# 1.1. OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

**1.** Zadane su izjave *A*: „$\pi$ je racionalan broj“ i *B*: „$e$ nije racionalan broj“. Izrecite sljedeće izjave i odredite njihovu istinitost:

**a**) $-A$;
**b**) $-B$;
**c**) $A \cdot B$;
**d**) $A + B$;
**e**) $A \to B$;
**f**) $B \to A$;
**g**) $A \leftrightarrow B$.

**2.** Zapišite sljedeće izjave koristeći kvantifikatore, izrecite i zapišite negaciju svake od njih, pa odredite istinitost zadane izjave i njezine negacije:

**a)** *A*: „Za svaki prirodan broj $n$ vrijedi nejednakost $1-n \le 0.$“
**b)** *B*: „Za svaki cijeli broj $k$ vrijedi nejednakost $k^2 \ge k.$“
**c)** *C*: „Postoji barem jedan racionalan broj $q$ za kojega vrijedi jednakost $q^2 = 2.$“
**d)** *D*: „Za svaki realan broj $\alpha$ postoji barem jedan prirodan broj $\beta$ takav da vrijedi nejednakost $\alpha < \beta$.“

## 1.1.1. BINOMNI TEOREM

**3.** Dokažite da za sve $n, k \in \mathbb{N}$ takve da je $n \ge k$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

**4.** Koristeći binomnu formulu izračunajte sljedeće zbrojeve:

**a**) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

**b**) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

**c**) $\sum_{k \ge 0} \binom{n}{2 \cdot k}$.

# RJEŠENJA ZADATAKA

# 1.1. OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE. BINOMNI TEOREM.

**1.**

**a**) $-A$ : "$\pi$ nije racionalan broj.", $\tau(A)=0,\ \tau(-A)=1;$

**b**) $-B$ : "$e$ je racionalan broj.", $\tau(B)=1,\ \tau(-B)=0;$

**c**) $A\cdot B$ : "$\pi$ je racionalan broj i $e$ nije racionalan broj.", $\tau(A\cdot B)=0;$

**d**) $A+B$ : "$\pi$ je racionalan broj ili $e$ nije racionalan broj.", $\tau(A+B)=1;$

**e**) $A\to B$ : "Ako je $\pi$ racionalan broj, onda $e$ nije racionalan broj.", $\tau(A\to B)=1;$

**f**) $B\to A$ : "Ako $e$ nije racionalan broj, onda je $\pi$ racionalan broj.", $\tau(B\to A)=0;$

**g**) $A\leftrightarrow B$ : "$\pi$ je racionalan broj akko $e$ nije racionalan broj.", $\tau(A\leftrightarrow B)=0.$

**2.**

**a**) $A:(\forall n\in\mathbb{N})\ (1-n\le 0),\ -A:(\exists n\in\mathbb{N})\ (1-n>0),\ \tau(A)=1,\ \tau(-A)=0;$

**b**) $B:(\forall k\in\mathbb{Z})\ (k^2\ge k),\ -B:(\exists k\in\mathbb{Z})\ (k^2<k),\ \tau(B)=1,\ \tau(-B)=0;$

**c**) $C:(\exists q\in\mathbb{Q})\ (q^2=2),\ -C:(\forall q\in\mathbb{Q})\ (q^2\ne 2),\ \tau(C)=0,\ \tau(-C)=1;$

**d**) $E:(\forall\alpha\in\mathbb{R})(\exists\beta\in\mathbb{N})(\alpha<\beta),\ -E:(\exists\alpha\in\mathbb{R})(\forall\beta\in\mathbb{N})(\alpha\ge\beta),\ \tau(E)=1,\ \tau(-E)=0.$

**3.** Koristeći definiciju binomnoga koeficijenta imamo redom:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k};$$

$$\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}=\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k};$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!}=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\big(k+(n-k)\big)=$$

$$=\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}.$$

**4. a**) U binomnu formulu uvrstimo $x=y=1$, pa dobijemo $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$

**b**) U binomnu formulu uvrstimo $x=1,\ y=-1$, pa dobijemo: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$

**c**) Zbrojimo jednakosti iz **a**) i **b**), pa dobijemo: $\sum_{k\ge 0}\binom{n}{2\cdot k}=2^{n-1}.$