MATEMATIKA 2

- OSNOVNO O PREDMETU -

0.1. NASTAVNICI - IZVOĐAČI

- Predavanja i auditorne vježbe:
- mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač.

0.2. SADRŽAJ PREDMETA

- 1. OSNOVE INTEGRALNOGA RAČUNA.
- 2. REDOVI.
- 3. OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE.

0.3. OBJAVA NASTAVNIH MATERIJALA

- Obavijesti vezane uz nastavu i ispite, rezultati kolokvija i pismenih ispita:
- https://moj.tvz.hr/studijelo/predmet/184786?TVZ=MOJ5c77d16ce6313
- Nastavni materijali s predavanja i auditornih vježbi (u sastavu e-kolegija *Matematika* 2 na LMS):
- https://lms-2020.tvz.hr/mod/folder/view.php?id=12906

0.4. DODATNE NAPOMENE

SRETNO!

1.1.

NEODREĐENI INTEGRAL

1.1.1. ANTIDERIVACIJA

- PROBLEM: Zadana je realna funkcija f. Ispitati postoji li realna funkcija F takva da vrijedi:
- $F' = f$
- i, ako postoji, odrediti njezino pravilo.
- Funkcija F (ako postoji) naziva se **antiderivacija** ili **primitivna funkcija** funkcije f.
- Postupak određivanja funkcije F naziva se **integriranje** (integracija).
- Integriranje i deriviranje u neku ruku možemo shvatiti kao međusobno inverzne operacije.

1.1.2. NAPOMENA

- Određivanje antiderivacije nije nimalo jednostavno. Može se dogoditi da za neku funkciju utvrdimo postojanje antiderivacije, ali ne znamo odrediti pravilo te funkcije.
- Primjeri takvih funkcija su:
- $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $g(y) = \mathrm{e}^{y^2}$ itd.

1.1.3. NEODREĐENI INTEGRAL

- Problem: Odrediti ukupan broj različitih antiderivacija zadane funkcije f.
- Rezultat: Funkcija f ili nema antiderivaciju ili ima beskonačno mnogo antiderivacija.
- Razlog: Ako je F antiderivacija funkcije f, onda je za svaki $C \in \mathbb{R}$ i funkcija $F_C = F + C$
- također antiderivacija funkcije f.

1.1.3. NEODREĐENI INTEGRAL

- Bitno značajniji je obrat ove tvrdnje:
- Ako su F i G dvije različite antiderivacije funkcije f, onda postoji jedinstveni $C \in \mathbb{R}$ takav da je $F(x) - G(x) = C$, za svaki $x \in D(F) = D(G)$.
- Kratko (i neprecizno) možemo reći da se svake dvije antiderivacije razlikuju za neku realnu konstantu.
- **Skup** svih antiderivacija zadane funkcije f naziva se **neodređeni integral** funkcije f i označava s $\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$.
- Prema gornjim razmatranjima možemo zapisati:

$$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

- Metode određivanja antiderivacija, odnosno neodređenih integrala, upoznat ćemo u sljedećim točkama.

1.1.4. NAPOMENE

- U zapisu

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\left\{F(x)+C : C\in\mathbb{R}\right\}$$

- funkciju f nazivamo **podintegralna funkcija**.
- Kratica dx označava diferencijal varijable x. Motivacija za ovakav zapis je *određeni* integral o kojemu ćemo govoriti kasnije.
- U rješavanju konkretnih zadataka dozvoljeno je izostaviti vitičaste zagrade na desnoj strani gornjega zapisa.
- Može se pokazati:
- *Ako je podintegralna funkcija* **neprekidna** *na svojoj prirodnoj domeni*, *onda ona ima barem jednu antiderivaciju* (a samim tim i beskonačno mnogo antiderivacija).

1.1.4. NAPOMENE

- Prilikom rješavanja nekih zadataka s neodređenim integralima potrebno je definirati određene *operacije* s tim objektima (nužno ih shvaćajući kao *skupove*).
- Neka su f integrabilna funkcija, I skup svih antiderivacija funkcije f (tj. neodređeni integral te funkcije), $\alpha \in \mathbb{R}$ konstanta i g bilo koja realna funkcija.
- Tada definiramo:

1.1.4. NAPOMENE

$$\alpha \cdot I := \{\alpha \cdot F : F \in I\},$$

$$I \cdot \alpha := \{F \cdot \alpha : F \in I\},$$

$$I + g := \{F + g : F \in I\},$$

$$g + I := \{g + F : F \in I\}.$$

- Sve navedene operacije su dobro definirane i njihov je rezultat *skup funkcija*.
- Primijetite da su $\cdot$ i $+$ navedeni unutar vitičastih zagrada standardno množenje, odnosno zbrajanje funkcija. (α uvijek možemo shvatiti kao konstantnu funkciju.)

1.1.4. NAPOMENE

- Operacije standardnoga zbrajanja i množenja funkcija su komutativne. Odatle lako slijede jednakosti:
-
$$\alpha \cdot I = I \cdot \alpha,$$
$$I + g = g + I.$$

- **Oprez:** Operacije zbrajanja funkcija i zbrajanja skupa i funkcije označene su *istim znakom* (+), ali imaju posve različito značenje. Analogna tvrdnja vrijedi za množenje funkcija i množenje skupa realnim brojem.

1. Dokažite da je funkcija F antiderivacija funkcije f ako je:

a) $F(x)=\left(x^2-2\cdot x+3\right)\cdot \mathrm{e}^x+2024,\ f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot \mathrm{e}^x;$

Rješenje: Treba provjeriti jednakost $F'=f$. Deriviranjem funkcije F dobivamo:

$$\begin{aligned}F'(x)&=(2\cdot x-2)\cdot \mathrm{e}^x+\left(x^2-2\cdot x+3\right)\cdot \mathrm{e}^x=\\&=\left(2\cdot x-2+x^2-2\cdot x+3\right)\cdot \mathrm{e}^x=\\&=\left(x^2+1\right)\cdot \mathrm{e}^x=f(x).\end{aligned}$$

b) $F(u)=2\cdot u\cdot \sin u-\left(u^2-2\right)\cdot \cos u-2025,\ f(u)=u^2\cdot \sin u;$

Rješenje: Analogno kao u **a**) podzadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}F'(u)&=2\cdot \sin u+2\cdot u\cdot \cos u-\left(2\cdot u\cdot \cos u-\left(u^2-2\right)\cdot \sin u\right)=\\&=2\cdot \sin u+2\cdot u\cdot \cos u-2\cdot u\cdot \cos u+u^2\cdot \sin u-2\cdot \sin u=\\&=u^2\cdot \sin u=f(u).\end{aligned}$$

c) $F(u)=(2\cdot \ln^2 u-2\cdot \ln u+1)\cdot u^2+2024^{2024},\ f(u)=4\cdot u\cdot \ln^2 u;$

Rješenje: Analogno kao u **a**) podzadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}F'(u)&=\left(\frac{4\cdot \ln u}{u}-\frac{2}{u}\right)\cdot u^2+(2\cdot \ln^2 u-2\cdot \ln u+1)\cdot 2\cdot u=\\&=4\cdot u\cdot \ln u-2\cdot u+4\cdot u\cdot \ln^2 u-4\cdot u\cdot \ln u+2\cdot u=\\&=4\cdot u\cdot \ln^2 u=f(u).\end{aligned}$$

d) $F(x)=2\cdot(\ln(\sin x)-x\cdot \operatorname{ctg} x)-2025^{-2025},\ f(x)=\dfrac{2\cdot x}{\sin^2 x};$

Rješenje: Analogno kao u **a**) podzadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}F'(x)&=2\cdot\left(\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x-\operatorname{ctg} x+\frac{x}{\sin^2 x}\right)=\\&=2\cdot\left(\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} x+\frac{x}{\sin^2 x}\right)=\\&=\frac{2\cdot x}{\sin^2 x}=f(x).\end{aligned}$$