65$ preparata. Ukupan broj preparata jednak je $100 + 130 + 65 = 295$, pa su vjerojatnosti hipoteza redom:

$$P(H_1) = \frac{100}{295} = \frac{20}{59},\ P(H_2) = \frac{65}{295} = \frac{13}{59},\ P(H_3) = \frac{130}{295} = \frac{26}{59}.$$

Neka je A = {izabrani preparat je neispravan}. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A \mid H_1) = 2\% = 0.02,\ P(A \mid H_2) = 3\% = 0.03,\ P(A \mid H_3) = 2.5\% = 0.025.$$

a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=\frac{20}{59}\cdot\frac{2}{100}+\frac{13}{59}\cdot\frac{3}{100}+\frac{26}{59}\cdot\frac{25}{1000}=\frac{36}{1475}\approx 0.02441.$$

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_2\,|\,A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{13}{59}\cdot\frac{3}{100}}{\frac{36}{1475}}=\frac{13}{48}\approx 0.27083.$$

6. Svaka vožnja je ostvarena korištenjem vozila ili u *Cammelea* ili *Mobitaxija* ili *Uber allesa*. Zbog toga postavljamo hipoteze:

H_1 = {korišteno je vozilo *Cammelea*},
H_2 = {korišteno je vozilo *Mobitaxija*},
H_3 = {korišteno je vozilo *Uber allesa*}.

Iz podataka u zadatku slijedi da vjerojatnosti hipoteza redom iznose:

$$P(H_1)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0.4,\ P(H_2)=\frac{7}{20}=0.35,\ P(H_3)=\frac{20-(8+7)}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0.25.$$

Neka je A = {Mirela je pravovremeno stigla u zračnu luku}. Iz zadanih podataka slijedi:

$$P(A\,|\,H_1)=85\%=0.85,\ P(A\,|\,H_2)=75\%=0.75,\ P(A\,|\,H_3)=90\%=0.9.$$

a) Treba izračunati $P\left(A^C\right)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=\frac{2}{5}\cdot\frac{17}{20}+\frac{7}{20}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10}=\frac{331}{400}=0.8275,$$

$$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{331}{400}=\frac{69}{400}=0.1725.$$

b) Treba izračunati $P(H_1\,|\,A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{17}{20}}{\frac{331}{400}}=\frac{136}{331}\approx 0.41088.$$

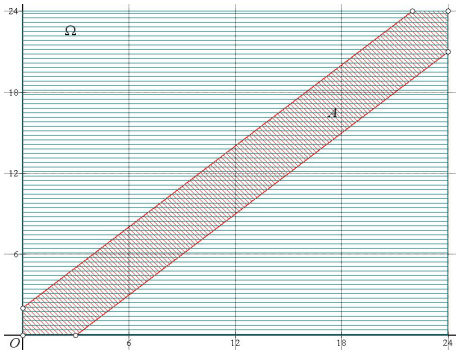
7. Neka su x i y redom vrijeme dolaska prvoga, odnosno drugoga skutera. Oba vremena pripadaju intervalu $[0,24]$. Zbog toga je skup svih mogućih ishoda:

$$\Omega = \{(x,y) : x, y \in [0,24]\}.$$

Odredimo skup svih povoljnih ishoda. Prvi cruiser će morati čekati na uplovljavanje u luku ako vrijedi nejednakost $0 \le x - y \le 3$. (Ta nejednakost znači da je drugi cruiser prvi uplovio u luku i da je prvi cruiser stigao do luke u razmaku ne većem od tri sata računajući od trenutka uplovljavanja drugoga cruisera.) Drugi cruiser će morati čekati na uplovljavanje u luku ako vrijedi nejednakost $0 \le y - x \le 2$. (Ta nejednakost znači da je prvi cruiser prvi uplovio u luku i da je drugi cruiser stigao do luke u razmaku ne većem od dva sata računajući od trenutka uplovljavanja prvoga cruisera.). Dakle, skup svih povoljnih ishoda je:

$$A = \{(x,y) \in \Omega : (0 \le x - y \le 3) \vee (0 \le y - x \le 2)\}.$$

Prikažimo te skupove u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 9.



Slika 9.

Površina skupa A dobije se tako da se od površine skupa Ω oduzme zbroj površina dvaju jednakokračnih pravokutnih trokutova od kojih prvi ima katete duge 21 jed., a drugi katete duge 22 jed. Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = 1 - \frac{\frac{21^2 + 22^2}{2}}{24^2} = \frac{227}{1152} \approx 0.19705.$$

8. Duljina visine povučene na osnovicu trokuta iznosi:

$$v = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}.$$

Površina zadanoga trokuta iznosi $P=\frac{16\cdot 6}{2}=48\ \text{cm}^2$. Ta vrijednost je mjera skupa svih mogućih ishoda.

Odredimo mjeru skupa svih povoljnih ishoda. Polumjer trokutu upisanoga kruga je:

$$r=\frac{P}{s}=\frac{48}{\frac{16+10+10}{2}}=\frac{96}{36}=\frac{8}{3}\ \text{cm}.$$

Površina toga kruga iznosi $P_1=r^2\cdot\pi=\frac{64}{9}\cdot\pi\ \text{cm}^2$. Dakle, mjera skupa svih povoljnih ishoda je $P_2=P-P_1=48-\frac{64}{9}\cdot\pi\ \text{cm}^2$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{P_2}{P}=1-\frac{\frac{64}{9}}{48}\cdot\pi=1-\frac{4}{27}\cdot\pi\approx 0.53458.$$

9. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je površina najvećega isječka jednaka 1. Tada površine isječaka tvore niz $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}$. Njihova ukupna površina jednaka je:

$$P=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}\ \text{kv. jed.}$$

Ta vrijednost je mjera skupa svih mogućih ishoda.

Odredimo mjeru skupa svih povoljnih ishoda. Zbrojimo površine prvoga i trećega isječka, pa dobijemo $P_1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\ \text{kv. jed.}$ Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{P_1}{P}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{15}{4}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

10. Volumen bilo koje sfere jednak je nuli, pa je prva vjerojatnost jednaka nuli.
Druga vjerojatnost je jednaka omjeru volumena kugle i volumena kocke. Neka je a duljina brida kocke. Promjer kugle jednak je duljini brida kocke, pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$p=\frac{V_{\text{kugla}}}{V_{\text{kocka}}}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3\cdot\pi}{a^3}=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot$$

3. GRUPA ZADATAKA

1. Neka su $K=$ {Kate će biti živa nakon 10 godina računajući od danas} i $W=$ {William će biti živ nakon 10 godina računajući od danas}. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti $P(K)=30\%=0.3,\ P(W)=25\%=0.25.$

a) Tražimo vjerojatnost $P(K+W)$. Ta vjerojatnost je jednaka $P(K)+P(W)-P(K\cdot W)$. Međutim, događaji K i W su međusobno nezavisni, pa vrijedi jednakost: $P(K\cdot W)=P(K)\cdot P(W)$. Iz tih dviju jednakosti dobivamo:

$$P(K+W)=P(K)+P(W)-P(K)\cdot P(W)=0.3+0.25-0.3\cdot 0.25=0.475=\frac{19}{40}.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P\left(K\cdot W^C\right)$. Primijetimo da vrijedi jednakost $K=K\cdot(W+W^C)$, pri čemu su skupovi $K\cdot W$ i $K\cdot W^C$ disjunktni. Zbog toga je $P(K)=P(K\cdot W)+P(K\cdot W^C)$, a odatle je:

$$P(K\cdot W^C)=P(K)-P(K\cdot W)=P(K)-P(K)\cdot P(W)=P(K)\cdot(1-P(W))=$$
$$=0.3\cdot(1-0.25)=0.225=\frac{9}{40}.$$

2. Neka su $L=$ {Luka Modrić je postigao zgoditak}, $M=$ {Mario Gavranović je postigao zgoditak} i $N=$ {Nikola Vlašić je postigao zgoditak}. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti:

$$P(L)=50\%=0.5,\ P(M)=70\%=0.7,\ P(N)=60\%=0.6\,.$$

Događaj $A=$ {Dante Stipica obranit će barem dva udarca} možemo zapisati kao disjunktnu uniju događaja $A_1=$ {Dante Stipica će obraniti točno dva udarca} = {točno jedan od igrača je postigao zgoditak} i $A_2=$ {Dante Stipica će obraniti sva tri udarca}. Tako redom imamo:

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=P(L\cdot M^C\cdot N^C)+P(L^C\cdot M\cdot N^C)+P(L^C\cdot M^C\cdot N)+$$
$$+P(L^C\cdot M^C\cdot N^C)=P(L)\cdot(1-P(M))\cdot(1-P(N))+(1-P(L))\cdot P(M)\cdot(1-P(N))+$$
$$+(1-P(L))\cdot(1-P(M))\cdot P(N)+(1-P(L))\cdot(1-P(M))\cdot(1-P(N))=$$
$$=0.5\cdot 0.3\cdot 0.4+0.5\cdot 0.7\cdot 0.4+0.5\cdot 0.3\cdot 0.6+0.5\cdot 0.3\cdot 0.4=0.35=\frac{7}{20}.$$

3. Radi određenosti, označimo poslužitelje s P_1, P_2 i P_3. Neka su $A_i = \{$poslužitelj P_i će raditi ispravno$\}$, za $i = 1,2,3$. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti $P(A_1) = 90\% = 0.9,\ P(A_2) = 85\% = 0.85,\ P(A_3) = 80\% = 0.8.$

a) Primijetimo da je $A = A_1^C \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2^C \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3^C$, pa slijedi:

$$\begin{aligned}
&P(A) = P\left(A_1^C \cdot A_2 \cdot A_3\right) + P\left(A_1 \cdot A_2^C \cdot A_3\right) + P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3^C\right) = P(A_1^C) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + \\
&+P(A_1) \cdot P(A_2^C) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3^C) = (1 - P(A_1)) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + \\
&+P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot (1 - P(A_3)) = \\
&= 0.1 \cdot 0.85 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.15 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.2 = 0.329 = \frac{329}{1000}.
\end{aligned}$$

b) Očito je $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, pa zbog nezavisnosti događaja dobivamo:

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.8 = 0.612 = \frac{153}{250}.$$

4. Označimo s n traženi broj bacanja. Pritom je očito $n \in \mathbb{N}$. Neka je $A =$ {Dario će barem jednom postići koš}. Tada je A^C = {Dario nijednom neće postići koš}. Odredimo vjerojatnost događaja A^C. Očito je $A^C =$ {Dario neće postići koš u 1. bacanju} · {Dario neće postići koš u 2. bacanju} · … · {Dario neće postići koš u n-tom bacanju}, pa zbog međusobne nezavisnosti pojedinih bacanja slijedi:

$$\begin{aligned}
&P(A^C) = \underbrace{(1 - 0.75) \cdot (1 - 0.75) \cdot \ldots \cdot (1 - 0.75)}_{n \text{ puta}} = 0.25^n, \\
&P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 0.25^n.
\end{aligned}$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti nejednakost $P(A) \geq 99\% = 0.99$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu $1 - 0.25^n \geq 0.99$. Odavde je $0.25^n \leq 0.01$, pa logaritmiranjem po bazi 10 dobivamo $n \cdot (2 \cdot \log 5 - 2) \leq -2$, odnosno $n \geq \frac{1}{1 - \log 5} \approx 3.32193$. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava ovu nejednakost je $n = 4$.

5. Neka je n traženi broj bacanja. Pritom je očito $n \in \mathbb{N}$. Neka su $B =$ {Bojan je pogodio „tricu“}, $K =$ {Kruno je pogodio „tricu“} i $A =$ {pogođena je barem jedna trica}. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti $P(B) = 70\% = 0.7,\ P(K) = 60\% = 0.6.$

Promotrimo događaj A^C. Očito je A^C = {nije pogođena nijedna „trica“} = {Bojan je promašio oba bacanja i Kruno je promašio svih n bacanja} = {Bojan je promašio oba bacanja} · {Kruno je promašio svih n bacanja} = {Bojan je promašio 1.

bacanje} · {Bojan je promašio 2. bacanje} · {Kruno je promašio 1. bacanje}· {Kruno je promašio 2. bacanje} · … · {Kruno je promašio n-to bacanje}. Zbog nezavisnosti događaja slijedi:

$$P(A^C) = (1-P(B))^2 \cdot (1-P(K))^n = (1-0.7)^2 \cdot (1-0.6)^n = 0.3^2 \cdot 0.4^n,$$
$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 0.3^2 \cdot 0.4^n.$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti nejednakost $P(A) \geq 99\% = 0.99$. Tako dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu $1 - 0.3^2 \cdot 0.4^n \geq 0.99$, odnosno $0.4^n \leq \frac{1}{9}$. Logaritmiranjem po bazi 10 dobijemo $n \cdot (2 \cdot \log 2 - 1) \leq -2 \cdot \log 3$, a odatle je $n \geq \frac{2 \cdot \log 3}{1 - 2 \cdot \log 2} \approx 2.39796$. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava ovu nejednakost je $n = 3$.

6. Svaki slobodni udarac možemo shvatiti kao Bernoullijev pokus s točno dvama ishodima: *uspjeh* (postignut je zgoditak) i *neuspjeh* (nije postignut zgoditak). Taj slučajni pokus se ponavlja točno $n = 6$ puta, a vjerojatnost *uspjeha* u svakom ponavljanju pokusa iznosi $p = 40\% = 0.4$.

a) Tražimo vjerojatnost da se dogode točno $k = 3$ *uspjeha*. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(A) = \binom{6}{3} \cdot 0.4^3 \cdot (1-0.4)^{6-3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^3 = 0.27648 = \frac{864}{3125}.$$

b) Promotrimo događaj B^C = {Ivan Rakitić će postići najviše jedan zgoditak}. Očito je B^C = {Ivan Rakitić neće postići nijedan zgoditak} + {Ivan Rakitić će postići točno jedan zgoditak}. Ti događaji su disjunktni, pa imamo:

$$P(B^C) = (1-0.4)^6 + \binom{6}{1} \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)^{6-1} = 0.6^6 + 6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5,$$
$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.6^6 - 6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5 = \frac{2396}{3125} = 0.76672.$$

c) Tražena vjerojatnost jednaka je vjerojatnosti da se u svim pokusima kao ishod pojavi *neuspjeh*. Dakle, $P(C) = (1-0.4)^6 = 0.6^6 = \frac{729}{15625} = 0.046656$.

7. I u ovom se slučaju radi o Bernoullijevu pokusu s točno dva ishoda: pobjeda Miami Heata i pobjeda Indiana Pacersa. Radi podataka u zadatku, proglasimo pobjedu Miami Heata *uspjehom*, a pobjedu Indiana Pacersa *neuspjehom*. Dakle, vjerojatnost

uspjeha iznosi $p = 55\% = 0.55$. Međutim, ne znamo ukupan broj izvedenih pokusa. Znamo da se sigurno moraju odigrati četiri utakmice i da je moguće odigrati ukupno najviše sedam utakmica (u slučaju kad prvih šest utakmica završe s po tri pobjede svake momčadi, a u posljednjoj, sedmoj utakmici pobijedi momčad Miami Heata).

a) Zadani događaj je disjunktna unija događaja {odigrane su točno 4 utakmice i u sve četiri utakmice je pobijedila momčad Miami Heata}, {odigrano je točno 5 utakmica i u njih 4 je pobijedila momčad Miami Heata}, {odigrano je točno 6 utakmica i u njih 4 je pobijedila momčad Miami Heata} i {odigrano je točno 7 utakmica i u njih 4 je pobijedila momčad Miami Heata}. Zbog toga je:

$$P(A) = 0.55^4 + \binom{5}{4} \cdot 0.55^4 \cdot (1-0.55)^{5-4} + \binom{6}{4} \cdot 0.55^4 \cdot (1-0.55)^{6-4} + \binom{7}{4} \cdot 0.55^4 \cdot (1-0.55)^{7-4} =$$

$$= 0.55^4 + \binom{5}{5-1} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + \binom{6}{6-4} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + \binom{7}{7-4} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 + \binom{5}{1} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + \binom{6}{2} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + \binom{7}{3} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 + 5 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 + 5 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + 15 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + 35 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 \cdot (1 + 5 \cdot 0.45 + 15 \cdot 0.45^2 + 35 \cdot 0.45^3) = 0.86719329296875 \approx 0.86719.$$

b) U ovom slučaju tražimo vjerojatnost da su odigrane točno četiri utakmice i da je u sve četiri utakmice pobijedila momčad Miami Heata. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(B) = 0.55^4 = 0.09150625 \approx 0.09151.$$

c) U ovom je slučaju odigrano ukupno 6 utakmica i u točno dvije utakmice je pobijedila momčad Miami Heata. Dakle, tražimo vjerojatnost da se u 6 slučajnih pokusa dogode točno dva *uspjeha*. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(C) = \binom{6}{2} \cdot 0.55^2 \cdot (1-0.55)^{6-2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 0.55^2 \cdot 0.45^4 = 15 \cdot 0.55^2 \cdot 0.45^4 = 0.186065859375 \approx 0.18607.$$

8. Svaki Karlov izlazak na ispit možemo shvatiti kao Bernoullijev pokus s točno dvama ishodima: *uspjeh* (ispit je položen) i *neuspjeh* (ispit nije položen). Iz podataka u zadatku zaključujemo da vjerojatnost *uspjeha* iznosi $p = 40\% = 0.4$.

a) Neka je n traženi broj izlazaka na ispit. Očito je $n \in \mathbb{N}$. Vjerojatnost da Karlo neće položiti ispit ni u jednom izlasku na ispit iznosi $(1-0.4)^n = 0.6^n$. Zbog toga vjerojatnost suprotnoga događaja, a to je upravo vjerojatnost da će Karlo položiti ispit u posljednjem, n-tom izlasku na ispit (ako položi ispit u nekom pokušaju, onda više ne izlazi na isti ispit), iznosi $1-0.4^n$. Ta vjerojatnost treba biti jednaka ili veća od 90%, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu $1-0.6^n \geq 0.9$, odnosno $0.6^n \leq 0.1$. Odatle logaritmiranjem po bazi 10 slijedi $n \geq \frac{1}{1-\log 6} \approx 4.50758$. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava ovu nejednadžbu je $n = 5$.

b) Neka je p traženi dio gradiva. p je ujedno i vjerojatnost polaganja ispita u svakom pokušaju. Vjerojatnost da će Karlo položiti ispit u prvom pokušaju iznosi p. Vjerojatnost da će Karlo položiti ispit u drugom pokušaju iznosi $(1-p)\cdot p$, a vjerojatnost da će položiti ispit u trećem pokušaju $(1-p)^2 \cdot p$. Pripadni događaji su međusobno disjunktni, pa je vjerojatnost da će Karlo položiti ispit najkasnije u trećem pokušaju jednaka zbroju navedenih vjerojatnosti, tj. $p+(1-p)\cdot p+(1-p)^2\cdot p = p^3-3\cdot p^2+3\cdot p = (p-1)^3+1$. Ta vjerojatnost mora biti jednaka ili veća od 90%, pa dobivamo nejednadžbu $(p-1)^3+1 \geq 0.9$. Odatle je $p \geq 1-\sqrt[3]{0.1} \approx 0.53584 = 53.584\%$.

9. I u ovom zadatku se radi o Bernoullijevu pokusu. *Uspjeh* je zaokruživanje točnoga odgovora. Njegova je vjerojatnost jednaka $p = \frac{1}{4}$ jer je samo jedan od četiri odgovora točan. Tražimo vjerojatnost da je Nevesinko točno odgovorio na barem pet pitanja, odnosno da se pojavilo najmanje pet *uspjeha*. To znači da je Nevesinko točno odgovorio ili na pet ili na šest ili na sedam ili na osam ili na devet ili na svih deset pitanja. Pripadni događaji su međusobno disjunktni, pa slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \frac{40961}{524288} \approx 0.07813.$$

4. GRUPA ZADATAKA

1. Iz zadane tablice očitamo:

$$\left.\begin{array}{l} n=50, \\ x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=5,\ x_4=6,\ x_5=7,\ x_6=8, \\ f_1=5,\ f_2=12,\ f_3=20,\ f_4=8,\ f_5=3,\ f_6=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\ldots=y_5=3, \\ y_6=\ldots=y_{17}=4, \\ y_{18}=\ldots=y_{37}=5, \\ y_{38}=\ldots=y_{45}=6, \\ y_{46}=y_{47}=y_{48}=7, \\ y_{49}=y_{50}=8. \end{cases}$$

Potom računamo tražene pokazatelje.

a) $\bar{x}=\dfrac{5\cdot 3+12\cdot 4+20\cdot 5+8\cdot 6+3\cdot 7+2\cdot 8}{5+12+20+8+3+2}=\dfrac{248}{50}=4.96.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosjek broja članova domaćinstva po jednom studentu iznosi 4.96, odnosno približno 5 članova.

b) $n=50$ nije djeljiv sa 4, pa je $Q_1=y_{\left\lceil \frac{50}{4} \right\rceil}=y_{\lceil 12.5 \rceil}=y_{13}=4.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: 25% svih studenata živi u domaćinstvu s najviše 4 člana.

c) $n=50$ je paran broj, pa je $Me=Q_2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{\frac{50}{2}}+y_{\frac{50}{2}+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{25}+y_{26}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot(5+5)=5.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Polovica svih studenata živi u domaćinstvu s najviše 5 članova.

d) $n=50$ nije djeljiv sa 4, pa je $Q_3=y_{\left\lceil \frac{3}{4}\cdot 50 \right\rceil}=y_{\lceil 37.5 \rceil}=y_{38}=6.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: 75% svih studenata živi u domaćinstvu s najviše 4 člana.

e) Najveću frekvenciju 20 ima modalitet 5. Dakle, $Mo=5.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Najčešći broj članova u promatranim domaćinstvima jednak je 5.

f) $R = x_{\max} - x_{\min} = 8 - 3 = 5.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Razlika najvećega broja članova u domaćinstvu i najmanjega broja članova u domaćinstvu jednaka je 5.

g) $I_q = Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Raspon varijacije središnje polovice članova niza brojeva članova u domaćinstvima jednak je 2. (Kad „eliminiramo“ 25% najmanjih i 25% najvećih vrijednosti polaznoga uređenoga niza, razlika najveće i najmanje vrijednosti tako dobivenoga niza jednaka je 2.)

h) $$\sigma = \sqrt{\frac{5\cdot 3^2 + 12\cdot 4^2 + 20\cdot 5^2 + 8\cdot 6^2 + 3\cdot 7^2 + 2\cdot 8^2}{5+12+20+8+3+2} - \left(\frac{124}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1300}{50} - \frac{15376}{625}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1748}{1250}} = \sqrt{\frac{874}{625}} = \frac{\sqrt{874}}{25} \approx 1.18254.$$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosječno odstupanje broja članova domaćinstava od njihove aritmetičke sredine iznosi približno 1.18254 .

i) $V_q = \dfrac{I_q}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{2}{6+4} = \dfrac{2}{10} = 0.2.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Varijabilitet središnje polovice niza broja članova domaćinstava je relativno slab.

j) $$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{25}\cdot\sqrt{874}}{\frac{124}{25}} = \frac{\sqrt{874}}{124} \approx 0.23842 = 23.842\%.$$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Relativno prosječno odstupanje broja članova domaćinstava od njihove aritmetičke sredine je relativno slabo. (Varijabilitet cijeloga niza je relativno slab, što znači da je aritmetička sredina dobar reprezentant niza.)

Preostaje prikazati promatranu razdiobu poligonom frekvencija. U pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke (3, 5), (4, 12), (5, 20), (6, 8), (7, 3) i (8, 2), pa ih spojimo poligonalnom crtom. Dobivamo sliku 1 (vidjeti stranicu 13.)

2. Iz zadane tablice očitamo:

$$\left.\begin{array}{l} n=60, \\ x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4,\ x_4=5,\ x_5=7,\ x_6=10, \\ f_1=4,\ f_2=6,\ f_3=8,\ f_4=20,\ f_5=12,\ f_6=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\ldots=y_4=2, \\ y_5=\ldots=y_{10}=3, \\ y_{11}=\ldots=y_{18}=4, \\ y_{19}=\ldots=y_{38}=5, \\ y_{39}=\ldots=y_{50}=6, \\ y_{51}=\ldots=y_{60}=10. \end{cases}$$

Potom računamo:

a) $\bar{x}=\dfrac{4\cdot 2+6\cdot 3+8\cdot 4+20\cdot 5+12\cdot 7+10\cdot 10}{4+6+8+20+12+10}=\dfrac{342}{60}=\dfrac{57}{10}=5.7.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosjek broja predmeta po jednom studentu iznosi 5.7, odnosno približno 6 predmetu.

b) $n=60$ je djeljiv sa 4, pa je $Q_1=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{\frac{60}{4}}+y_{\frac{60}{4}+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{15}+y_{16}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot(4+4)=4.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: 25% svih studenata dobilo je ocjenu izvrstan(5) iz najviše 4 predmeta.

c) $n=60$ je paran broj, pa je $Me=Q_2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{\frac{60}{2}}+y_{\frac{60}{2}+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{30}+y_{31}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot(5+5)=5.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Polovica svih studenata dobilo je ocjenu izvrstan(5) iz najviše 5 predmeta.

d) $n=60$ je djeljiv sa 4, pa je $Q_3=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{\frac{3}{4}\cdot 60}+y_{\frac{3}{4}\cdot 60+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(y_{45}+y_{46}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot(7+7)=7.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: 75% svih studenata dobilo je ocjenu izvrstan(5) iz najviše 7 predmeta.

e) Najveću frekvenciju 20 ima modalitet 5. Dakle, $Mo=5.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Najčešći broj predmeta jednak je 5.

f) $R=x_{\max}-x_{\min}=10-2=8.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Razlika najvećega broja predmeta i najmanjega broja predmeta jednaka je 8.

g) $I_q = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Raspon varijacije središnje polovice članova niza brojeva predmeta jednak je 3. (Kad „eliminiramo“ 25% najmanjih i 25% najvećih vrijednosti polaznoga uređenoga niza, razlika najveće i najmanje vrijednosti tako dobivenoga niza jednaka je 3.)

h)
$$\sigma = \sqrt{\frac{4\cdot 2^2 + 6\cdot 3^2 + 8\cdot 4^2 + 20\cdot 5^2 + 12\cdot 7^2 + 10\cdot 10^2}{4+6+8+20+12+10} - \left(\frac{57}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{381}{10} - \frac{3249}{100}} =$$
$$= \sqrt{\frac{561}{100}} = \frac{\sqrt{561}}{10} \approx 2.36854.$$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosječno odstupanje broja predmeta od njihove aritmetičke sredine iznosi približno 2.36854 .

i) $V_q = \dfrac{I_q}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{3}{7+4} = \dfrac{3}{11} \approx 0.27273\,.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Varijabilitet središnje polovice niza broja predmeta je umjeren.

j) $V = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{\frac{1}{10}\cdot\sqrt{561}}{\frac{57}{10}} = \dfrac{\sqrt{561}}{57} \approx 0.41553 = 41.553\%.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Relativno prosječno odstupanje broja predmeta od njihove aritmetičke sredine je umjereno. (Varijabilitet cijeloga niza je umjeren, pa aritmetička sredina nije baš dobar reprezentant.)

Preostaje prikazati promatranu razdiobu poligonom frekvencija. U pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 20), (7, 12) i (10, 10), pa ih spojimo poligonalnom crtom. Dobivamo sliku 3. (vidjeti stranicu 14.)

3. Zadani podaci su očito grupirani u prave razrede. Zbog toga „ulogu“ modaliteta preuzimaju razredne sredine. Apsolutne frekvencije pritom ostaju nepromijenjene. Izračunajmo razredne sredine:

$$s_1 = \frac{0+10}{2} = 5,\ s_2 = \frac{10+20}{2} = 15,\ s_3 = \frac{20+30}{2} = 25,$$
$$s_4 = \frac{30+40}{2} = 35,\ s_5 = \frac{40+50}{2} = 45,\ s_6 = \frac{50+100}{2} = 75.$$

Tako dobivamo tablicu 9.

Razredna sredina	5	15	25	35	45	75	*Ukupno*
Broj studenata	5	10	10	20	25	30	100

Tablica 9.

Iz te tablice očitamo:

$$f_1 = 5,\ f_2 = f_3 = 10,\ f_4 = 20,\ f_5 = 25,\ f_6 = 30.$$

Računamo tražene pokazatelje.

a) $\bar{x} = \dfrac{5\cdot 5 + 10\cdot 15 + 10\cdot 25 + 20\cdot 35 + 25\cdot 45 + 30\cdot 75}{5+10+10+20+25+30} = \dfrac{4500}{100} = 45.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosjek broja prijatelja po jednom studentu jednak je 45.

b) $\sigma = \sqrt{\dfrac{5\cdot 5^2 + 10\cdot 15^2 + 10\cdot 25^2 + 20\cdot 35^2 + 25\cdot 45^2 + 30\cdot 75^2}{5+10+10+20+25+30} - 45^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{252500}{100} - 2025} = \sqrt{2525 - 2025} = \sqrt{500} = 10\cdot\sqrt{5} \approx 22.36068.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosječno odstupanje brojeva prijatelja od njihove aritmetičke sredine iznosi približno 22.36068.

c) $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{10\cdot\sqrt{5}}{45} = \dfrac{2}{9}\cdot\sqrt{5} \approx 0.4969 = 49.69\%.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Relativno prosječno odstupanje broja prijatelja od njihove aritmetičke sredine je umjereno. (Varijabilitet cijeloga niza je umjeren, što znači da aritmetička sredina nije baš dobar reprezentant.)

Preostaje grafički prikazati zadanu razdiobu. Poligon frekvencija dobivamo analogno kao u prethodnim zadacima, osim što na os apscisa umjesto modaliteta pišemo razrede.

Histogram dobivamo tako da umjesto točaka crtamo „spojene“ pravokutnike. Zbog nejednakih razrednih širina, izračunamo najprije korigirane apsolutne frekvencije dijeleći svaku originalnu apsolutnu frekvenciju odgovarajućom razrednom širinom:

$$f_1^{corr} = \frac{5}{10} = 0.5,\ f_2^{corr} = f_3^{corr} = \frac{10}{10} = 1,\ f_4^{corr} = \frac{20}{10} = 2,\ f_5^{corr} = \frac{25}{10} = 2.5,\ f_6^{corr} = \frac{30}{50} = 0.6.$$

(Podsjetimo se, *površina* svakoga pravokutnika u histogramu treba biti jednaka apsolutnoj frekvenciji.) Dakle, crtamo pravokutnike čije su dužine redom 10, 10, 10, 10, 10 i 50, a širine redom 0.5, 1, 1, 2, 2.5 i 0.6. Dobivamo slike 4. i 5. (vidjeti stranicu 15.)

4. Zadani podaci su očito grupirani u prave razrede. Zbog toga „ulogu“ modaliteta preuzimaju razredne sredine. Apsolutne frekvencije pritom ostaju nepromijenjene. Izračunajmo razredne sredine:

$$s_1 = \frac{0+30}{2} = 15,\ s_2 = \frac{30+50}{2} = 40,\ s_3 = \frac{50+60}{2} = 55,$$
$$s_4 = \frac{60+80}{2} = 70,\ s_5 = \frac{80+100}{2} = 90,\ s_6 = \frac{100+200}{2} = 150.$$

Tako dobivamo tablicu 10.

Razredna sredina	15	40	55	70	90	150	*Ukupno*
Broj studenata	4	16	24	12	16	8	80

Tablica 10.

Iz te tablice očitamo:

$$f_1 = 4,\ f_2 = f_5 = 16,\ f_3 = 24,\ f_4 = 12,\ f_6 = 8.$$

Računamo tražene pokazatelje.

a) $\bar{x} = \dfrac{4\cdot 15 + 16\cdot 40 + 24\cdot 55 + 12\cdot 70 + 16\cdot 90 + 8\cdot 150}{4+16+24+12+16+8} = \dfrac{5500}{80} = \dfrac{275}{4} = 68.75.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosjek broja celebrityja po jednom studentu jednak je 68.75, odnosno približno 69.

b) $$\sigma = \sqrt{\frac{4\cdot 15^2 + 16\cdot 40^2 + 24\cdot 55^2 + 12\cdot 70^2 + 16\cdot 90^2 + 8\cdot 150^2}{4+16+24+12+16+8} - \left(\frac{275}{4}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{467500}{80} - \frac{75625}{16}} = \sqrt{\frac{93500}{16} - \frac{75625}{16}} = \sqrt{\frac{17875}{16}} = \frac{5\cdot\sqrt{715}}{4} \approx 33.424355$$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Prosječno odstupanje brojeva celebrityja od njihove aritmetičke sredine iznosi približno 33.42436.

c) $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{\frac{5\cdot\sqrt{715}}{4}}{\frac{275}{4}} = \dfrac{\sqrt{715}}{55} \approx 0.48617 = 48.617\%.$

Interpretacija izračunatoga pokazatelja: Relativno prosječno odstupanje broja celebrityja od njihove aritmetičke sredine je relativno slabo. (Varijabilitet cijeloga niza je relativno slab, pa je aritmetička sredina dobar reprezentant.)

Preostaje grafički prikazati zadanu razdiobu. Poligon frekvencija dobivamo analogno kao u prethodnim zadacima, osim što na os apscisa umjesto modaliteta pišemo razrede.

Histogram dobivamo tako da umjesto točaka crtamo „spojene“ pravokutnike. Zbog nejednakih razrednih širina, izračunamo najprije korigirane apsolutne frekvencije dijeleći svaku originalnu apsolutnu frekvenciju odgovarajućom razrednom širinom:

$$f_1^{corr} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0.13,\ f_2^{corr} = f_5^{corr} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0.8,\ f_3^{corr} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} = 2.4,$$
$$f_4^{corr} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6,\ f_6^{corr} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} = 0.08.$$

(Podsjetimo se, *površina* svakoga pravokutnika u histogramu treba biti jednaka apsolutnoj frekvenciji.) Dakle, crtamo pravokutnike čije su dužine redom 30, 20, 10, 20, 20 i 100, a širine redom 0.13, 0.8, 2.4, 0.6, 0.8 i 0.08. Dobivamo slike 6. i 7. (vidjeti stranicu 16.)

5. GRUPA ZADATAKA

1. Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj neispravno ispunjenih poreznih prijava. Odredimo njezine parametre. Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju predanih poreznih prijava, tj. $n=10$. Odredimo vjerojatnost *uspjeha* u jednom pokusu, odnosno vjerojatnost da slučajno odabrana prijava bude ispravno ispunjena. Iz zadanih podataka zaključujemo da su od ukupno pet poreznih prijava ispravno ispunjene njih četiri, pa je $p=\frac{4}{5}=0.8$. Dakle, $X \sim B\left(10,\ \frac{4}{5}\right)$.

a) Odredimo najprije matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako $E(X)=10\cdot\frac{4}{5}=8$. To znači da je očekivani broj ispravno ispunjenih poreznih prijava jednak 8. Odatle slijedi da je očekivani broj neispravno ispunjenih poreznih prijava jednak $10-8=2$.

b) Tražimo $P(X=10)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X=10)=\left(\frac{4}{5}\right)^{10}=\frac{1\ 048\ 576}{9\ 765\ 625}\approx 0.10737.$$

c) Polovica ukupnoga broja predanih poreznih prijava jednaka je $\frac{1}{2}\cdot 10=5$. Dakle, tražimo $P(X\geq 6)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned}
&P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=\\
&=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{6}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{10-6}+\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{7}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{10-7}+\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{8}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{10-8}+\\
&+\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{9}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{10-9}+\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{10-10}=\frac{9\ 445\ 376}{9\ 765\ 625}\approx 0.96721.
\end{aligned}$$

2. Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava broj uzoraka bez ijedne neispravne žarulje. Odredimo njezine parametre. Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju uzoraka. Dakle, $n=100$. Izračunajmo vjerojatnost da slučajno odabrani uzorak ne sadrži nijednu neispravnu žarulju. Vjerojatnost da je slučajno odabrana žarulja neispravna iznosi $5\%=\frac{1}{20}=0.05$, pa je vjerojatnost da je slučajno odabrana žarulja ispravna $1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$. Zbog toga vjerojatnost da je svih 20

žarulja u uzorku ispravno iznosi $p=\left(\frac{19}{20}\right)^{20}\approx 0.35847$. Dakle, $X\sim B(100,\ 0.35847)$.

a) Traženi je broj jednak matematičkom očekivanju varijable X. Ono iznosi $E(X)=n\cdot p=100\cdot 0.35847=35.847\approx 36$. Dakle, traženi je broj jednak 36.

b) Promotrimo suprotan događaj, tj. da uzorak sadrži najviše jednu neispravnu žarulju. Izračunajmo vjerojatnost toga događaja. On se razlaže na točno dva disjunktna događaja: da su sve žarulje u uzorku ispravne i da uzorak sadrži točno jednu neispravnu žarulju. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=1-\left(\left(\frac{19}{20}\right)^{20}+\binom{20}{19}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^{19}\cdot\left(1-\frac{19}{20}\right)\right)\approx 0.26416.$$

3. Neka je n traženi broj. Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj proizvedenih škartiranih pločica. Iz podataka u zadatku slijedi da je vjerojatnost da je slučajno odabrana pločica škartirana jednaka $1\%=\frac{1}{100}=0.01$. Dakle, $X\sim B\left(n,\ \frac{1}{100}\right)$.

Vjerojatnost da su u uzorku od n pločica sve pločice ispravne jednaka je $p_1=\left(1-\frac{1}{100}\right)^n=\left(\frac{99}{100}\right)^n$, pa je vjerojatnost da isti uzorak sadrži barem jednu neispravnu pločicu jednaka $p_2=1-\left(\frac{99}{100}\right)^n$.

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti nejednakost $p_2\geq 90\%=0.9$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1-\left(\frac{99}{100}\right)^n\geq 0.9.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$1-\left(\frac{99}{100}\right)^n\geq 0.9,$$
$$\left(\frac{99}{100}\right)^n\leq 0.1,\ \ /\log$$
$$n\cdot(\log 99-\log 100)\leq\log(0.1)$$

$$n\cdot(\log 99-2)\le -1,\quad /:(\log 99-2)<0$$
$$n\ge \frac{1}{2-\log 99}\approx 229.11.$$

Najmanji $n\in\mathbb{N}$ koji je rješenje gornje nejednadžbe je $n=230$.

4. **a)** Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj smetnji u vremenskom intervalu od 8 sati. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X\sim B(8,\ 2\%)=B\left(8,\ \frac{1}{50}\right)$.

Tražimo vjerojatnost $P(X=1)$. Ona je jednaka:

$$P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot\left(\frac{1}{50}\right)^{1}\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)^{8-1}\approx 0.1389.$$

b) Neka je Y binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj smetnji u vremenskom intervalu od 30 dana = $30\cdot 24=720$ sati. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $Y\sim B(720,\ 2\%)=B\left(720,\ \frac{1}{50}\right)$. Tražimo očekivanje varijable Y. Ono je jednako $E(Y)=720\cdot\frac{1}{50}=14.4$. Dakle, traženi broj je približno jednak 14.

5. Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj davatelja krvi s krvnom grupom 0. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X\sim B(50,\ 45\%)=B\left(50,\ \frac{9}{20}\right)$.

a) Tražimo matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako $E(X)=50\cdot\frac{9}{20}=\frac{45}{2}=22.5$. Dakle, traženi broj je približno jednak 23.

b) Tražimo vjerojatnost $P(X=0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X=0)=\left(1-\frac{9}{20}\right)^{50}=\left(\frac{11}{20}\right)^{50}\approx 1.04264\cdot 10^{-13}.$$

6. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava broj boca s manjim volumnim udjelom alkohola. Odredimo njezin parametar. Ukupan broj pokusa jednak je ukupnom broju boca u uzorku, tj. $n=10000$. Vjerojatnost da slučajno

odabrana boca ima manji volumni udio alkohola jednaka je $p = 0.05\% = \frac{0.05}{100} = \frac{5}{10000}$.

Zbog toga je $\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot \frac{5}{10000} = 5$. Dakle, $X \sim Po(5)$.

a) Tražimo matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako njezinom parametru, tj. $E(X) = \lambda = 5$. Dakle, traženi broj je jednak 5.

b) Tražimo $P(X \geq 6)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5}\left(\frac{5^k}{k!} \cdot e^{-5}\right) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{5}\frac{5^k}{k!}\right) \cdot e^{-5} = 1 - \left(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!}\right) \cdot e^{-5}$$

$$= 1 - \frac{1097}{12} \cdot e^{-5} \approx 0.38404.$$

7. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava ukupan godišnji broj pojave zastoja. Analogno kao u Zadatku 6. zaključujemo da su $n = 12 \cdot 30 = 360$ i $p = 3\% = 0.03$, pa je $\lambda = n \cdot p = 360 \cdot 0.03 = 10.8$. Dakle, $X \sim Po(10.8)$.

a) Tražimo očekivanje varijable X. Odmah slijedi $E(X) = \lambda = 10.8$. Dakle, traženi je broj približno jednak 11.

b) Tražimo $P(X \leq 3)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{10.8^k}{k!} \cdot e^{-10.8}\right) = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{10.8^k}{k!}\right) \cdot e^{-10.8} = \left(\frac{10.8^0}{0!} + \frac{10.8^1}{1!} + \frac{10.8^2}{2!} + \frac{10.8^3}{3!}\right) \cdot e^{-10.8} =$$

$$= \frac{35009}{125 \cdot e^{10.8}} \approx 0.00571.$$

8. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava ukupan dnevni broj vozila. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim Po(2)$.

a) Traženi je broj jednak $m = 12 \cdot 30 \cdot 2 = 720$.

b) Tražimo $P(X = 0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0.13534.$$

9. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava ukupan tjedni broj prodanih polica osiguranja. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim Po(2)$.

a) Tražimo $P(X \geq 1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0.86466.$$

b) Tražimo $P(2 \leq X \leq 5)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(2 \leq X \leq 5) = \sum_{k=2}^{5} \left(\frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2} \right) = \left(\sum_{k=2}^{5} \frac{2^k}{k!} \right) \cdot e^{-2} = \left(\frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \right) \cdot e^{-2} = \frac{64}{15 \cdot e^2} \approx 0.57743.$$

c) Neka je Y Poissonova slučajna varijabla koja označava ukupan dnevni broj prodanih polica. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $Y \sim Po\left(\frac{2}{5}\right)$. Tražimo $P(Y = 1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(Y = 1) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^1}{1!} \cdot e^{-\frac{2}{5}} = \frac{2}{5 \cdot e^{\frac{2}{5}}} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{e^2}} \approx 0.26813.$$

10. Neka je n traženi broj. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava ukupan broj pakiranja keksa s masom strogo manjom od deklarirane. Iz podataka u zadatku slijedi da je $X \sim Po(n \cdot 0.5\%) = Po\left(\frac{n}{200}\right)$. Vjerojatnost da će među ukupno n pakiranja biti barem jedno pakiranje s masom strogo manjom od deklarirane jednaka je:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\left(\frac{n}{200}\right)^0}{0!} \cdot e^{-\frac{n}{200}} = 1 - e^{-\frac{n}{200}}.$$

Prema zahtjevu zadatka ta vjerojatnost mora biti jednaka ili veća od $50\% = \frac{1}{2}$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1 - e^{-\frac{n}{200}} \geq \frac{1}{2}.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$e^{-\frac{n}{200}} \leq 1 - \frac{1}{2},$$

$$e^{-\frac{n}{200}} \le \frac{1}{2}, \quad / \ln$$
$$-\frac{n}{200} \le \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2, \quad / \cdot(-200)$$
$$n \ge 200 \cdot \ln 2 \approx 138.63.$$

Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava tu nejednadžbu je $n = 139$.

11. Neka je n traženi broj. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava ukupan broj pakiranja hrenovki s masom strogo manjom od deklarirane. Analogno kao u prethodnom zadatku zaključujemo da je $X \sim Po\left(\frac{n}{100}\right)$, pa iz zahtjeva $P(X \ge 2) > \frac{30}{100} = 0.3$, koristeći

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot e^{-\frac{n}{100}},$$

dobivamo nejednadžbu:

$$1 - \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot e^{-\frac{n}{100}} \ge 0.3.$$

Koristeći MATLAB dobijemo $n \ge 109.735$. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava tu nejednadžbu je $n = 110$.

12. Neka je X_i Poissonova slučajna varijabla koja označava broj poziva u i-toj minuti, za $i = 1, 2$. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X_i \sim Po(3)$. Koristeći pretpostavku o nezavisnosti promatranih varijabli slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}
&P(X_1 + X_2 \ge 2) = 1 - P(X_1 + X_2 < 2) = 1 - (P(X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 + X_2 = 1)) = \\
&= 1 - (P(X_1 = 0,\ X_2 = 0) + P(X_1 = 0,\ X_2 = 1) + P(X_1 = 1,\ X_2 = 0)) = \\
&= 1 - (P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0)) = \\
&= 1 - (e^{-3} \cdot e^{-3} + e^{-3} \cdot 3 \cdot e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} \cdot e^{-3}) = 1 - 7 \cdot e^{-6} \approx 0.98265.
\end{aligned}$$

6. GRUPA ZADATAKA

1. Izračunajmo najprije vjerojatnost izbora svake žarulje. Iz podatka da su vjerojatnost izbora svake žarulje upravno razmjerna snazi te žarulje zaključujemo da postoji $k>0$ takav da su vjerojatnosti izbora žarulja redom $40\cdot k$, $60\cdot k$, $75\cdot k$ i $100\cdot k$. Budući da mora biti izabrana točno jedna žarulja, zbroj navedenih vjerojatnosti mora biti jednak 1. Tako dobivamo jednadžbu:

$$40\cdot k+60\cdot k+75\cdot k+100\cdot k=1.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$275\cdot k=1,$$
$$k=\frac{1}{275}.$$

Dakle, vjerojatnosti izbora žarulja su redom

$$p_1=40\cdot\frac{1}{275}=\frac{40}{275}=\frac{8}{55},$$
$$p_2=60\cdot\frac{1}{275}=\frac{60}{275}=\frac{12}{55},$$
$$p_3=75\cdot\frac{1}{275}=\frac{75}{275}=\frac{3}{11},$$
$$p_4=100\cdot\frac{1}{275}=\frac{100}{275}=\frac{4}{11}.$$

a) Iz netom izračunatih vjerojatnosti slijedi da je traženi zakon razdiobe:

$$X\sim\begin{pmatrix}40 & 60 & 75 & 100\\ \frac{8}{55} & \frac{12}{55} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11}\end{pmatrix}.$$

b) Koristeći definicijske formule za očekivanje, odnosno standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable, dobivamo redom:

$$E(X)=40\cdot\frac{8}{55}+60\cdot\frac{12}{55}+75\cdot\frac{3}{11}+100\cdot\frac{4}{11}=\frac{64+144+225+400}{11}=\frac{833}{11},$$
$$V(X)=40^2\cdot\frac{8}{55}+60^2\cdot\frac{12}{55}+75^2\cdot\frac{3}{11}+100^2\cdot\frac{4}{11}-\left(\frac{833}{11}\right)^2=\frac{54936}{121},$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{54936}{121}}=\sqrt{\frac{36}{121}\cdot 1526}=\frac{6}{11}\cdot\sqrt{1526}.$$

2. Izračunajmo najprije vjerojatnost svakoga mogućega trajanja pretipkavanja. Iz podatka da je vjerojatnost svakoga pretipkavanja obrnuto razmjerna njegovu trajanju zaključujemo da postoji $k>0$ takav da su vjerojatnosti pretipkavanja redom

$$\frac{1}{2}\cdot k,\ \frac{1}{3}\cdot k,\ \frac{1}{4}\cdot k \text{ i } \frac{1}{5}\cdot k.$$

Budući da mora biti izabrana točno jedna tajnica, zbroj navedenih vjerojatnosti mora biti jednak 1. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{2}\cdot k+\frac{1}{3}\cdot k+\frac{1}{4}\cdot k+\frac{1}{5}\cdot k=1.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot k+\frac{1}{3}\cdot k+\frac{1}{4}\cdot k+\frac{1}{5}\cdot k=1 \quad /\cdot 60\\
&30\cdot k+20\cdot k+15\cdot k+12\cdot k=60,\\
&77\cdot k=60,\\
&k=\frac{60}{77}.
\end{aligned}$$

Dakle, vjerojatnosti trajanja pretipkavanja redom iznose:

$$\begin{aligned}
p_1&=\frac{1}{2}\cdot\frac{60}{77}=\frac{30}{77},\\
p_2&=\frac{1}{3}\cdot\frac{60}{77}=\frac{20}{77},\\
p_3&=\frac{1}{4}\cdot\frac{60}{77}=\frac{15}{77},\\
p_4&=\frac{1}{5}\cdot\frac{60}{77}=\frac{12}{77}.
\end{aligned}$$

a) Iz netom izračunatih vjerojatnosti slijedi da je traženi zakon razdiobe:

$$Y\sim\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ \frac{30}{77} & \frac{20}{77} & \frac{15}{77} & \frac{12}{77}\end{pmatrix}.$$

b) Koristeći definicijske formule za očekivanje, odnosno standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable, dobivamo redom:

$$E(X)=2\cdot\frac{30}{77}+3\cdot\frac{20}{77}+4\cdot\frac{15}{77}+5\cdot\frac{12}{77}=4\cdot\frac{60}{77}=\frac{240}{77},$$

$$V(X)=2^2\cdot\frac{30}{77}+3^2\cdot\frac{20}{77}+4^2\cdot\frac{15}{77}+5^2\cdot\frac{12}{11}-\left(\frac{240}{77}\right)^2=\frac{7080}{5929},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{7080}{5929}}=\sqrt{\frac{4}{5929}\cdot 1770}=\frac{2}{77}\cdot\sqrt{1770}.$$

3. Prvi izvučeni broj je točno jedan element skupa $\mathbf{\Omega}=\{1, 2, \ldots, 44, 45\}$. Taj skup ima točno 45 elemenata. Budući da točno jedan broj mora biti izvučen, zbroj vjerojatnosti izvlačenja mora biti jednak 1. Prema pretpostavci, izvlačenje je pravedno, pa su sve vjerojatnosti izvlačenja međusobno jednake. Tako lagano slijedi da su sve te vjerojatnosti jednake $\frac{1}{45}$.

a) Iz provedena razmatranja slijedi da je traženi zakon razdiobe:

$$P(Z=k)=\frac{1}{45},\ \forall k=1,2,\ldots,44,45,$$

odnosno, u tabličnom obliku,

$$Z\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & 44 & 45\\ \frac{1}{45} & \frac{1}{45} & \ldots & \frac{1}{45} & \frac{1}{45}\end{pmatrix}.$$

b) Primijenimo identitete:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

koji vrijede za svaki $n\in\mathbb{N}$. Koristeći definicijske formule za očekivanje i standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable dobivamo:

$$E(X)=\frac{1}{45}\cdot(1+2+\ldots+44+45)=\frac{1}{45}\cdot\frac{45\cdot(45+1)}{2}=\frac{46}{2}=23,$$

$$V(X)=\frac{1}{45}\cdot(1^2+2^2+\ldots+44^2+45^2)-23^2=\frac{1}{45}\cdot\frac{45\cdot(45+1)\cdot(2\cdot 45+1)}{6}-529=$$

$$=\frac{23\cdot 91}{3}-529=\frac{506}{3},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{506}{3}}=\sqrt{\frac{506\cdot 3}{3^2}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1518}.$$

4. Prvi izvučeni broj je točno jedan element skupa $\Omega = \{1, 2, \ldots, , 90\}$. Taj skup ima točno 90 elemenata. Budući da točno jedan broj mora biti izvučen, zbroj vjerojatnosti izvlačenja mora biti jednak 1. Prema pretpostavci, izvlačenje je pravedno, pa su sve vjerojatnosti izvlačenja međusobno jednake. Tako lagano slijedi da su sve te vjerojatnosti jednake $\frac{1}{90}$.

a) Iz provedena razmatranja slijedi da je traženi zakon razdiobe:

$$P(B=k)=\frac{1}{90},\ \forall k=1,2,\ldots,89,90,$$

odnosno, u tabličnom obliku,

$$B\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 89 & 90 \\ \frac{1}{90} & \frac{1}{90} & \ldots & \frac{1}{90} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}.$$

b) Primjenom identiteta iz rješenja zadatka 3. b), te koristeći definicijske formule za očekivanje i standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable dobivamo:

$$E(B)=\frac{1}{90}\cdot(1+2+\ldots+89+90)=\frac{1}{90}\cdot\frac{90\cdot(90+1)}{2}=\frac{91}{2},$$

$$V(X)=\frac{1}{90}\cdot(1^2+2^2+\ldots+89^2+90^2)-\left(\frac{91}{2}\right)^2=\frac{1}{90}\cdot\frac{90\cdot(90+1)\cdot(2\cdot 90+1)}{6}-\frac{8281}{4}=$$

$$=\frac{91\cdot 181}{6}-\frac{8281}{4}=\frac{8099}{12},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8099}{12}}=\sqrt{\frac{8099\cdot 3}{12\cdot 3}}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{24297}.$$

5. Neka je X slučajna varijabla koja označava broj udaraca prema golu sve do prvoga zgoditka (uračunavajući i udarac koji je rezultirao zgoditkom). Vjerojatnost postizanja zgoditka u svakom udarcu iznosi $p = 40\% = 0.4$, pa zaključujemo da je $X\sim G(0.4)$, tj. X je geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p=0.4$.

a) Tražimo očekivanje varijable X. Ono iznosi $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5$, pa je traženi broj približno jednak 3.

b) Tražimo vjerojatnost $P(X\geq 4)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X\geq 4)=P(X>3)=(1-p)^3=\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}.$$

6. Neka je X slučajna varijabla koja označava broj sedmeraca sve do prvoga zgoditka (uračunavajući i udarac koji je rezultirao zgoditkom).Vjerojatnost postizanja zgoditka u svakom udarcu iznosi $p = 80\% = 0.8$, pa zaključujemo da je $X \sim G(0.8)$, tj. X je geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p = 0.8$.

a) Tražimo očekivanje varijable X. Ono iznosi $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1.25$, pa je traženi broj približno jednak 1.

b) Tražimo vjerojatnost $P(X \le 3)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \le 3) = 1 - \left(1 - \frac{4}{5}\right)^3 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 1 - \frac{1}{125} = \frac{124}{125}.$$

7. Izračunat ćemo aritmetičku sredinu i varijancu zadanoga niza podataka. Dobiveni rezultati ujedno će biti matematičko očekivanje, odnosno varijanca tražene binomne razdiobe. Imamo redom:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5}{40} = \frac{10 + 20 + 15}{40} = \frac{45}{40} = \frac{9}{8},$$

$$\sigma^2 = \frac{1^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 10 + 3^2 \cdot 5}{40} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{10 + 40 + 45}{40} - \frac{81}{64} = \frac{71}{64}.$$

Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj neispravnih baterija u svakom uzorku. Pretpostavimo li da je $X \sim B(n, p)$, dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} n \cdot p = \frac{9}{8}, \\ n \cdot p \cdot (1 - p) = \frac{71}{64}. \end{cases}$$

Dijeljenjem druge jednadžbe prvom dobijemo $1 - p = \frac{71}{72}$, a odatle je $p = \frac{1}{72}$. Iz prve jednadžbe odmah slijedi $n = 81$. Dakle, $X \sim B\left(81, \frac{1}{72}\right)$.

Izračunajmo vjerojatnost da su sve baterije u uzorku ispravne, tj. $P(X = 0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{72}\right)^{81} = \left(\frac{71}{72}\right)^{81}.$$

S druge je strane ista vjerojatnost jednaka količniku ukupnoga broja uzoraka u kojima su sve baterije ispravne i ukupnoga broja svih uzoraka. Označimo li s n_0 očekivani ukupan broj uzoraka u kojima su sve baterije ispravne, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{n_0}{40} = \left(\frac{71}{72}\right)^{81}$$

iz koje je

$$n_0 = \left(\frac{71}{72}\right)^{81} \cdot 40 \approx 12.8841 \approx 13.$$

8. Iskoristit ćemo svojstvo Poissonove razdiobe prema kojemu je parametar te razdiobe jednak njezinu očekivanju, odnosno varijanci. U rješenju prethodnoga zadatka smo zaključili da su $\bar{x} = \frac{9}{8}$ i $\sigma^2 = \frac{71}{64}$. Primijetimo da je $\left|\bar{x} - \sigma^2\right| = \frac{1}{64} = 0.015625$, što znači da se ti brojevi razlikuju počevši od druge znamenke iza decimalne točke. Zbog toga možemo uzeti $\lambda = 1.1$ tj. $X \sim Po(1.1)$.

Analogno kao u prethodnom zadatku odredimo:

$$n_0 = P(X=0) \cdot 40 = \frac{1.1^0}{0!} \cdot e^{-1.1} \cdot 40 = \frac{40}{e^{1.1}} \approx 13.31484 \approx 13.$$

9. Analogno kao u rješenju zadatka 7., izračunat ćemo aritmetičku sredinu i varijancu zadanih grupiranih podataka. U tu svrhu najprije odredimo sredinu svakoga razreda. Dobivamo sljedeću tablicu.

Razredna sredina	2	6	10	14	*Ukupno*
Broj studenata	10	77	9	4	100

Tablica 11.

Tako sada imamo:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 10 + 6 \cdot 77 + 10 \cdot 9 + 14 \cdot 4}{100} = \frac{20 + 462 + 90 + 56}{100} = \frac{628}{100} = \frac{157}{25},$$

$$\sigma^2 = \frac{2^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 77 + 10^2 \cdot 9 + 14^2 \cdot 4}{100} - \left(\frac{157}{25}\right)^2 = \frac{40 + 2772 + 900 + 784}{100} - \frac{24649}{625} = \frac{3451}{625}.$$

Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava ukupan ostvareni broj bodova. Pretpostavimo li da je $X \sim B(n, p)$, dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} n \cdot p = \dfrac{157}{25}, \\ n \cdot p \cdot (1-p) = \dfrac{3451}{625}. \end{cases}$$

Dijeljenjem druge jednadžbe prvom dobijemo $1-p = \dfrac{3451}{3925}$, a odatle je $p = \dfrac{474}{3925}$. Iz prve jednadžbe odmah slijedi $n = \dfrac{24649}{474} \approx 52.$ Dakle, $X \sim B\left(52,\ \dfrac{474}{3925}\right)$.

Izračunajmo vjerojatnost da je slučajno odabrani student ostvario točno 8 bodova, tj. $P(X=8)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X=8) = \binom{52}{8} \cdot \left(\frac{474}{3925}\right)^8 \cdot \left(1 - \frac{474}{3925}\right)^{52-8} \approx 0.118215.$$

S druge je strane ista vjerojatnost jednaka količniku ukupnoga broja studenata koji su ostvarili točno 8 bodova i ukupnoga broja svih studenata. Označimo li s n_0 očekivani ukupan broj uzoraka u kojima su sve baterije ispravne, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{n_0}{100} = 0.118215$$

iz koje je

$$n_0 = 0.118215 \cdot 100 = 11.8215 \approx 12.$$

10. Analogno kao u rješenju zadatka 9., izračunat ćemo aritmetičku sredinu i varijancu zadanih grupiranih podataka. U tu svrhu najprije odredimo sredinu svakoga razreda. Dobivamo sljedeću tablicu.

Razredna sredina	1	3	5	7	*Ukupno*
Broj dana	4	9	6	11	30

Tablica 12.

Tako sada imamo:

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 4 + 3\cdot 9 + 5\cdot 6 + 7\cdot 11}{30} = \frac{4+27+30+77}{100} = \frac{141}{30} = \frac{47}{10},$$

$$\sigma^2 = \frac{1^2\cdot 4 + 3^2\cdot 9 + 5^2\cdot 6 + 7^2\cdot 11}{30} - \left(\frac{47}{10}\right)^2 = \frac{4+81+150+539}{30} - \frac{2209}{100} = \frac{371}{100}.$$

Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava dnevni broj pregledanih pacijenata. Primijetimo da je $\left|x-\sigma^2\right| = \frac{99}{100}$, pa možemo uzeti $\lambda = 4$. Dakle, $X \sim Po(4)$.

Izračunajmo vjerojatnost da su u slučajno odabranom danu točno tri pregledana pacijenta bolovala od crijevne viroze. Dakle, tražimo $P(X=3)$, a ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X=3) = \frac{4^3}{3!}\cdot e^{-4} = \frac{32}{3\cdot e^4} \approx 0.195367.$$

S druge strane, ta je vjerojatnost jednaka količniku ukupnoga broja pregledanih pacijenata koji su bolovali od crijevne viroze i ukupnoga broja svih pregledanih pacijenata. Označimo li traženi broj s n_3, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{n_3}{30} = \frac{32}{3\cdot e^4}$$

iz koje je

$$n_3 = \frac{32\cdot 30}{3\cdot e^4} = \frac{320}{e^4} \approx 5.861 \approx 6.$$

7. GRUPA ZADATAKA

1. a) Koristit ćemo osnovna svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti. Ona mora biti definirana i nenegativna na skupu $\mathbb{R}$, te mora vrijediti jednakost: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 1.$

Funkcija f je očito definirana na skupu $\mathbb{R}$, pa je taj zahtjev ispunjen.

Za svaki $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$ vrijedi $f(x)=0$, pa je na tom skupu funkcija f očito nenegativna. Za svaki $x\in[-1,1]$ vrijedi $f(x)=\frac{a-x}{2}$, pa moramo postaviti zahtjev $\frac{a-x}{2}\geq 0$. Odavde je $a-x\geq 0$, odnosno $x\leq a$. Ta nejednakost mora vrijediti za svaki $x\in[-1,1]$ ili, ekvivalentno, za $-1\leq x\leq 1$. Sada iz nejednakosti $x\leq a$ i $x\leq 1$ slijedi da mora vrijediti nejednakost $a\geq 1$. Zbog toga u daljnjem pretpostavljamo da je $a\geq 1$.

Preostaje provjeriti jednakost $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 1.$ Iako se na prvi pogled čini da ćemo morati računati nepravi integral, to zapravo nije točno. Naime, kako znamo iz predmeta *Matematika* 2, određeni ili nepravi integral nulfunkcije $g(x)=0$ na *bilo kojem* intervalu jednak je nuli. Zbog toga trebamo računati navedeni nepravi integral funkcije f samo na onim dijelovima skupa $\mathbb{R}$ na kojima je funkcija f različita od nulfunkcije. U ovom je slučaju riječ o segmentu $[-1,1]$, pa imamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot \mathrm{d}x = \left[\frac{a}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_{-1}^{1} =$$
$$=\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{2}-\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}=a.$$

Dakle, jednakost $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 1$ je ekvivalentna jednakosti $a=1$. Ta vrijednost zadovoljava uvjet $a\geq 1$, pa je ona rješenje podzadatka. Zaključimo:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{2}, & \text{za } x\in[-1,1],\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

b) Koristit ćemo definicijske relacije očekivanja i standardne devijacije neprekidne slučajne varijable, pri čemu ćemo neprave integrale računati samo na segmentu $[-1,1]$. Tako redom imamo:

$$E(X)=\int_{-1}^{1} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} x\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3},$$

$$V(X)=\int_{-1}^{1} x^2\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x-(E(X))^2=\int_{-1}^{1} x^2\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x^3\right)\cdot \mathrm{d}x-\frac{1}{9}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{9}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{9}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}.$$

c) Prema definiciji funkcije razdiobe vjerojatnosti vrijedi jednakost:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\cdot \mathrm{d}t.$$

Zbog toga ćemo razlikovati točno tri slučaja:

I. $x<-1$. U ovome je slučaju $F(x)=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot \mathrm{d}t=0.$

II. $x\in[-1,1]$. U ovome je slučaju:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\cdot \mathrm{d}t+\int_{-1}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot \mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}\left(\frac{1-t}{2}\right)\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=0+\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\right]_{-1}^{x}=\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot x^2\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}.$$

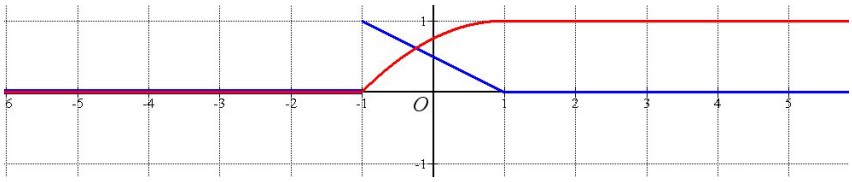
III. $x>1$. U ovome je slučaju $F(x)=1$, što lako možemo provjeriti ovako:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\cdot \mathrm{d}t+\int_{-1}^{1} f(t)\cdot \mathrm{d}t+\int_{1}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot \mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{2}\right)\cdot \mathrm{d}t+\int_{1}^{x} 0\cdot \mathrm{d}t\overset{\text{prema a)}}{=}0+1+0=1.$$

Dakle,

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x<-1,\\ -\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}, \text{ za } x\in[-1,1],\\ 1, \text{ za } x>1.\end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 10. (Graf funkcije f izvučen je plavom bojom, a graf funkcije F crvenom bojom.)



Slika 10.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

2. a) Prirodna domena zadane funkcije je očito skup $\mathbb{R}$. Zbog stroge pozitivnosti eksponencijalne funkcije e^x, zadana funkcija će biti nenegativna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako vrijedi nejednakost $a\geq 0$. Zbog toga nadalje pretpostavljamo da je $a\geq 0$.

Analogno kao u zadatku 1. a) računamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot \mathrm{d}y=\int_{1}^{+\infty} f(y)\cdot \mathrm{d}y=\int_{1}^{+\infty} a\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\lim_{b\to+\infty}\left(\int_{1}^{b} a\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(a\cdot\int_{1}^{b} e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_{1}^{b} e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\right)=a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left[-e^{1-y}\right]_1^b\right)=a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{1-b}-(-1)\right)=a\cdot(0+1)=a,$$

jer su

$$\int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=1-y,\\ \mathrm{d}t=(1-y)'\cdot \mathrm{d}y=-1\cdot \mathrm{d}y\Rightarrow \mathrm{d}y=-\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int e^{t}\cdot(-\mathrm{d}t)=-\int e^{t}\cdot \mathrm{d}t=-e^{t}=-e^{1-y}+C,\ C\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{y\to+\infty} e^{1-y}=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=1-y,\\ \text{kad } y\to+\infty,\ \text{onda } t\to-\infty\end{array}\right\}=\lim_{t\to-\infty} e^{t}=0.$$

Tako iz zahtjeva $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot \mathrm{d}y=1$ izravno slijedi $a=1$. Ta vrijednost zadovoljava uvjet $a\geq 0$, pa je ona rješenje ovoga podzadatka. Zaključimo:

$$f(y)=\begin{cases} e^{1-y},\ \text{za } y\geq 1,\\ 0,\ \text{inače.}\end{cases}$$

b) Odredimo najprije neodređene integrale $\int y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y$ i $\int y^2\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y$. Primjenom metode djelomične integracije i rezultata dobivenih u **a)** podzadatku dobivamo:

$$\int y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\left|\begin{array}{ll} u=y & v=\int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=-e^{1-y}\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}y & \mathrm{d}v=e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\end{array}\right|=-y\cdot e^{1-y}-\int -e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=$$

$$=-y\cdot e^{1-y}+\int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=-y\cdot e^{1-y}-e^{1-y}=(-y-1)\cdot e^{1-y}+C,\ C\in\mathbb{R},$$

$$\int y^2\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\left|\begin{array}{ll} u=y^2 & v=\int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=-e^{1-y}\\ \mathrm{d}u=2\cdot y\cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v=e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\end{array}\right|=-y^2\cdot e^{1-y}-\int -e^{1-y}\cdot 2\cdot y\cdot \mathrm{d}y=$$

$$=-y^2\cdot e^{1-y}+2\cdot\int y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=-y^2\cdot e^{1-y}+2\cdot(-y-1)\cdot e^{1-y}=(-y^2-2\cdot y-2)\cdot e^{1-y}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Primijenimo definicijske formule za očekivanje i standardnu devijaciju neprekidne slučajne varijable, pri čemu neprave integrale računamo na intervalu $[1,+\infty\rangle$ na kojemu je zadana funkcija različita od nulfunkcije. Dobivamo:

$$E(Y)=\int_1^{+\infty} y\cdot f(y)\cdot \mathrm{d}y=\int_1^{+\infty} y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\lim_{b\to+\infty}\left(\left[(-y-1)\cdot e^{1-y}\right]_1^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left((-b-1)\cdot e^{1-b}-(-1-1)\cdot e^{1-1}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(2-\frac{b+1}{e^{b-1}}\right)=2-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b+1}{e^{b-1}}\right)\overset{\text{L'Hôpitalovo pravilo}}{=}$$

$$=2-\lim_{b\to+\infty}\left[\left(\frac{b+1}{e^{b-1}}\right)\right]'=2-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1+0}{e^{b-1}\cdot 1}\right)=2-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b-1}}\right)=2-0=2,$$

$$V(Y)=\int_1^{+\infty} y^2\cdot f(y)\cdot \mathrm{d}y-\left(E(Y)\right)^2=\int_1^{+\infty} y^2\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y-2^2=\lim_{b\to+\infty}\left(\left[(-y^2-2\cdot y-2)\cdot e^{1-y}\right]_1^b\right)-4=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left((-b^2-2\cdot b-2)\cdot e^{1-b}-(-1-2\cdot 1-2)\cdot e^{1-1}\right)-4=\lim_{b\to+\infty}\left(5-(b^2+2\cdot b+2)\cdot e^{1-b}\right)-4=$$

$$=5-\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2+2\cdot b+2}{e^{b-1}}-4=1-\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2+2\cdot b+2}{e^{b-1}}\overset{\text{L'Hôpitalovo pravilo}}{=}1-\lim_{b\to+\infty}\frac{2\cdot b+2}{e^{b-1}\cdot 1}\overset{\text{L'Hôpitalovo pravilo}}{=}$$

$$=1-\lim_{b\to+\infty}\frac{2\cdot 1}{e^{b-1}\cdot 1}=1-0=1,$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{1}=1.$$

c) Sada ćemo razlikovati točno dva slučaja.

I. $t<1$. U ovome je slučaju $F(y)=\int_{-\infty}^{y} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{y} 0\cdot \mathrm{d}t=0.$

II. $t\geq 1$. U ovome je slučaju:

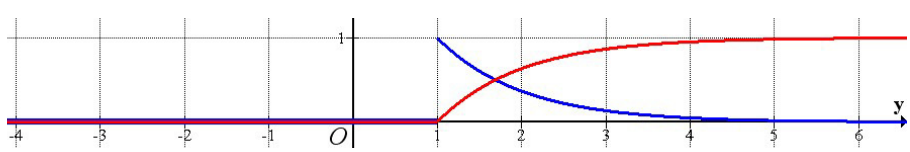
$$F(y)=\int_{-\infty}^{y} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{1} f(t)\cdot \mathrm{d}t+\int_{1}^{y} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot \mathrm{d}t+\int_{1}^{y} e^{1-t}\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=\left[-e^{1-t}\right]_1^y=-e^{1-y}-(-e^{1-1})=-e^{1-y}+1=1-e^{1-y}.$$

Dakle,

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{1-y}, & \text{za } y\geq 1,\\ 0, & \text{za } y<1.\end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 11. (Graf funkcije f izvučen je plavom, a graf funkcije F crvenom bojom.)



Slika 11.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a \le Y < b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(2 \le Y < 3) = F(3) - F(2) = \left(1 - e^{1-3}\right) - \left(1 - e^{1-2}\right) = e^{-1} - e^{-2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2}.$$

3. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je M neprekidna jednolika slučajna varijabla. Njezina slika je segment $[10,15]$ jer je vrijeme čekanja neki realan broj upravo iz toga intervala. Dakle, $M \sim U(10,15)$.

a) Odmah imamo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15-10}, & \text{za } x \in [10,15], \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & \text{za } x \in [10,15], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

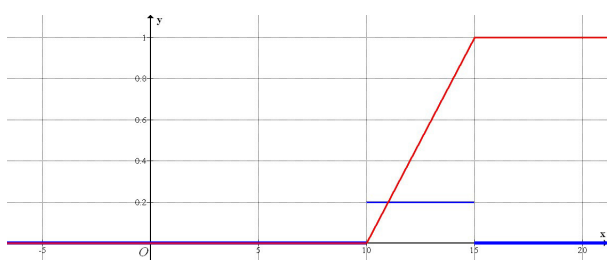
b) Odmah imamo:

$$E(M) = \frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12.5,$$
$$\sigma(M) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (15-10) = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{3}.$$

c) Odmah imamo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 10, \\ \dfrac{x-10}{15-10}, & \text{za } x \in [10,15], \\ 1, & \text{za } x > 15 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 10, \\ \dfrac{x-10}{5}, & \text{za } x \in [10,15], \\ 1, & \text{za } x > 15 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 10, \\ \dfrac{1}{5} \cdot x - 2, & \text{za } x \in [10,15], \\ 1, & \text{za } x > 15. \end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 12. (Graf funkcije f izvučen je plavom, a graf funkcije F crvenom bojom.)



Slika 12.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a < M < b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(12 < M < 14) = F(14) - F(12) = \left(\frac{1}{5}\cdot 14 - 2\right) - \left(\frac{1}{5}\cdot 12 - 2\right) = \frac{14}{5} - \frac{12}{5} = \frac{2}{5}.$$

4. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je S neprekidna jednolika slučajna varijabla. Njezina slika je segment $[1,5]$ jer je vrijeme čekanja neki realan broj upravo iz toga intervala. Dakle, $M \sim U(1,5)$.

a) Odmah imamo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-1}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

b) Odmah imamo:

$$E(S) = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$
$$\sigma(S) = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(5-1) = \frac{4}{6}\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}.$$

c) Odmah imamo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{5-1}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 1, & \text{za } x > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{4}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 1, & \text{za } x > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1, \\ \dfrac{1}{4}\cdot x - \dfrac{1}{4}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 1, & \text{za } x > 5. \end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 13. (Graf funkcije f izvučen je plavom, a graf funkcije F crvenom bojom.)

Slika 13.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a \le S \le b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(S \le 3) = P(0 \le S \le 3) = F(3) - F(0) = \left(\frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. a) Prema podacima u zadatku, u jednom se satu na pisač upute prosječno tri zahtjeva za ispis. To znači da između dvaju zahtjeva protekne prosječno $\frac{1}{3}$ sata = 20 minuta. Ta vrijednost je ujedno i traženo očekivanje varijable X.

Na temelju ovoga podatka možemo odrediti parametar a varijable X. Naime, znamo da je očekivanje svake eksponencijalne slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti njezina parametra. Tako iz jednadžbe $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$ odmah slijedi $a = 3$, pa je $X \sim Exp(3)$.

b) Primijetimo da je 5 minuta = $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ sati. Dakle, tražimo vjerojatnost $P\left(X \le \frac{1}{12}\right)$. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Tada je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P\left(X \le \frac{1}{12}\right) = F\left(\frac{1}{12}\right) = 1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{12}} = 1 - e^{-\frac{1}{4}}.$$

c) Neka je t traženo vrijeme. Znamo da mora vrijediti nejednakost $P(X \le t) \ge 90\%$. Prema **b)** podzadatku je $P(X \le t) = F(t) = 1 - e^{-3 \cdot t}$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1 - e^{-3 \cdot t} \ge 90\% = 0.9 .$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
&1 - e^{-3 \cdot t} \ge 0.9, \\
&-e^{-3 \cdot t} \ge 0.9 - 1, \\
&e^{-3 \cdot t} \le 0.1, \quad / \ln \\
&-3 \cdot t \le \ln 0.1, \\
&t \ge -\frac{\ln 0.1}{3} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{3} = -\frac{\ln 1 - \ln 10}{3} = -\frac{0 - \ln 10}{3} = -\frac{-\ln 10}{3} = \frac{1}{3} \cdot \ln 10.
\end{aligned}$$

Dakle, traženo vrijeme je $t_{\min} = \frac{1}{3} \cdot \ln 10 \text{ sati} \approx 46 \text{ minuta.}$

6. **a)** Prema podacima u zadatku, u jednoj minuti zabilježe se prosječno dvije posjete To znači da između dviju posjeta protekne prosječno $\frac{1}{2}$ minute = 30 sekundi. Ta vrijednost je ujedno i traženo očekivanje varijable Y.

Na temelju ovoga podatka možemo odrediti parametar a varijable Y. Naime, znamo da je očekivanje svake eksponencijalne slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti njezina parametra. Tako iz jednadžbe $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ odmah slijedi $a = 2$, pa je $Y \sim Exp(2)$.

b) Primijetimo da je 40 sekundi = $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ minute. Dakle, tražimo vjerojatnost $P\left(X \ge \frac{2}{3}\right)$. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable Y. Tada je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P\left(X \ge \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(X \le \frac{2}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(1 - e^{-2 \cdot \frac{2}{3}}\right) = e^{-\frac{4}{3}}.$$

c) Znamo da je između dvije uzastopne posjete proteklo više od jedne minute. Budući da je 1 minuta 40 sekundi $= 1+\frac{40}{60}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ minuta, tražimo uvjetnu vjerojatnost $P\left(X \geq \frac{5}{3} \mid X>1\right)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti imamo:

$$P\left(X \geq \frac{5}{3} \mid X>1\right)=\frac{P\left(X \geq \frac{5}{3}, X>1\right)}{P(X>1)}=\frac{P\left(X \geq \frac{5}{3}\right)}{P(X>1)}=\frac{1-P\left(X<\frac{5}{3}\right)}{1-P(X<1)}=\frac{1-F\left(\frac{5}{3}\right)}{1-F(X<1)}=$$

$$=\frac{1-\left(1-e^{-2\cdot\frac{5}{3}}\right)}{1-\left(1-e^{-2\cdot 1}\right)}=\frac{e^{-2\cdot\frac{5}{3}}}{e^{-2\cdot 1}}=e^{-\frac{10}{3}-(-2)}=e^{-\frac{4}{3}}.$$

Napomena: U rješenjima zadataka 7. – 13. s F^* je označena funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

7. **a)** Odmah imamo: $P(X<0.12)=F^*(0.12)=0.54476.$

b) Iz zadane jednakosti slijedi:

$$P(X \geq x)=0.1335 \Leftrightarrow 1-P(X \leq x)=0.1335 \Leftrightarrow P(X \leq x)=1-0.1335=0.8665 \Leftrightarrow F^*(x)=0.8665.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(1.11)=0.8665$. Zbog injektivnosti funkcije F^* slijedi $x=1.11$.

8. **a)** Odmah imamo:

$$P(X>-0.5)=1-P(X \leq -0.5)=1-F^*(-0.5)=1-(1-F^*(0.5))=F^*(0.5)=0.69146.$$

b) Iz zadane jednakosti slijedi $F^*(x)=0.02275$. Zbog toga imamo redom:

$$\begin{aligned}&F^*(x)=0.02275 \Leftrightarrow P(X \leq x)=0.00275 \Leftrightarrow P(X \geq 2\cdot 0-x)=0.00275 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow P(X \geq -x)=0.00275 \Leftrightarrow 1-P(X \leq -x)=0.00275 \Leftrightarrow P(X \leq -x)=0.99725 \Leftrightarrow\\ &P(X \leq -x)=F^*(2) \Leftrightarrow 0=-x-1\cdot 2 \Leftrightarrow -x-2=0 \Leftrightarrow -x=2 \Leftrightarrow x=-2.\end{aligned}$$

9. **a)** Imamo redom:

$$P(0.8 \leq X<1.2)=F^*\left(\frac{1.2-1}{2}\right)-F^*\left(\frac{0.8-1}{2}\right)=F^*(0.1)-F^*(-0.1)=F^*(0.1)-(1-F^*(0.1))=$$

$$=2\cdot F^*(0.1)-1=2\cdot 0.53983-1=0.07966.$$

b) Imamo redom:

$$P(X \geq x) = 0.02807 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq x) = 0.02807 \Leftrightarrow P(X \leq x) = 0.97193 \Leftrightarrow F^*\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0.97193.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(1.91) = 0.97193$. Zbog injektivnosti funkcije F^* mora vrijediti jednakost $\frac{x-1}{2} = 1.91$, a odatle je $x = 4.82$.

10. Imamo redom:

$$P(Z_1 \leq 10) = 0.15866 \Leftrightarrow 1 - P(Z_1 \geq 10) = 0.15866 \Leftrightarrow P(Z_1 \geq 10) = 0.84134 \Leftrightarrow$$
$$P(Z_1 \geq 10) = F^*(1) \Leftrightarrow x = 10 + 20 \cdot 1 = 30.$$

11. Imamo redom:

$$P(Z_2 > 50) = 0.97725 \Leftrightarrow P(Z_2 > 50) = F^*(2) \Leftrightarrow 60 = 50 + 2 \cdot \sigma \Leftrightarrow 2 \cdot \sigma = 10 \Leftrightarrow \sigma = 5.$$

12. Neka je V normalna slučajna varijabla koja označava prosječnu brzinu vozila. Prema podacima u zadatku, vrijedi: $V \sim N\left(50, 10^2\right)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(45 \leq V \leq 55)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(45 \leq V \leq 55) = F^*\left(\frac{55-50}{10}\right) - F^*\left(\frac{45-50}{10}\right) = F^*\left(0.5\right) - F^*\left(-0.5\right) =$$
$$= F^*\left(0.5\right) - \left(1 - F^*\left(0.5\right)\right) = 2 \cdot F^*(0.5) - 1 = 2 \cdot 0.69146 - 1 = 0.38292.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(V > 60)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V > 60) = 1 - P(V \leq 60) = 1 - F^*\left(\frac{60-50}{10}\right) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(V < 40)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V < 40) = F^*\left(\frac{40-50}{10}\right) = F^*(-1) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866.$$

d) Tražimo vrijednost $v \in \mathbb{R}$ takvu da vrijedi nejednakost $P(V \leq v) = 90\% = 0.9$. U tablici vrijednosti funkcije F^* *ne* postoji vrijednost 0.9, pa ćemo u toj tablici naći vrijednost najbližu 0.9. To je $F^*(1.28) = 0.89973$. Zbog toga mora vrijediti jednakost $P(V \leq v) = F^*(1.28)$. Odatle dobijemo jednadžbu $50 = v - 10 \cdot 1.28$ čije jedinstveno rješenje je $v = 62.8$ km/h.

13. Radi jednostavnosti i kratkoće pisanja, pretpostavimo da su svi novčani iznosi iskazani u 000 000 €. Neka je D normalna slučajna varijabla koja označava ukupan godišnji prihod. Prema podacima u zadatku, vrijedi: $D \sim N\left(10, 2^2\right)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(9 \le D \le 13)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(9 \le D \le 13) = F^*\left(\frac{13-10}{2}\right) - F^*\left(\frac{9-10}{2}\right) = F^*\left(1.5\right) - F^*\left(-0.5\right) =$$
$$= F^*\left(1.5\right) - \left(1 - F^*\left(0.5\right)\right) = F^*(1.5) + F^*(0.5) - 1 = 0.93319 + 0.69146 - 1 = 0.62465.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(D < 8)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(D < 8) = F^*\left(\frac{8-10}{2}\right) = F^*(-1) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(D > 15)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(D > 15) = 1 - P(D \le 15) = 1 - F^*\left(\frac{15-10}{2}\right) = 1 - F^*(2.5) = 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

d) Tražimo vrijednost $x \in \mathbb{R}$ takvu da vrijedi nejednakost $P(D > x) \ge 95\% = 0.95$. U tablici vrijednosti funkcije F^* *ne* postoji vrijednost 0.95, pa ćemo u toj tablici naći najmanju vrijednost strogo veću od 0.95. To je $F^*(1.65) = 0.95053$. Tako dobivamo nejednakost $P(D > x) \ge F^*(1.65)$. Iz te nejednakosti slijedi $10 \ge x + 2 \cdot 1.65$, a odavde je $x \le 10 - 2 \cdot 1.65 = 6.7$. Zbog toga je tražena vrijednost jednaka 6 700 000 €.

8. GRUPA ZADATAKA

1. U ovom zadatku je slučajni pokus *utvrđivanje ispravnosti računala*. Taj pokus ima točno dva ishoda: *uspjeh* (računalo je ispravno) i *neuspjeh* (računalo nije ispravno). Budući da u pošiljki računala ima točno 80 računala, pokus izvodimo ukupno $n = 80$ puta. Nadalje, iz podatka da na svakih 100 računala postoje prosječno 4 računala s određenim tehničkim nedostatkom, zaključujemo da na svakih 100 računala postoji prosječno 96 ispravnih računala. Zbog toga je vjerojatnost *uspjeha* $p = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$.

Tako smo utvrdili da je X binomna slučajna varijabla s parametrima $n = 80$ i $p = \frac{24}{25} = 0.96$, tj. $X \sim B(80, 0.96)$.

a) Ako su sva računala u pošiljci ispravna, to znači da se u svih 80 izvođenja slučajnoga pokusa dogodio *uspjeh*. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(X = 80)$. Ona je jednaka:

$$P(A) = P(X = 80) = p^n = 0.96^{80} \approx 0.03817$$

Ako se u pošiljci nalazi točno 77 ispravnih računala, to znači da se u 77 izvođenja slučajnoga pokusa dogodio *uspjeh*, a u preostala $80 - 77 = 3$ izvođenja toga pokusa *neuspjeh*. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(X = 77)$. Ona je jednaka:

$$P(B) = P(X = 77) = \binom{80}{77} \cdot (0.96)^{77} \cdot (1 - 0.96)^3 = \binom{80}{80-77} \cdot 0.96^{77} \cdot 0.04^3 =$$
$$= \binom{80}{3} \cdot 0.96^{77} \cdot 0.04^3 = 82160 \cdot 0.96^{77} \cdot 0.04^3 \approx 0.22684.$$

Ako se u pošiljci nalazi barem 78 ispravnih računala, to znači da se u barem 78 izvođenja slučajnoga pokusa dogodio *uspjeh*. Preciznije, to znači da se *uspjeh* dogodio ili u 78 izvođenja ili u 79 izvođenja ili u svih 80 izvođenja. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(X \geq 78)$. Ona je jednaka:

$$P(C) = P(X \geq 78) = P(X = 78) + P(X = 79) + P(X = 80) =$$
$$= \binom{80}{78} \cdot (0.96)^{78} \cdot (1 - 0.96)^{80-78} + \binom{80}{79} \cdot (0.96)^{79} \cdot (1 - 0.96)^{80-79} + (0.96)^{80} =$$
$$= \binom{80}{80-78} \cdot 0.96^{78} \cdot 0.04^2 + \binom{80}{80-79} \cdot 0.96^{79} \cdot 0.04^1 + 0.96^{80} =$$

$$=\binom{80}{2}\cdot 0.96^{78}\cdot 0.04^{2}+\binom{80}{1}\cdot 0.96^{79}\cdot 0.04+0.96^{80}=$$
$$=3160\cdot 0.96^{78}\cdot 0.04^{2}+80\cdot 0.96^{79}\cdot 0.04+0.96^{80}\approx 0.37479.$$

b) Odmah imamo:

$$E(X)=n\cdot p=80\cdot 0.96=76.8,\ V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=80\cdot 0.96\cdot 0.04=3.072,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3.072}\approx 1.75271.$$

2. U ovom zadatku je slučajni pokus *utvrđivanje ispravnosti baterije*. Taj pokus ima točno dva ishoda: *uspjeh* (baterija je ispravna) i *neuspjeh* (baterija nije ispravna). Budući da u uzorku ima točno 60 baterija, pokus izvodimo ukupno $n=60$ puta. Nadalje, iz podatka da u pošiljci od 200 baterija postoji točno 40 neispravnih baterija, zaključujemo da u pošiljci od 200 baterija postoji prosječno $200-40=160$ ispravnih baterija. Zbog toga je vjerojatnost *uspjeha* $p=\frac{160}{200}=\frac{4}{5}=0.8$.

Tako smo utvrdili da je Y binomna slučajna varijabla s parametrima $n=60$ i $p=\frac{4}{5}=0.8$, tj. $Y\sim B(60,0.8)$.

a) Ako su sve baterije u uzorku ispravne, to znači da se u svih 60 izvođenja slučajnoga pokusa dogodio *uspjeh*. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(Y=80)$. Ona je jednaka:

$$P(A)=P(Y=60)=p^{n}=0.8^{60}\approx 1.5325\cdot 10^{-6}.$$

Ako se u uzorku nalaze najviše dvije neispravne baterije, to znači da se u barem $60-2=58$ izvođenja slučajnoga pokusa dogodio *uspjeh*. Preciznije, to znači da se *uspjeh* dogodio ili u 58 izvođenja ili u 59 izvođenja ili u svih 60 izvođenja. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(Y\geq 58)$. Ona je jednaka:

$$P(B)=P(Y\geq 58)=P(Y=58)+P(Y=59)+P(Y=60)=$$
$$=\binom{60}{58}\cdot(0.8)^{58}\cdot(1-0.8)^{60-58}+\binom{60}{59}\cdot(0.8)^{59}\cdot(1-0.8)^{60-59}+(0.8)^{60}=$$
$$=\binom{60}{60-58}\cdot 0.8^{58}\cdot 0.2^{2}+\binom{60}{60-59}\cdot 0.8^{59}\cdot 0.2^{1}+0.8^{60}=$$
$$=\binom{60}{2}\cdot 0.8^{58}\cdot 0.2^{2}+\binom{60}{1}\cdot 0.8^{59}\cdot 0.2+0.8^{60}=$$
$$=1770\cdot 0.8^{58}\cdot 0.2^{2}+60\cdot 0.8^{59}\cdot 0.2+0.8^{60}\approx 1.94052\cdot 10^{-4}.$$

b) Odmah imamo:

$$E(Y) = n \cdot p = 60 \cdot 0.8 = 48,\ V(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = 60 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 9.6,$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{9.6} \approx 3.09839.$$

3. U ovom zadatku je slučajni pokus *utvrđivanje ljevorukosti*. Taj pokus ima točno dva ishoda: *uspjeh* (čovjek je ljevoruk) i *neuspjeh* (čovjek nije ljevoruk). Budući da u uzorku ima točno 100 ljudi, pokus izvodimo ukupno $n = 100$ puta. Nadalje, iz podatka da u ljudskoj populaciji ima 2% ljevaka zaključujemo da je vjerojatnost *uspjeha* $p = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$.

Tako smo utvrdili da je LJ Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0.02 = 2$, tj. $LJ \sim Po(2)$.

a) Ako među odabranim ljudima nema nijednoga ljevaka, onda se u svih 100 pokusa dogodio *neuspjeh*. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(LJ = 0)$. Ona je jednaka:

$$P(A) = P(LJ = 0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2} \approx 0.13534.$$

Nadalje, promotrimo događaju B suprotan događaj. Taj događaj je:

$$B^C = \{\text{među odabranim ljudima su najviše dva ljevaka}\}.$$

Događaj B^C znači da među odabranim ljudima ili nema nijednoga ljevaka ili postoji točno jedan ljevak ili postoje točno dva ljevaka. Zbog toga je:

$$P\left(B^C\right) = P(LJ \le 2) = P(LJ = 0) + P(LJ = 1) + P(LJ = 2),$$

pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B) = 1 - P\left(B^C\right) = 1 - \left(P(LJ = 0) + P(LJ = 1) + P(LJ = 2)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2}\right) = 1 - (1 + 2 + 2) \cdot \frac{1}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 0.32332.$$

b) Odmah imamo:

$$E(LJ) = \lambda = 2,\ V(LJ) = \lambda = 2,\ \sigma(LJ) = \sqrt{V(LJ)} = \sqrt{2} \approx 1.41421.$$

4. U ovom zadatku je slučajni pokus *utvrđivanje ispravnosti čokolade*. Taj pokus ima točno dva ishoda: *uspjeh* (čokolada je „škart) i *neuspjeh* (čokolada nije „škart“). Budući da u uzorku ima točno 300 čokolada, pokus izvodimo ukupno $n = 300$ puta. Nadalje, iz podatka da se prosječno proizvede 1% „škartnih“ čokolada zaključujemo da je vjerojatnost *uspjeha* $p = 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$.

Tako smo utvrdili da je $\check{C}$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda = n \cdot p = 300 \cdot 0.01 = 3$, tj. $\check{C} \sim Po(3)$.

a) Ako među odabranim čokoladama nema nijedne „škartne“, onda se u svih 300 pokusa dogodio *neuspjeh*. Dakle, tražimo vjerojatnost $P(\check{C} = 0)$. Ona je jednaka:

$$P(A) = P(\check{C} = 0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{1}{e^3} \approx 0.04979.$$

Događaj B znači da među odabranim čokoladama ili nema nijedne „škartne“ ili postoji točno jedna „škartna“ ili postoje točno dvije „škartne“. Zbog toga je:

$$P(B) = P(\check{C} \le 2) = P(\check{C} = 0) + P(\check{C} = 1) + P(\check{C} = 2).,$$

pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B) = P(\check{C} = 0) + P(\check{C} = 1) + P(\check{C} = 2) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} + \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} =$$
$$= \left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{17}{e^3} \approx 0.84638.$$

b) Odmah imamo:

$$E(\check{C}) = \lambda = 3,\ V(\check{C}) = \lambda = 3,\ \sigma(\check{C}) = \sqrt{V(\check{C})} = \sqrt{3} \approx 1.73205.$$

5. Iz zadanih podataka zaključujemo da je $X \sim N\left(1000, 20^2\right)$. Neka su F i F^* redom funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X, odnosno standardne normalne slučajne varijable.

a) Tražimo vjerojatnost $P(X \le 990)$. Ona je jednaka:

$$P(A) = P(X \le 990) = F(990) = F^*\left(\frac{990 - 1000}{20}\right) = F^*\left(-\frac{10}{20}\right) = F^*(-0.5) = 1 - F^*(0.5) =$$
$$= 1 - 0.69146 = 0.30854.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(X \geq 1030)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(B) = P(X \geq 1030) = 1 - P(X < 1030) = 1 - F(1030) = 1 - F^*\left(\frac{1030-1000}{20}\right) =$$
$$= 1 - F^*\left(\frac{30}{20}\right) = 1 - F^*(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(1000 \leq X \leq 1050)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(C) = F(1050) - F(1000) = F^*\left(\frac{1050-1000}{20}\right) - F^*\left(\frac{1000-1000}{20}\right) = F^*\left(\frac{50}{20}\right) - F^*(0) =$$
$$= F^*(2.5) - F^*(0) = 0.99379 - 0.5 = 0.49379.$$

Nadalje, izračunajmo vjerojatnost da slučajno odabrani otpornik ima otpor između 970Ω i 990Ω. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$p = P(970 \leq X \leq 990) = F(990) - F(970) = F^*\left(\frac{990-1000}{20}\right) - F^*\left(\frac{970-1000}{20}\right) =$$
$$= F^*\left(-\frac{10}{20}\right) - F^*\left(-\frac{30}{20}\right) = F^*(-0.5) - F^*(-1.5) = 1 - F^*(0.5) - \left(1 - F^*(1.5)\right) =$$
$$= F^*(1.5) - F^*(0.5) = 0.93319 - 0.69146 = 0.24173.$$

S druge je strane *ista* vjerojatnost jednaka količniku ukupnoga broja otpornika koji imaju otpor između 970Ω i 990Ω i ukupnoga broja otpornika koje smo uzeli. Označimo li potonji broj s n, dobivamo jednadžbu:

$$10 = n \cdot P(970 \leq X \leq 990) = n \cdot p = n \cdot 0.24173.$$

Odatle slijedi $n \approx 41.4$, pa treba uzeti najmanje 42 otpornika.

6. Iz zadanih podataka zaključujemo da je $T \sim N\left(5, 4^2\right)$. Neka su F i F^* redom funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable T, odnosno standardne normalne slučajne varijable.

a) Tražimo vjerojatnost $P(T < 6)$. Ona je jednaka:

$$P(T < 6) = P(T \leq 6) = F(6) = F^*\left(\frac{6-5}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{4}\right) = F^*(0.25) = 0.59871.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(4 \leq T \leq 7)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(4 \le T \le 7) = F(7) - F(4) = F^*\left(\frac{7-5}{4}\right) - F^*\left(\frac{4-5}{4}\right) = F^*\left(\frac{2}{4}\right) - F^*\left(-\frac{1}{4}\right) =$$
$$= F^*(0.5) - F^*(-0.25) = F^*(0.5) - \left(1 - F^*(0.25)\right) = F^*(0.5) + F^*(0.25) - 1 =$$
$$= 0.69146 + 0.59871 - 1 = 0.29017.$$

c) Izračunajmo najprije vjerojatnost da će u slučajno odabranom siječanjskom danu najviša temperatura zraka biti strogo veća od 8°C. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$p = P(T > 8) = 1 - P(T \le 8) = 1 - F(8) = 1 - F^*\left(\frac{8-5}{4}\right) = 1 - F^*\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - F^*(0.75) =$$
$$= 1 - 0.77337 = 0.22663.$$

S druge je strane *ista* vjerojatnost jednaka količniku ukupnoga broja dana u siječnju u kojima je najviša temperatura bila strogo veća od 8°C i ukupnoga broja svih dana u siječnju. Siječanj ima ukupno 31 dan. Označimo li traženi broj s n, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{n}{31} = 0.22663.$$

Odatle slijedi $n = 31 \cdot 0.22663 = 7.02553$, pa je traženi broj jednak 7.

9. GRUPA ZADATAKA

Napomena: U rješenjima svih zadataka s F^* je označena funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

1. Neka je X normalna slučajna varijabla koja označava trajanje usmenoga ispita. Prema podacima iz zadatka vrijedi: $X \sim N(15, 5^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(10 \le X \le 20)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(10 \le X \le 20) = F^*\left(\frac{20-15}{5}\right) - F^*\left(\frac{10-15}{5}\right) = F^*(1) - F^*(-1) = F^*(1) - (1 - F^*(1)) =$$
$$= 2 \cdot F^*(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(X < 5)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X < 5) = F^*\left(\frac{5-15}{5}\right) = F^*(-2) = 1 - F^*(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(X > 25)$. Odmah imamo:

$$P(X > 25) = P(X > 2 \cdot 15 - 5) = P(X < 5) \overset{\text{prema } \mathbf{a})}{=} 0.02275.$$

d) Za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $P(X = a) = 0$. U ovom zadatku tražimo vjerojatnost $P(X = 30)$, pa iz navedene jednakosti izravno slijedi $P(X = 30) = 0$.

2. Neka je X normalna slučajna varijabla koja označava najveću siječanjsku dnevnu temperaturu zraka u Konjskom Brdu. Prema podacima iz zadatka vrijedi: $X \sim N(-2, 4^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(X \le 0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \le 0) = F^*\left(\frac{0-(-2)}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{2}\right) = F^*(0.5) = 0.69146.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(-5 \le X \le -1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(-5 \le X \le -1) = F^*\left(\frac{-1-(-2)}{4}\right) - F^*\left(\frac{-5-(-2)}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{4}\right) - F^*\left(-\frac{3}{4}\right) = F^*(0.25) - F^*(-0.75) =$$
$$= F^*(0.25) - (1 - F^*(0.75)) = F^*(0.25) + F^*(0.75) - 1 = 0.59871 + 0.77337 - 1 = 0.37208.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(X > -10)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X > -10) = 1 - P(X \le -10) = 1 - F^*\left(\frac{-10-(-2)}{4}\right) = 1 - F^*(-2) = 1 - (1 - F^*(2)) = F^*(2) = 0.97725.$$

d) Izračunajmo najprije vjerojatnost da će najveća dnevna temperatura u slučajno odabranom siječanjskom danu biti strogo pozitivna. Dakle, tražimo $P(X > 0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X > 0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - F^*\left(\frac{0-(-2)}{4}\right) = 1 - F^*(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku broja dana u siječnju u kojima je najveća dnevna temperatura bila strogo pozitivna i ukupnoga broja dana u siječnju. Ukupan broj dana u siječnju bilo koje godine jednak je 31. Označimo li traženi broj s n, odmah dobivamo:

$$n = 31 \cdot P(X > 0) = 31 \cdot 0.30854 = 9.56474 \approx 10.$$

e) Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \le x) \ge 90\% = 0.9$. U tablici vrijednosti funkcije F^* nalazimo da je prva vrijednost te funkcije strogo veća od 0.9 jednaka $F^*(1.29) = 0.90147$. Zbog toga broj 0.9 zamjenjujemo brojem 0.90147, pa dobivamo:

$$-2 \le x - 4 \cdot 1.29 \Leftrightarrow x \ge -2 + 4 \cdot 1.29 = 3.16$$

Najmanje cjelobrojno rješenje ove nejednadžbe je $x = 4$.

f) Tražimo $y \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \ge y) \ge 90\% = 0.9$. Postupimo analogno kao u prethodnom zadatku. Dobivamo:

$$-2 \ge y - 4 \cdot 1.29 \Leftrightarrow y \le -2 - 4 \cdot 1.29 = -7.16.$$

Najveće cjelobrojno rješenje ove nejednadžbe je $y = -8$.

3. Neka je T normalna slučajna varijabla koja označava vrijeme čekanja pacijenata (u minutama). Poznato nam je očekivanje te varijable $E(T) = 20$ minuta. Međutim, ne znamo njezinu standardnu devijaciju σ. Nju ćemo odrediti koristeći podatak da 21.186% liječnikovih pacijenata čeka na pregled manje od 15 minuta. Dakle, znamo da vrijedi nejednakost:

$$P(T < 15) = 21.186\% = 0.21186.$$

Ta jednakost ekvivalentna je jednakosti

$$P(T \geq 15) = 1 - 0.21186 = 0.78814.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(0.8) = 0.78814.$ Tako dobijemo:

$$20 = 15 + 0.8 \cdot \sigma \Leftrightarrow \sigma = 6.25 \text{ minuta.}$$

Dakle, $T \sim N(20, 6.25^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(T < 10)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(T < 10) = F^*\left(\frac{10-20}{6.25}\right) = F^*(-1.6) = 1 - F^*(1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548.$$

b) Vrijeme od pola sata je jednako vremenu od 30 minuta, pa tražimo vjerojatnost $P(T > 30)$. Primjenom rezultata **a)** podzadatka odmah dobivamo:

$$P(T > 30) = P(T > 2 \cdot 20 - 10) = P(T < 10) = 0.0548.$$

4. Neka je B normalna slučajna varijabla koja označava broj ostvarenih bodova. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $B \sim N(60, 20^2)$.

Neka je b traženi broj bodova. Iz podatka da je postotak studenata koji su ostvarili najmanje b bodova jednak 59.871% zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$P(B \geq b) = 59.871\% = 0.59871.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(0.25) = 0.59871.$ Tako dobijemo:

$$60 = b + 20 \cdot 0.25 \Leftrightarrow b = 55.$$

5. Neka je T normalna slučajna varijabla koja označava „životni vijek“ baterije (iskazan u danima). Standardna devijacija te varijable je $\sigma = 50$ dana. Očekivanje μ te varijable nije zadano, ali ga možemo odrediti iz podatka da 84.134% svih baterija ima životni vijek dulji od 450 dana.

Dakle, znamo da vrijedi jednakost $P(T > 450) = 84.134\% = 0.84134.$ Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(1) = 0.84134.$ Tako imamo:

$$\mu = 450 + 50 \cdot 1 = 500.$$

Zbog toga je $T \sim N(500, 50^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(T > 549)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(T>549)=1-P(T\le 549)=1-F^*\left(\frac{549-500}{50}\right)=1-F^*(0.98)=1-0.83646=0.16354=16.354\%.$$

b) Tražimo vrijednost x takvu da vrijedi nejednakost: $P(T > x) \ge 75\% = 0.75$. U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.75, pa uzimamo prvu strogo veću tabeliranu vrijednost. To je $F^*(0.68) = 0.75175$. Dakle, tražimo vrijednost x takvu da vrijedi nejednakost $P(T \ge x) \ge F^*(0.68)$. Odmah dobivamo:

$$500 \ge x + 50 \cdot 0.68 \Leftrightarrow x \le 500 - 50 \cdot 0.68 = 466 \Leftrightarrow x_{\max} = 466.$$

6. Neka je M normalna slučajna varijabla koja označava mase studenata. Budući da nisu zadani ni očekivanje, ni standardna devijacija varijable M, uzmimo da je $M \sim N(\mu, \sigma^2)$, za neke $\mu, \sigma > 0$ (očekivanje mora biti strogo pozitivno jer su sve mase studenata strogo pozitivni brojevi). Pravilo $3 \cdot \sigma$ kaže da se 99.73% svih vrijednosti varijable M nalazi u segmentu $[\mu - 3 \cdot \sigma,\ \mu + 3 \cdot \sigma]$. U ovome je slučaju taj segment $[50,110]$, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \mu - 3 \cdot \sigma = 50, \\ \mu + 3 \cdot \sigma = 110. \end{cases}$$

Rješenje toga sustava je $(\mu, \sigma) = (80,10)$. Dakle, $M \sim N(80,10^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(M < 70)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(M<70)=F^*\left(\frac{70-80}{10}\right)=F^*(-1)=1-F^*(1)=1-0.84134=0.15866=15.866\%.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(M > 100)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(M>100)=1-P(M\le 100)=1-F^*\left(\frac{100-80}{10}\right)=1-F^*(2)=1-0.97725=0.02275=2.275\%.$$

c) Izračunajmo najprije vjerojatnost da slučajno odabrani student ima masu između 80 i 90 kg. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(80<M<90)=F^*\left(\frac{90-80}{10}\right)-F^*\left(\frac{80-80}{10}\right)=F^*(1)-F^*(0)=0.84134-0.5=0.34134.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku ukupnoga broja studenata koji imaju masu između 80 i 90 kg i ukupnoga broja svih studenata. Potonji broj je jednak 300, pa je traženi broj studenata jednak:

$$n = 300 \cdot P(80 < M < 90) = 300 \cdot 0.34134 = 102.402 \approx 102.$$

7. Neka je V normalna slučajna varijabla koja označava visine studenata (iskazane u cm). Budući da nisu zadani ni očekivanje, ni standardna devijacija varijable V, uzmimo da je $V \sim N(\mu, \sigma^2)$, za neke $\mu, \sigma > 0$ (očekivanje mora biti strogo pozitivno jer su sve visine studenata strogo pozitivni brojevi). Pravilo $2 \cdot \sigma$ kaže da se 95.45% svih vrijednosti varijable M nalazi u segmentu $[\mu - 2 \cdot \sigma,\ \mu + 2 \cdot \sigma]$. U ovome je slučaju taj segment $[160, 200]$, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \mu - 2 \cdot \sigma = 160, \\ \mu + 2 \cdot \sigma = 200. \end{cases}$$

Rješenje toga sustava je $(\mu, \sigma) = (180, 10)$. Dakle, $V \sim N(180, 10^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(V < 180)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V < 180) = F^*\left(\frac{180 - 180}{10}\right) = F^*(0) = 0.5 = 50\%.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(V > 195)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V > 195) = 1 - P(V \le 195) = 1 - F^*\left(\frac{195 - 180}{10}\right) = 1 - F^*(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681 = 6.681\%.$$

c) Izračunajmo najprije vjerojatnost da slučajno odabrani student visok između 175 cm i 185 cm. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(175 < V < 185) = F^*\left(\frac{185 - 180}{10}\right) - F^*\left(\frac{175 - 180}{10}\right) = F^*(0.5) - F^*(-0.5) =$$
$$= F^*(0.5) - (1 - F^*(0.5)) = 2 \cdot F^*(0.5) - 1 = 2 \cdot 0.69146 - 1 = 0.38292.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku ukupnoga broja studenata visokih između 175 cm i 185 cm i ukupnoga broja svih studenata. Potonji broj je jednak 250, pa je traženi broj studenata jednak:

$$n = 250 \cdot P(175 < V < 185) = 250 \cdot 0.38292 = 95.73 \approx 96.$$

8. Neka je X normalna slučajna varijabla koja označava dnevni promet vozila. Očekivanje te varijable je $\mu = 800$.

a) Standardnu devijaciju te varijable ne znamo, ali je možemo odrediti iz podatka da je u 97.725% dana dnevni promet vozila manji od 1000. To znači da vrijedi jednakost:

$$P(X \le 1000) = 97.725\% = 0.97725.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo $F^*(2) = 0.97725$. Tako dobijemo $P(X \le 1000) = F^*(2)$, pa slijedi:

$$800 = 1000 - 2 \cdot \sigma \Leftrightarrow \sigma = 100.$$

Dakle, $X \sim N(800, 100^2)$.

b) Tražimo vjerojatnost $P(600 < X < 700)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(600 < X < 700) = F^*\left(\frac{700-800}{100}\right) - F^*\left(\frac{600-800}{100}\right) = F^*(-1) - F^*(-2) =$$
$$= 1 - F^*(1) - (1 - F^*(2)) = F^*(2) - F^*(1) = 0.97725 - 0.84134 = 0.13591.$$

c) Tražimo vrijednost x takvu da vrijedi nejednakost $P(X \le x) \ge 90\% = 0.9$. U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.9. Prva strogo veća vrijednost je $F^*(1.29) = 0.90147$. Dakle, tražimo najveću vrijednost x takvu da vrijedi nejednakost $P(X \le x) \ge 0.90147 = F^*(1.29)$. Dobivamo:

$$800 \ge x - 100 \cdot 1.29 \Leftrightarrow x \le 929 \Leftrightarrow x_{\max} = 929.$$

9. Neka je Y normalna slučajna varijabla koja označava trajanje Majina putovanja na posao (u minutama). Standardna devijacija te varijable iznosi 15 minuta.

a) Očekivanje varijable Y odredit ćemo iz podatka da u 84.134% radnih dana Majino putovanje na posao traje najviše sat vremena, odnosno 60 minuta. To zapravo znači da je $P(Y \le 60) = 0.84134$. Tako odmah dobivamo:

$$\mu = 60 - 1 \cdot 15 = 45 \text{ minuta.} \ ,$$

Dakle, $Y \sim N(45, 15^2)$.

b) Sat i pol ima ukupno 90 minuta, pa tražimo vjerojatnost $P(Y \ge 90)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(Y \geq 90) = 1 - P(Y \leq 90) = 1 - F^*\left(\frac{90-45}{15}\right) = 1 - F^*(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135.$$

c) Neka je t traženo vrijeme. Mora vrijediti nejednakost $P(Y \leq t) \geq 0.95$. U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.95, pa uzimamo prvu strogo veću vrijednost. To je $F^*(1.65) = 0.95053$. Dakle, tražimo $t > 0$ takav da vrijedi nejednakost $P(Y \leq t) \geq 0.95053 = F^*(1.65)$. Slijedi:

$$45 \leq t - 15 \cdot 1.65 \Leftrightarrow t \geq 69.75 \Leftrightarrow t_{\max} = 70.$$

Dakle, Maja mora krenuti na posao najkasnije 70 minuta prije početka radnoga vremena.

10. GRUPA ZADATAKA

1. **a)** Računamo:

$$\bar{x} = \frac{20\cdot 2+15\cdot 3+10\cdot 4+5\cdot 5}{50} = \frac{40+45+40+25}{50} = \frac{150}{50} = 3,$$

$$\sigma^2 = \frac{20\cdot 2^2+15\cdot 3^2+10\cdot 4^2+5\cdot 5^2}{50} - 3^2 = \frac{20\cdot 4+15\cdot 9+10\cdot 16+5\cdot 25}{50} - 9 =$$

$$= \frac{80+135+160+125}{50} - 9 = \frac{500}{50} - 9 = 10 - 9 = 1,$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1} = 1,$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{3} = 33.33\%.$$

b) Poligonalnom crtom spojimo točke (2, 20), (3, 15), (4, 10) i (5, 5). Dobiva se slika 8. (vidjeti stranicu 32.)

2. Neka su L = {Zdravko je obavio nadzor u *LNT*-u}, R = {Zdravko je obavio nadzor u *Rumkeu*}, Z = {Zdravko je obavio nadzor u *Zumkonu*} i A = {utvrđena je nepravilnost u poslovanju}. Skup $H = \{L, R, Z\}$ je potpuni sustav događaja za promatrani slučajni pokus. Zbog ravnopravnosti trgovina vrijedi:

$$P(L) = P(R) = P(Z) = \frac{1}{3}.$$

Nadalje, iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

$$\begin{cases} P(A\mid L) = 0.65, \\ P(A\mid R) = 0.95, \\ P(A\mid Z) = 0.9. \end{cases}$$

Trebamo izračunati uvjetnu vjerojatnost $P(Z|A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(Z\mid A) = \frac{P(Z)\cdot P(A\mid Z)}{P(L)\cdot P(A\mid L)+P(R)\cdot P(A\mid R)+P(Z)\cdot P(A\mid Z)} = \left(\text{zbog } P(L)=P(R)=P(Z)\right) =$$

$$= \frac{P(A\mid Z)}{P(A\mid L)+P(A\mid R)+P(A\mid Z)} = \frac{0.9}{0.65+0.95+0.9} = \frac{0.9}{2.5} = \frac{9}{25} = 0.36.$$

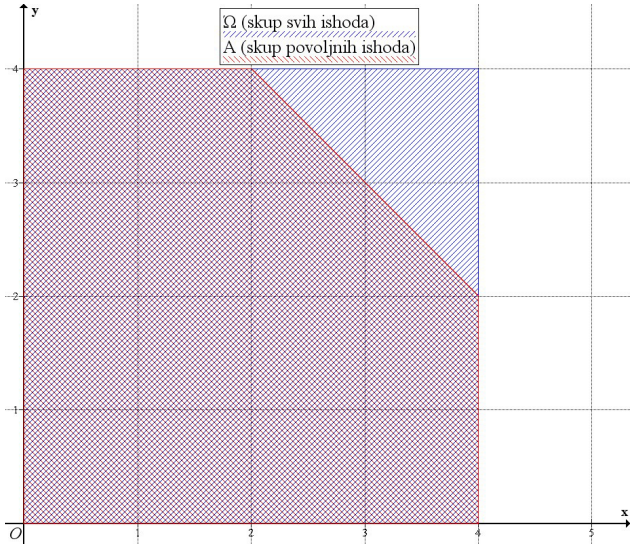
3. Označimo prvu izabranu točku s x, a drugu s y. Tada uređeni par (x, y) pripada skupu $[0,\ 4]^2$. Dakle, $\Omega = [0,\ 4]^2$. Skup svih povoljnih ishoda je

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x + y < 6\}.$$

Primijenimo geometrijsku vjerojatnost u $\mathbb{R}^2$, pa dobivamo:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{m(A)}{(4-0)\cdot(4-0)} = \frac{m(A)}{4^2} = \frac{m(A)}{16}.$$

Preostaje odrediti mjeru skupa A, odnosno površinu toga skupa. Prikažimo skupove Ω i A u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Krivulja $x + y = 6$ je zapravo pravac $y = -x + 6$. Tako dobivamo sliku 14.



Slika 14.

Iz slike vidimo da je $m(A) = 4\cdot 4 - \frac{2\cdot 2}{2} = 14$, pa slijedi:

$$P(A) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

4. Označimo sa X Poissonovu slučajnu varijablu iz zadatka. Znamo da je $X \sim Po(2)$. Trebamo izračunati $P(X \geq 2)$. Budući da je $R(X) = \mathbb{N}_0$, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big) = 1 - \left(\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1} \cdot e^{-2} + \frac{2}{1} \cdot e^{-2}\right) = 1 - \left(e^{-2} + 2 \cdot e^{-2}\right) = 1 - 3 \cdot e^{-2} \approx 0.59399.$$

5. Neka je Y normalna slučajna varijabla koja označava mase studenata. Znamo da je $Y \sim N\left(86,\ 8^2\right)$. Neka su F i F^* redom funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable Y, odnosno standardne normalne slučajne varijable. Izračunajmo najprije vjerojatnost da slučajno odabrani student ima masu najmanje 90 kg. Dakle, tražimo $P(Y \geq 90)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(Y \geq 90) = 1 - P(Y \leq 90) = 1 - F(90) = 1 - F^*\left(\frac{90-86}{8}\right) = 1 - F^*\left(\frac{4}{8}\right) = 1 - F^*\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 - F^*(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854.$$

No, s druge je strane ista vjerojatnost jednaka količniku ukupnoga broja studenata čija je masa barem 90 kg i ukupnoga broja svih studenata Veleučilišta u Frkljevcima:

$$P(Y \geq 90) = \frac{\text{broj studenata čija je masa barem 90 kg}}{\text{ukupan broj studenata}} = \frac{\text{broj studenata čija je masa barem 90 kg}}{200},$$

pa odatle slijedi da je traženi broj jednak:

$$n = 200 \cdot P(Y \geq 90) = 200 \cdot 0.30854 = 61.708 \approx 62.$$

LITERATURA

1. B. Kovačić, L. Marohnić, M. Orlić Bachler: *Repetitorij vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike* (u pripremi; nerecenzirana verzija dostupna na: http://bkovacic.weebly.com)

2. M. Benšić, N. Šuvak: *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2014.

3. N. Elezović: *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.

4. N. Elezović: *Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2007.

5. S. Suljagić: *Vjerojatnost i statistika*, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.