

1.4.

**METODA DJELOMIČNE
(PARCIJALNE)
INTEGRACIJE**

1.4.1. DJELOMIČNA (PARCIJALNA) INTEGRACIJA

- I ovom metodom želimo polazni „teški” integral svesti na što jednostavniji integral.
- Osnova ove metode je formula za derivaciju umnoška dviju funkcija: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- iz koje integriranjem dobijemo:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

1.4.2. ALGORITAM DJELOMIČNE INTEGRACIJE

- **Pretpostavka:** Podintegralna funkcija f je umnožak funkcije u i *diferencijala* funkcije v : $f = u \cdot dv$.
- **Korak 1. Integriranjem** odredimo *standardnu antiderivaciju funkcije (diferencijala)* dv .
- (*Podsjetnik:* Standardna antiderivacija funkcije g je antiderivacija funkcije g čiji je slobodni član jednak 0.)
- **Korak 2.** Odredimo diferencijal du funkcije u .
- **Korak 3.** Polazni neodređeni integral je jednak:

$$\int f = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

1.4.3. NAPOMENE

- 1. Ako je odabir funkcije u pogodan („dobar”), integral
- $\int v \cdot du$ mora biti jednostavniji za određivanje od polaznoga integrala.
- Ako to nije slučaj, odabir funkcije u je pogrešan pa tada moramo ili „zamijeniti funkcije” (tj. za u odabrati drugi faktor koji tvori podintegralnu funkciju) ili odabrati neku drugu metodu određivanja traženoga integrala.
- 2. Metodom djelomične integracije često se (ali ne i u pravilu!) određuju integrali u kojima je podintegralna funkcija umnožak *transcendentne* funkcije (npr. e^x , \ln , \arcsin , \arctg i sl.) i algebarske funkcije (polinoma ili racionalne funkcije).
- 3. Za funkciju u obično se izabiru logaritamska funkcija, ciklometrijske funkcije itd.

1.4.4. CAUCHYJEV PROBLEM

- U modeliranju tehničkih procesa često se susreću tzv. *Cauchyjevi* [košijevi] *problemi*.
- Općenito, to su problemi određivanja (konkretne) realne funkcije f iz sustava:

- $$\left\{ \begin{array}{l} g\left(f^{(n)}, f^{(n-1)}, \dots, f'', f', f\right) = h, \\ f(a_1) = b_1, \\ f(a_2) = b_2, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(a_n) = b_n. \end{array} \right.$$

1.4.4. CAUCHYJEV PROBLEM

- Pritom su g i h „konkretne” realne funkcije, a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ „konkretni” realni brojevi.
- Uz određene pretpostavke na funkciju f i početne uvjete (u što ovdje nećemo ulaziti), pokazuje se da navedeni problem ima *jedinstveno* rješenje.
- Kao jednu od primjena integrala riješit ćemo najjednostavniji takav problem.
- **Problem:** Odrediti realnu funkciju F iz jednakosti:
 - $$\begin{cases} F' = f, \\ F(a) = b \end{cases}$$
 - pri čemu su zadani funkcija f , te $a, b \in \mathbb{R}$.

1.4.4. CAUCHYJEV PROBLEM

- **Algoritam:**
- **Korak 1.** Odrediti neodređeni integral

$$I = \int f(x) \cdot dx.$$

- **Korak 2.** U dobiveni izraz uvrstiti broj a umjesto x , a broj b umjesto I . Riješiti dobivenu linearnu jednadžbu po nepoznanici C .
- **Korak 3.** Uvrstiti izračunatu vrijednost C u izraz dobiven u Koraku 1. Dobivena funkcija je tražena funkcija F .