

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 1</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Uvod.</b> <b>Kompleksni brojevi.</b> - zadaci
---	---	---

## 1.2. REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI. ALGEBARSKE OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

1. Zadan je kompleksan broj  $z = \frac{50}{7} \cdot \left[ \frac{(2-i) \cdot (3+i)}{7+i} - \frac{(2+i) \cdot (3-i)}{7-i} \right] - 3$ .
  - Izračunajte apsolutnu vrijednost (modul) zadanoga broja.
  - Odredite  $x, y \in \mathbb{R}$  tako da brojevi  $z_1 = (2 \cdot x - y - 2) + (x - 2 \cdot y + 12) \cdot i$  i  $z$  budu jednaki.
2. Pokažite da na skup  $\mathbb{C}$  ne možemo proširiti standardni uređaj  $\leq$  uveden na skupu  $\mathbb{R}$ .
3. Zadani su kompleksni brojevi  $z_1 = \frac{i^{2018} + i^{2019}}{i^{2020} - i^{2021}}$  i  $z_2 = (1+i)^3 + (1-i)^3$ .
  - Prikažite zadane brojeve u Gaussovoj ravnini.
  - Izračunajte  $\left| \overline{z_1} - \frac{1}{4} \cdot \overline{z_2} \right|^{2020}$  i zapišite dobiveni rezultat kao potenciju s bazom 2.
4. a) Neka su  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $r \geq 0$  proizvoljni, ali fiksirani. Odredite grafički prikaz skupa
 
$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$
 u Gaussovoj ravnini.
  - Odredite grafički prikaz skupa  $S$  iz a) podzadatka u Gaussovoj ravnini ako se znak jednakosti u tom podzadatku zamijeni redom znakovima  $\leq, <, \geq$  i  $>$ .
  - Skicirajte skupove  $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  i  $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z+1| \leq 3\}$  u Gaussovoj ravnini.
5. Skicirajte sljedeće skupove točaka u Gaussovoj ravnini:
  - $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0\}$ ;
  - $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(2 \cdot \bar{z}) - \operatorname{Re}(-2 \cdot z) = 2\}$ ;
  - $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = |z|\}$ ;
  - $S_4 = \{z \in \mathbb{C} : z = 4 \cdot (\bar{z})^{-1}\}$ .

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 1</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Uvod.</b> <b>Kompleksni brojevi.</b> - zadaci
---	---	---

### 1.3. OBLICI ZAPISA KOMPLEKSNOGA BROJA. DE MOIVRÈOVE FORMULE

1. Zapišite sljedeće kompleksne brojeve u svim trima oblicima:

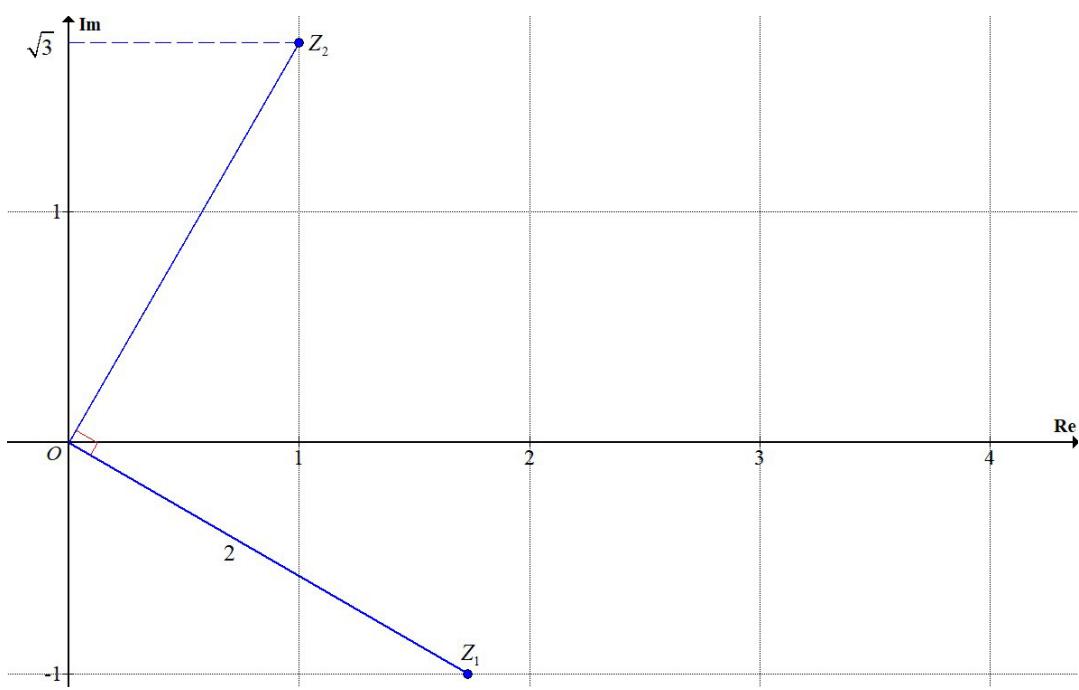
a)  $z_1 = \frac{(1+i)^{2021}}{\left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5}{12}\pi}\right)^{2019}}$ ;

b)  $z_2 = 8 \cdot \left( \frac{\left( \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{23}{12}\pi} \right)^{18}}{\left( -\sqrt{3} \cdot i - 1 \right)^9} \right) - \sqrt{3}$ .

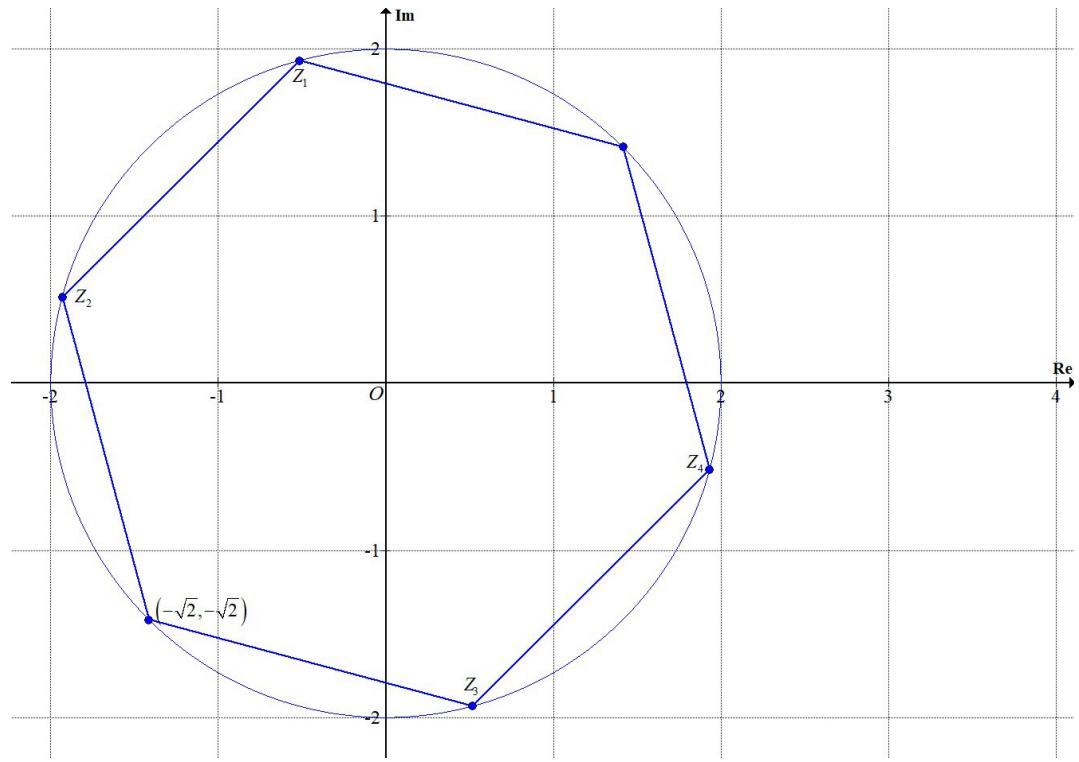
2. (pismeni ispit 1.2.2016.) Zadani su kompleksni brojevi  $z_1 = -1 - i$  i  $z_2 = \sqrt{3} + i$ .

Izračunajte glavni argument kompleksnoga broja  $z_3 = \left( -\frac{\sqrt[2014]{2015} \cdot z_1}{\sqrt[2015]{2014} \cdot z_2} \right)^{2016}$ .

3. Točke  $Z_1$  i  $Z_2$  prikazane u Gaussovoj ravnini na slici 1. pridružene su redom kompleksnim brojevima  $z_1$  i  $z_2$ . Odredite  $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)$ .
4. Odredite algebarski i trigonometrijski oblik zapisa onoga rješenja jednadžbe  $z^3 = 2 \cdot (i-1)$  kojemu odgovarajuća točka pripada prvom kvadrantu Gaussove ravnine. Potom izračunajte umnožak svih preostalih rješenja te jednadžbe.
5. a) Odredite ukupan broj svih rješenja jednadžbe  $z^{12} = -i$  koja imaju glavni argument u intervalu  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\pi\right]$ .
- b) Među svim rješenjima iz a) podzadatka odredite rješenje koje ima najmanji, odnosno najveći glavni argument. Izračunajte umnožak tih dvaju rješenja i zapišite ga u algebarskom obliku s točnošću od  $10^{-5}$ .
6. Izračunajte  $|z_1 + z_4| - |z_2 - z_3|$  za brojeve  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  čije su pridružene točke u Gaussovoj ravnini zadane na slici 2. (Broju  $z_i$  pridružena je točka  $Z_i$ ,  $\forall i=1,2,3,4$ .) Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.



Slika 1.



Slika 2.

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 1</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Uvod.</b> <b>Kompleksni brojevi.</b> - zadaci
--	---	---

## RJEŠENJA ZADATAKA

### 1.2. REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI. ALGEBARSKE OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

1.  $z = \frac{50}{7} \cdot \left( \frac{7+i}{7-i} - \frac{7-i}{7+i} \right) - 3 = -3 + 4 \cdot i.$

a)  $|z| = 5;$

b)  $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = -3 \\ x - 2y + 12 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = 5.$

2. Dovoljno je (pokušati) usporediti brojeve  $i$  i  $0$ .

Ako bi bilo  $i \geq 0$ , onda bi odatle slijedilo  $i \cdot i \geq 0$ , tj.  $-1 > 0$ , što je netočno.

Ako bi bilo  $i < 0$ , onda bi odatle opet slijedila netočna jednakost  $i \cdot i \geq 0$ , tj.  $-1 > 0$ .

Dakle, traženo proširenje ne postoji.

3.

a)  $z_1 = \frac{-1-i}{1-i} = -i \Rightarrow Z_1 = (0, -1) \Rightarrow |z_1| = 1;$

$z_2 = -4 \Rightarrow Z_2 = (-4, 0) \Rightarrow |z_2| = 4.$

b)  $\left| \left( \overline{z_1} - \frac{1}{4} \cdot \overline{z_2} \right)^{2020} \right| = \left| \left( \overline{\overline{z_1} - \frac{1}{4} \cdot \overline{z_2}} \right)^{2020} \right| = \left| \overline{z_1 - \frac{1}{4} \cdot z_2} \right|^{2020} = \left| z_1 - \frac{1}{4} \cdot z_2 \right|^{2020} = |1-i|^{2020} = (\sqrt{2})^{2020} = 2^{1010}.$

4. a) Neka je  $z_0 = a_0 + b_0 \cdot i$ , za proizvoljne, ali fiksirane  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ . Neka je  $z = x + y \cdot i$ , pri čemu su  $x, y \in \mathbb{R}$ . U Gaussovoj je ravnini kompleksnom broju  $z_0$  pridružena točka  $Z_0 = (a_0, b_0)$ , a kompleksnom broju  $z$  točka  $Z = (x, y)$ . Očito je  $z - z_0 = (x - a_0) + (y - b_0) \cdot i$ , otkuda je  $|z - z_0| = \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2}$ . Iz uvjeta  $|z - z_0| = r$  slijedi  $(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r^2$ . To je jednadžba kružnice sa središtem u točki  $Z_0$  i polumjerom  $r$ . Ta kružnica je traženi grafički prikaz.

b) Grafički prikazi su redom:

- krug sa središtem u točki pridruženoj broju  $z_0$  i polumjerom  $r$ ;
- otvoreni krug sa središtem u točki pridruženoj broju  $z_0$  i polumjerom  $r$ ;
- Gaussova ravnina bez otvorenog kruga sa središtem u točki pridruženoj broju  $z_0$  i polumjerom  $r$ ;
- Gaussova ravnina bez kruga sa središtem u točki pridruženoj broju  $z_0$  i polumjerom  $r$ .

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 1</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Uvod.</b> <b>Kompleksni brojevi.</b> - zadaci
--	---	---

c)  $S_1$  je središnja jedinična kružnica.

$S_2$  je kružni vijenac sa središtem u točki  $(-1, 0)$ , unutrašnjim polumjerom 2 i vanjskim polumjerom 3.

5. a)  $S_1$  je pravac  $p_1 \dots y = x$ , tj. simetrala II. i IV. kvadranta Gaussove ravnine.  
 b)  $S_2$  je pravac  $p \dots y = x - 1$ .  
 c)  $S_3$  je skupovna unija pozitivnoga dijela realne osi, negativnoga dijela imaginarne osi i ishodišta.  
 d)  $S_4$  je središnja kružnica polumjera  $r = 2$ .

### 1.3. OBLICI ZAPISA KOMPLEKSNOGA BROJA. DE MOIVRÈOVE FORMULE

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} z &= \frac{\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2021}}{\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5}{12} \cdot \pi\right)\right)^{2019}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2021} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{2019} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right)} = 2 \cdot \operatorname{cis}(0) = 2 \cdot e^{i \cdot 0} = 2; \\ \mathbf{b)} z &= 8 \cdot \frac{\overline{\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{23}{12} \cdot \pi\right)}{\left(2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right)\right)^9}\right)^{18}}}{-\sqrt{3}} = 8 \cdot \overline{\left(\frac{1}{8} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i = 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7}{6} \pi}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \operatorname{Arg}(z_1) = \pi + \operatorname{arctg}(1) = \frac{5}{4} \cdot \pi, \\ \varphi_2 &:= \operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \\ \varphi_3 &:= \operatorname{Arg}(z_3) = 2016 \cdot (\pi + \varphi_1 - \varphi_2) = 4200 \cdot \pi = 2100 \cdot (2 \cdot \pi) = 0 \text{ rad}. \end{aligned}$$

3. Odredimo najprije algebarski oblik, modul i glavni argument obaju brojeva:

$$\begin{aligned} Z_2 &= (1, \sqrt{3}) \Rightarrow z_2 = 1 + i \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \\ r_1 &= 2, \quad \varphi_1 = 2 \cdot \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{6} \cdot \pi \Rightarrow z_1 = 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{11}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \left(\underbrace{\cos\left(\frac{11}{6} \cdot \pi\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{11}{6} \cdot \pi\right)}_{=-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Potom izračunamo:

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 1</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Uvod.</b> <b>Kompleksni brojevi.</b> - zadaci
---	---	---

$$\begin{aligned}
 z_1 - z_2 &= (\sqrt{3} - i) - (1 + i\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1) + (-\sqrt{3} - 1)i, \\
 \operatorname{Arg}(z_1 - z_2) &= 2\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = 2\pi - \frac{5}{12}\pi = \frac{19}{12}\pi, \\
 z_1 + z_2 &= (\sqrt{3} - i) + (1 + i\sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i, \\
 \operatorname{Arg}(z_1 + z_2) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{\pi}{12}.
 \end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1 - z_2) - \operatorname{Arg}(z_1 + z_2) = \frac{19}{12}\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{18}{12}\pi = \frac{3}{2}\pi \text{ rad.}$$

4.

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right), n=3 \Rightarrow z_k = \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{(8k+3)\pi}{12}\right), k=0, 1, 2.$$

$$k=0: z_0 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{(8 \cdot 0 + 3)\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$z_0 \text{ pripada I. kvadrantu Gaussove ravnine} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+i;$$

$$k=1: z_1 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{(8 \cdot 1 + 3)\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$k=2: z_2 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{(8 \cdot 2 + 3)\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right);$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}\right) = 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 2 \cdot i.$$

5.

$$z = -i \Leftrightarrow z = \operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\pi\right).$$

$$z = \operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\pi\right), n=12 \Rightarrow z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{4k+3}{24}\pi\right), k=0, 1, \dots, 11.$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{4k+3}{24}\pi < \frac{5}{4}\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k < \frac{27}{4} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Rješenje s najmanjim glavnim argumentom dobije se za  $k=1$ .

Rješenje s najvećim glavnim argumentom dobije se za  $k=6$ .

$$z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{7}{24}\pi\right), z_6 = \operatorname{cis}\left(\frac{9}{8}\pi\right) \Rightarrow z_1 \cdot z_6 = \operatorname{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right) = -0.25882 - 0.96593i$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 1</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Uvod.</b> <b>Kompleksni brojevi.</b> - zadaci
---	---	---

6. Primijetimo da su točke  $Z_1, \dots, Z_4$  i točka  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  vrhovi pravilnoga šesterokuta upisanoga u središnju kružnicu polumjera 2. (Preostali šesti vrh toga šesterokuta je neoznačena točka.) Prema de Moivrèovoj formuli za korjenovanje, postoji jedinstven  $w \in \mathbb{C}$  takav da su  $Z_1, \dots, Z_4$  i točka  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  pridruženi šestim korijenima iz broja  $w$ .

Točka  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  je pridružena kompleksnom broju  $z_5 = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right)$ , pa slijedi:

$$w = z_5^6 = 2^6 \cdot \text{cis}\left(6 \cdot \frac{5}{4} \cdot \pi\right) = 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{15}{2} \cdot \pi\right) = 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi + 3 \cdot 2 \cdot \pi\right) = 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right).$$

Korištenjem de Moivrèove formule za korjenovanje odredimo kompleksne brojeve pridružene točkama  $Z_1, \dots, Z_4$ . Zapisat ćemo ih u algebarskom obliku:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 2 \cdot \pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{7}{12} \cdot \pi\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right) \cdot i, \\ z_2 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 4 \cdot \pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{11}{12} \cdot \pi\right) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \cdot i, \\ z_3 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 8 \cdot \pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{19}{12} \cdot \pi\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) \cdot i, \\ z_4 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 10 \cdot \pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{23}{12} \cdot \pi\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) \cdot i. \end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo:

$$|z_1 + z_4| - |z_2 - z_3| = |\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i| - |-\sqrt{6} + \sqrt{6} \cdot i| = 2 - 2 \cdot \sqrt{3}.$$