1. UVOD.

1.1. OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE. BINOMNI TEOREM.

1.1.1. POJAM IZJAVE (SUDA)

- Intuitivno, *izjava* ili *sud* je svaka suvisla izjavna rečenica koja je ili istinita ili lažna (ali ne oboje istovremeno).
- Ta definicija je samo intuitivna jer nismo definirali što znači *suvisla izjavna rečenica*, odnosno *rečenica* općenito.
- Ispitivanjem istinitosti neke izjave promatranjem samo njezina oblika (ali ne i sadržaja) bavi se *matematička logika*.
- Izjave mogu biti *jednostavne* i *složene*.
- Složene izjave dobivaju se povezivanjem barem dviju jednostavnih izjava. Kao "poveznice" najčešće služe *veznici*.
- U matematičkoj logici se koriste veznici *i*, *ili, ako...onda*, *ako i samo ako* (kraće: *akko*) te logička negacija *ne*.

1.1.2. “OPERACIJE” S IZJAVAMA

- Izjave obično označavamo velikim tiskanim slovima: A, B, ...
- Neka su A i B izjave. Tada je:
- $A \cdot B$ ili $A \wedge B$ izjava nastala povezivanjem izjava A i B veznikom *i*;
- $A + B$ ili $A \vee B$ izjava nastala povezivanjem izjava A i B veznikom *ili*;
- $-A$ ili $\neg A$ izjava nastala negiranjem izjave A;
- $A \rightarrow B$ izjava nastala povezivanjem izjava A i B veznicima *ako... onda*
- $A \leftrightarrow B$ izjava nastala povezivanjem izjava A i B veznikom *akko.*

1.1.3. TABLICA ISTINITOSTI (SEMANTIČKA TABLICA)

A	B	$-A$	$A \cdot B$	$A+B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.1.4. KVANTIFIKATORI

- U logičkim izjavama često se pojavljuju *kvantifikatori* koji označavaju "količinu" objekata za koje vrijedi neka tvrdnja.
- Najčešće korišteni kvantifikatori su:
  - *univerzalni* (oznaka: $\forall$, čitati: (*za*) *svaki*);
  - *egzistencijalni* (oznaka: $\exists$, čitati: *postoji* (*barem jedan*));
  - *strogi egzistencijalni* (oznaka: $\exists!$, čitati: *postoji točno jedan*).
- Pritom je negacija kvantifikatora $\forall$ kvantifikator $\exists$ i obratno.

1.1.5. SKUPOVI $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

- *Podsjetnik*:

$\mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$ - skup prirodnih brojeva;

$\mathbb{Z} := \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$ – skup cijelih brojeva;

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ – skup racionalnih brojeva;

$I :=$ skup iracionalnih brojeva;

$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup I$ – skup realnih brojeva;

$\mathbb{C} :=$ skup kompleksnih brojeva.

1.1.6. POJAM FAKTORIJELA

- Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran.
- *Podsjetnik*: U srednjoj školi smo definirali:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot \ldots \cdot n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- = umnožak prvih n prirodnih brojeva.
- Oznaku $n!$ čitamo: „*en faktorijela*".
- Dogovorno definiramo: $0! = 1$.
- Tako npr. vrijedi: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ itd.
- Bolji kalkulatori mogu računati vrijednosti $n!$ za $n = 1, 2, \ldots, 68, 69$.

1.1.7. POJAM BINOMNOGA KOEFICIJENTA

- Neka su $n,k \in \mathbb{N}$ takvi da je $n \geq k$.
- Definiramo *binomni koeficijent* (oznaka: $\binom{n}{k}$) s:

$$\binom{n}{k} := \frac{\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Ako je $n < k$, onda dogovorno definiramo:

$$\binom{n}{k} = 0.$$

1.1.8. BINOMNI TEOREM

- Za sve $x, y \in \mathbb{C}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k.$$

- Gornja tvrdnja naziva se *binomni teorem.*
- Posljedice gornje formule su:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2,$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3,$$

- itd.

1.1. OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

1. Zadane su izjave A: „π je racionalan broj“ i B: „e nije racionalan broj“. Izrecite sljedeće izjave i odredite njihovu istinitost:

a) $-A$;
b) $-B$;
c) $A \cdot B$;
d) $A + B$;
e) $A \to B$;
f) $B \to A$;
g) $A \leftrightarrow B$.

Rješenje:

a) $-A$: "π nije racionalan broj.",
$\tau(A) = 0$,
$\tau(-A) = 1$;
b) $-B$: "e je racionalan broj.",
$\tau(B) = 1$,
$\tau(-B) = 0$;
c) $A \cdot B$: "π je racionalan broj i e nije racionalan broj.",
$\tau(A \cdot B) = 0$;
d) $A + B$: "π je racionalan broj ili e nije racionalan broj.",
$\tau(A + B) = 1$;
e) $A \to B$: "Ako je π racionalan broj, onda e nije racionalan broj.",
$\tau(A \to B) = 1$;
f) $B \to A$: "Ako e nije racionalan broj, onda je π racionalan broj.",
$\tau(B \to A) = 0$;
g) $A \leftrightarrow B$: "π je racionalan broj akko e nije racionalan broj.",
$\tau(A \leftrightarrow B) = 0$.

2. Zapišite sljedeće izjave koristeći kvantifikatore, izrecite i zapišite negaciju svake od njih, pa odredite istinitost zadane izjave i njezine negacije:

a) *A*: „Za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost $1-n\leq 0$."

b) *B*: „Za svaki cijeli broj k vrijedi nejednakost $k^2\geq k$."

c) *C*: „Postoji barem jedan racionalan broj q za kojega vrijedi jednakost $q^2=2$."

d) *D*: „Za svaki realan broj α postoji barem jedan prirodan broj β takav da vrijedi nejednakost $\alpha<\beta$."

Rješenje:

a) $A:(\forall n\in\mathbb{N})\ (1-n\leq 0),$
$-A:(\exists n\in\mathbb{N})\ (1-n>0),$
$\tau(A)=1,$
$\tau(-A)=0;$

b) $B:(\forall k\in\mathbb{Z})\ (k^2\geq k),$
$-B:(\exists k\in\mathbb{Z})\ (k^2<k),$
$\tau(B)=1,$
$\tau(-B)=0;$

c) $C:(\exists q\in\mathbb{Q})\ (q^2=2),$
$-C:(\forall q\in\mathbb{Q})\ (q^2\neq 2),$
$\tau(C)=0,$
$\tau(-C)=1;$

d) $D:(\forall\alpha\in\mathbb{R})(\exists\beta\in\mathbb{N})(\alpha<\beta),$
$-D:(\exists\alpha\in\mathbb{R})(\forall\beta\in\mathbb{N})(\alpha\geq\beta),$
$\tau(D)=1,$
$\tau(-D)=0.$

1.1.1. BINOMNI TEOREM

3. Dokažite da za sve $n,k\in\mathbb{N}$ takve da je $n\geq k$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

Rješenje: Koristeći definiciju binomnoga koeficijenta imamo redom:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=$$
$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$
$$=\binom{n}{k};$$

$$\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=$$
$$=\binom{n}{k};$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-k+1)}{k!}=$$
$$=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!}=$$
$$=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\big(k+(n-k)\big)=$$
$$=\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=$$
$$=\binom{n}{k}.$$

4. Koristeći binomni teorem izračunajte sljedeće zbrojeve:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2 \cdot k}$.

Rješenje:

a) U binomnu formulu uvrstimo

$$x = y = 1,$$

pa dobijemo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

b) U binomnu formulu uvrstimo

$$x = 1, \; y = -1,$$

pa dobijemo:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

c) Zbrojimo jednakosti iz a) i b), pa dobijemo:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2 \cdot k} = 2^{n-1}.$$