1.2.

IZRAVNO (TABLIČNO) INTEGRIRANJE

1.2.1. TABLICA OSNOVNIH ANTIDERIVACIJA

- *Podsjetnik*: deriviranje i integriranje u neku ruku možemo shvatiti kao međusobno inverzne operacije.
- Zbog toga neke jednostavnije antiderivacije (a time i pripadne neodređene integrale) možemo odrediti i „napamet”.
- Na drugi način to možemo učiniti koristeći *tablicu osnovnih antiderivacija* (vidjeti tablicu 7.1. u *Repetitoriju matematike za studente elektrotehnike*, stranica 40.).
- Općenito, cilj nam je (primjenom određenih metoda) bilo koji neodređeni integral svesti na „tablični” integral, odnosno na neki od integrala iz te tablice.

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

1.2.2. OSNOVNA PRAVILA INTEGRIRANJA

- Potpuno su analogna osnovnim pravilima deriviranja.
- Međutim, ne postoji „gotova” formula za antiderivaciju umnoška ili količnika dviju funkcija. Ona se mora odrediti drugim metodama.

1. $\int a \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = a \cdot \int f(x) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall a \in \mathbb{R}.$

2. $\int (f \pm g)(x) \cdot \mathrm{d}x = \int f(x) \cdot \mathrm{d}x \pm \int g(x) \cdot \mathrm{d}x.$

OPREZ $: \int (f \cdot g)(x) \cdot \mathrm{d}x \neq \left(\int f(x) \cdot \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int g(x) \cdot \mathrm{d}x \right).$

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

1.2.3. STANDARDNA ANTIDERIVACIJA

- U točki 1.1. naveli smo da je razlika *bilo kojih dviju* različitih antiderivacija neka realna *konstanta*. Njezina vrijednost ovisi o izabranim antiderivacijama koje oduzimamo.
- Ekvivalentno, ne postoji **konstanta** $C \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi:

$$F - G = C, \text{ za bilo koje antiderivacije } F, G.$$

- Ipak, u neodređenom integralu (skupu svih antiderivacija) obično izdvajamo jedan njegov element. To je antiderivacija čiji je slobodni član (član koji ne sadrži nezavisnu varijablu) jednak 0. Ta antiderivacija naziva se **standardna antiderivacija**.
- Standardna antiderivacija najčešće se koristi pri određivanju *određenih integrala*.
- Ne istaknemo li drugačije, u daljnjem ćemo umjesto *standardna antiderivacija* kraće i jednostavnije govoriti *antiderivacija*.

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

1. Odredite sljedeće neodređene integrale koristeći osnovna pravila integriranja i tablicu osnovnih antiderivacija:

a) $\int (15 \cdot x^2 - 2024 \cdot x + 2025) \cdot \mathrm{d}x$;

Rješenje: Budući da tražimo neodređene integrale, tj. *skupove* svih antiderivacija, u rješenjima svih podzadataka pretpostavljamo da je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

Primjenom osnovnih pravila integriranja i tablice osnovnih antiderivacija dobivamo:

$$\begin{aligned} I &= \int (15 \cdot x^2 - 2024 \cdot x + 2025) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int 15 \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x - \int 2024 \cdot x \cdot \mathrm{d}x + \int 2025 \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 15 \cdot \int x^2 \cdot \mathrm{d}x - 2024 \cdot \int x \cdot \mathrm{d}x + 2025 \cdot \int 1 \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2024 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2025 \cdot x = \\ &= 5 \cdot x^3 - 1012 \cdot x^2 + 2025 \cdot x + C. \end{aligned}$$

b) $\int \left(\frac{2}{t} - \frac{8}{t^2 - 16} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) \cdot \mathrm{d}t$;

Rješenje:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{t} \cdot \mathrm{d}t - \int \frac{8}{t^2 - 16} \cdot \mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 2 \cdot \int \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t - 8 \cdot \int \frac{1}{t^2 - 4^2} \cdot \mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 2 \cdot \ln|t| + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \ln\left|\frac{t+4}{t-4}\right| + \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) = \\ &= 2 \cdot \ln|t| + \ln\left|\frac{t+4}{t-4}\right| + \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) + C. \end{aligned}$$

c) $\int\left(\sin u-2\cdot\cos u-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} u+\operatorname{ctg} u\right)\cdot\mathrm{d}u;$

Rješenje:

$$\begin{aligned}I&=\int\sin u\cdot\mathrm{d}u-\int 2\cdot\cos u\cdot\mathrm{d}u-\int\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} u\cdot\mathrm{d}u+\int\operatorname{ctg} u\cdot\mathrm{d}u=\\&=-\cos u-2\cdot\int\cos u\cdot\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\cdot\int\operatorname{tg} u\cdot\mathrm{d}u+\ln\left|\sin u\right|=\\&=-\cos u-2\cdot\sin u+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\cos u\right|+\ln\left|\sin u\right|+C.\end{aligned}$$

d) $\int\left(\mathrm{e}^{w}+\frac{2024^{w}}{2}-\frac{2025}{w^{2}+1}\right)\cdot\mathrm{d}w.$

Rješenje:

$$\begin{aligned}I&=\int\mathrm{e}^{w}\cdot\mathrm{d}w+\int\frac{2024^{w}}{2}\cdot\mathrm{d}w-\int\frac{2025}{w^{2}+1}\cdot\mathrm{d}w=\\&=\mathrm{e}^{w}+\frac{1}{2}\cdot\int 2024^{w}\cdot\mathrm{d}w-2025\cdot\int\frac{1}{w^{2}+1}\cdot\mathrm{d}w=\\&=\mathrm{e}^{w}+\frac{1}{2\cdot\ln 2024}\cdot 2024^{w}-2025\cdot\operatorname{arctg} w+C.\end{aligned}$$

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int\left(w^2+\frac{1}{w}\right)^2\cdot \mathrm{d}w.$

Rješenje: Osnovna je ideja svesti zadani integral na zbroj i/ili razliku tabličnih integrala. U tu svrhu u ovome podzadatku moramo kvadrirati podintegralnu funkciju. I ovdje pretpostavljamo da je $C\in\mathbb{R}$ konstanta.

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(w^4+2\cdot w+\frac{1}{w^2}\right)\cdot \mathrm{d}w=\\
&=\int w^4\cdot \mathrm{d}w+2\cdot\int w\cdot \mathrm{d}w+\int\frac{1}{w^2}\cdot \mathrm{d}w=\\
&=\frac{1}{4+1}\cdot w^{4+1}+2\cdot\frac{1}{1+1}\cdot w^{1+1}+\int w^{-2}\cdot \mathrm{d}w=\\
&=\frac{1}{5}\cdot w^5+w^2+\frac{1}{-2+1}\cdot w^{-2+1}=\\
&=\frac{1}{5}\cdot w^5+w^2-w^{-1}=\\
&=\frac{1}{5}\cdot w^5+w^2-\frac{1}{w}+C;
\end{aligned}$$

b) $\int\left(\sqrt[3]{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\cdot \mathrm{d}y;$

Rješenje: Postupimo analogno kao u prethodnom podzadatku:

$$\begin{aligned}
I &=\int\left(y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{-1}{2}}\right)^2\cdot \mathrm{d}y=\\
&=\int\left(y^{\frac{1}{3}\cdot 2}-2\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{-1}{2}}+y^{\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot 2}\right)\cdot \mathrm{d}y=\\
&=\int\left(y^{\frac{2}{3}}-2\cdot y^{\frac{-1}{6}}+y^{-1}\right)\cdot \mathrm{d}y=\\
&=\int y^{\frac{2}{3}}\cdot \mathrm{d}y-2\cdot\int y^{\frac{-1}{6}}\cdot \mathrm{d}y+\int\frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y=\\
&=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot y^{\frac{2}{3}+1}-2\cdot\frac{1}{\frac{-1}{6}+1}\cdot y^{\frac{-1}{6}+1}+\ln|y|=\\
&=\frac{3}{5}\cdot y^{\frac{5}{3}}-\frac{12}{5}\cdot y^{\frac{5}{6}}+\ln|y|+C.
\end{aligned}$$

c) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^3\cdot \mathrm{d}x$;

Rješenje: U ovom podzadatku moramo kubirati podintegralnu funkciju. Imamo:

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-1}{4}}\right)^3\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-3\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot x^{\frac{-1}{4}}+3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{\frac{-1}{4}}\right)^2-\left(x^{\frac{-1}{4}}\right)^3\right)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int\left(x^{\frac{3}{2}}-3\cdot x^{1-\frac{1}{4}}+3-x^{\frac{-3}{4}}\right)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int x^{\frac{3}{2}}\cdot \mathrm{d}x-3\cdot\int x^{\frac{3}{4}}\cdot \mathrm{d}x+3\cdot\int \mathrm{d}x-\int x^{\frac{-3}{4}}\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}\cdot x^{\frac{3}{2}+1}-3\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}+1}\cdot x^{\frac{3}{4}+1}+3\cdot x-\frac{1}{\frac{-3}{4}+1}\cdot x^{\frac{-3}{4}+1} = \\
&= \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}-\frac{12}{7}\cdot x^{\frac{7}{4}}+3\cdot x-4\cdot x^{\frac{1}{4}}+C.
\end{aligned}$$

d) $\int\frac{t^2+2}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t$.

Rješenje: Osnovna ideja je zapisati podintegralnu nepravu racionalnu funkciju kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije. Podijelimo li brojnik nazivnikom, dobijemo:

$$\begin{array}{l}
\left(t^2+2\right):\left(t^2+1\right)=1 \\
\underline{-\left(t^2+1\right)} \\
\qquad\quad 1
\end{array}$$

Odatle slijedi:

$$\frac{t^2+2}{t^2+1}=1+\frac{1}{t^2+1},$$

pa je traženi integral jednak:

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(1+\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int \mathrm{d}t+\int\frac{1}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t = \\
&= t+\operatorname{arctg} t+C.
\end{aligned}$$