1.1. OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

1. Zadane su izjave A: „π je racionalan broj“ i B: „e nije racionalan broj“. Izrecite sljedeće izjave i odredite njihovu istinitost:

a) $-A$;
b) $-B$;
c) $A \cdot B$;
d) $A + B$;
e) $A \to B$;
f) $B \to A$;
g) $A \leftrightarrow B$.

Rješenje:

a) $-A$: "π nije racionalan broj.", $\tau(A) = 0$, $\tau(-A) = 1$;
b) $-B$: "e je racionalan broj.", $\tau(B) = 1$, $\tau(-B) = 0$;
c) $A \cdot B$: "π je racionalan broj i e nije racionalan broj.", $\tau(A \cdot B) = 0$;
d) $A + B$: "π je racionalan broj ili e nije racionalan broj.", $\tau(A + B) = 1$;
e) $A \to B$: "Ako je π racionalan broj, onda e nije racionalan broj.", $\tau(A \to B) = 1$;
f) $B \to A$: "Ako e nije racionalan broj, onda je π racionalan broj.", $\tau(B \to A) = 0$;
g) $A \leftrightarrow B$: "π je racionalan broj akko e nije racionalan broj.", $\tau(A \leftrightarrow B) = 0$.

2. Zapišite sljedeće izjave koristeći kvantifikatore, izrecite i zapišite negaciju svake od njih, pa odredite istinitost zadane izjave i njezine negacije:

a) A: „Za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost $1-n \leq 0$."
b) B: „Za svaki cijeli broj k vrijedi nejednakost $k^2 \geq k$."
c) C: „Postoji barem jedan racionalan broj q za kojega vrijedi jednakost $q^2 = 2$."
d) D: „Za svaki realan broj α postoji barem jedan prirodan broj β takav da vrijedi nejednakost $\alpha < \beta$."

Rješenje:

a) $A: (\forall n \in \mathbb{N})\ (1-n \leq 0),\ -A: (\exists n \in \mathbb{N})\ (1-n > 0),\ \tau(A) = 1,\ \tau(-A) = 0;$

b) $B: (\forall k \in \mathbb{Z})\ (k^2 \geq k),\ -B: (\exists k \in \mathbb{Z})\ (k^2 < k),\ \tau(B) = 1,\ \tau(-B) = 0;$

c) $C: (\exists q \in \mathbb{Q})\ (q^2 = 2),\ -C: (\forall q \in \mathbb{Q})\ (q^2 \neq 2),\ \tau(C) = 0,\ \tau(-C) = 1;$

d) $E: (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \beta \in \mathbb{N})(\alpha < \beta),\ -E: (\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall \beta \in \mathbb{N})(\alpha \geq \beta),\ \tau(E) = 1,\ \tau(-E) = 0.$

1.1.1. BINOMNI TEOREM

3. Dokažite da za sve $n,k\in\mathbb{N}$ takve da je $n\geq k$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

Rješenje: Koristeći definiciju binomnoga koeficijenta imamo redom:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k};$$

$$\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}=\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k};$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!}=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\left(k+(n-k)\right)=$$

$$=\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}.$$

4. Koristeći binomni teorem izračunajte sljedeće zbrojeve:

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2\cdot k}$.

Rješenje:

a) U binomnu formulu uvrstimo $x = y = 1$, pa dobijemo $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

b) U binomnu formulu uvrstimo $x = 1,\ y = -1$, pa dobijemo: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

c) Zbrojimo jednakosti iz **a)** i **b)**, pa dobijemo: $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2\cdot k} = 2^{n-1}$.