1. UVOD. KOMPLEKSNI BROJEVI

1.2. KOMPLEKSNI BROJEVI. ALGEBARSKE OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

1.2.1. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA

- Jednadžba $x^2 = -1$ nema rješenja u skupu $\mathbb{R}$.
- Zbog toga se nametnula potreba proširenja skupa $\mathbb{R}$ na skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C} := \left\{ a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, gdje je *i imaginarna jedinica.*
- Svaki $a \in \mathbb{R}$ možemo shvatiti kao kompleksan broj $a + 0 \cdot i$.
- Zbog toga vrijedi relacija: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Općenito, vrijede relacije: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Također vrijede sljedeće jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} i^{4\cdot k} &= 1, \\ i^{4\cdot k+1} &= i, \\ i^{4\cdot k+2} &= -1, \\ i^{4\cdot k+3} &= -i \end{aligned}\right\} \forall k \in \mathbb{Z}.$$

1.2.2. OSNOVNE VELIČINE

- Za zadani $z \in \mathbb{C}$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$, definiramo:
- *realni dio* (oznaka: $\mathrm{Re}(z)$) $:= a$;
- *imaginarni dio* (oznaka: $\mathrm{Im}(z)$) $:= b$;
- *konjugat*: $\overline{z} := a - b \cdot i$;
- *apsolutnu vrijednost* (*modul*): $|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- Napomena: Za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijede jednakosti:

$$1.)\quad |z| = |\overline{z}|;$$

$$2.)\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

1.2.3. JEDNAKOST KOMPLEKSNIH BROJEVA

- Dva kompleksna broja su *jednaka* ako i samo ako su međusobno jednaki njihovi realni dijelovi i međusobno jednaki njihovi imaginarni dijelovi.
- Formalno, ako su $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ i $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$, pri čemu su a_1, b_1, a_2 i $b_2 \in \mathbb{R}$, onda vrijedi:

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow \Big(\big(\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)\big) \wedge \big(\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)\big)\Big)$$

- Jednostavnije zapisano:

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow \big((a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)\big)$$

1.2.4. KOMPLEKSNA ILI GAUSSOVA RAVNINA

- Svakom $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$, jednoznačno možemo pridružiti uređeni par $\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right)$, tj. (a, b).
- Grafički prikaz skupa svih tako dobivenih uređenih parova naziva se *kompleksna* ili *Gaussova* ravnina.
- Kompleksna ravnina je, zapravo, "običan" pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pri čemu os apscisa predstavlja os realnih dijelova (kraće: *realnu os*), a os ordinata predstavlja os imaginarnih dijelova (kraće: *imaginarnu os*).

1.2.5. GEOMETRIJSKO ZNAČENJE OSNOVNIH VELIČINA

- Poistovjetimo li $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ s točkom $Z = (a, b)$ u Gaussovoj ravnini, onda je:
- $\mathrm{Re}(z)$ – ortogonalna projekcija točke Z na realnu os;
- $\mathrm{Im}(z)$ – ortogonalna projekcija točke Z na imaginarnu os;
- $\overline{z}$ – osnosimetrična slika točke Z s obzirom na realnu os;
- $|z|$ – udaljenost točke Z od *ishodišta* Gaussove ravnine (tj. od točke $O := (0,0)$)
-

1.2.6. ALGEBARSKE OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

- Kompleksne brojeve možemo *zbrajati*, *oduzimati*, *množiti* i *dijeliti*.
- Za brojeve

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i,\ \ z_2 = a_2 + b_2 \cdot i \in \mathbb{C}$$

- definiramo:

zbroj/razliku: $z_1 \pm z_2 := (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i;$

umnožak: $z_1 \cdot z_2 := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i.$

1.2.6. ALGEBARSKE OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

- *količnik* (u slučaju kad je $z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$$

- Zbroj, razlika, umnožak i količnik dvaju kompleksnih brojeva su ponovno kompleksni brojevi.
- Operacije zbrajanja i množenja imaju sva svojstva (komutativnost, asocijativnost, distributivnost,...) koja imaju analogne operacije u skupu $\mathbb{R}$.

1.2.7. SVOJSTVA APSOLUTNE VRIJEDNOSTI (MODULA)

- Funkcija $f:\mathbb{C}\to[0,+\infty\rangle$ definirana pravilom $f(z)=|z|$
- ima sljedeća svojstva:

1. $f(z)\geq 0,\ \forall z\in\mathbb{C}.$

2. $\big(f(z)=0\big)\Leftrightarrow(z=0).$

3. $f(z_1\cdot z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$

4. $f\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{f(z_1)}{f(z_2)},\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C},z_2\neq 0.$

5. $f\left(\overline{z}\right)=\overline{f(z)},\ \forall z\in\mathbb{C}.$

6. $f\left(z^n\right)=\left(f(z)\right)^n,\ \forall z\in\mathbb{C},\ \forall n\in\mathbb{N}.$

7. $f(z_1+z_2)\leq f(z_1)+f(z_2),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$

1.2.8. SVOJSTVA KONJUGIRANJA

- Funkcija $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definirana pravilom $g(z)=\overline{z}$
- ima sljedeća svojstva:

1. $\big(g(z)=0\big)\Leftrightarrow(z=0).$

2. $g(z_1\pm z_2)=g(z_1)\pm g(z_2),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$

3. $g\big(g(z)\big)=z,\forall z\in\mathbb{C}.$

4. $g(z_1\cdot z_2)=g(z_1)\cdot g(z_2),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$

5. $g\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{g(z_1)}{g(z_2)},\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C},z_2\neq 0.$

6. $\big(g(z)=z\big)\Leftrightarrow(z\in\mathbb{R}).$

7. $\big(g(z)=-z\big)\Leftrightarrow\big(\exists b\in\mathbb{R}:z=b\cdot i\big).$

1. Zadan je kompleksan broj $z=\frac{50}{7}\cdot\overline{\left(\frac{(2-i)\cdot(3+i)}{7+i}-\frac{(2+i)\cdot(3-i)}{7-i}\right)}-3$.

a) Izračunajte apsolutnu vrijednost (modul) zadanoga broja.

b) Odredite $x,y\in\mathbb{R}$ tako da brojevi $z_1=(2\cdot x-y-2)+(x-2\cdot y+12)\cdot i$ i z budu jednaki.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
z&=\frac{50}{7}\cdot\overline{\left(\frac{6-3\cdot i+2\cdot i-i^2}{7+i}-\frac{6+3\cdot i-2\cdot i-i^2}{7-i}\right)}-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\overline{\left(\frac{6-i-(-1)}{7+i}-\frac{6+i-(-1)}{7-i}\right)}-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\overline{\left(\frac{7-i}{7+i}-\frac{7+i}{7-i}\right)}-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\left(\frac{7+i}{7-i}-\frac{7-i}{7+i}\right)-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\left(\frac{(7+i)^2-(7-i)^2}{(7-i)\cdot(7+i)}\right)-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\left(\frac{(7+i-(7-i))\cdot(7+i+(7-i))}{7^2-i^2}\right)-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\left(\frac{(7+i-7+i)\cdot(7+i+7-i)}{49-(-1)}\right)-3=\\
&=\frac{50}{7}\cdot\left(\frac{2\cdot i\cdot 14}{49+1}\right)-3=\\
&=-3+4\cdot i.
\end{aligned}
$$

a)
$$
\begin{aligned}
|z|&=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\\
&=\sqrt{9+16}=\\
&=\sqrt{25}=\\
&=5;
\end{aligned}
$$

b) $z_1=z,$

$$
\begin{cases}2\cdot x-y-2=-3,\\ x-2\cdot y+12=4\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}2\cdot x-y=-1,\\ x-2\cdot y=-8\end{cases}
$$

$(x,y)=(2,5).$

2. Pokažite da na skup $\mathbb{C}$ ne možemo proširiti standardni uređaj $\leq$ uveden na skupu $\mathbb{R}$.

Rješenje:

Dovoljno je (pokušati) usporediti brojeve i i 0.

Ako bi bilo

$$i \geq 0,$$

onda bi odatle slijedilo

$$i \cdot i \geq 0,$$
$$-1 \geq 0,$$

što je netočno.

Ako bi bilo

$$i < 0,$$

onda bi odatle opet slijedila netočna jednakost

$$i \cdot i > 0,$$
$$-1 > 0.$$

Dakle, traženo proširenje ne postoji.

3. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = \dfrac{i^{2022} + i^{2023}}{i^{2024} - i^{2025}}$ i $z_2 = (1+i)^3 + (1-i)^3$.

a) Prikažite zadane brojeve u Gaussovoj ravnini i **sa slike** odredite njihove module.

b) Izračunajte $\left|\left(\overline{z_1} - \dfrac{1}{4}\cdot\overline{z_2}\right)^{2024}\right|$ i zapišite dobiveni rezultat kao potenciju s bazom 2.

Rješenje:

a) $z_1 = \dfrac{-1-i}{1-i} =$

$= \dfrac{(-1-i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} =$

$= \dfrac{-1-i-i-i^2}{1^2-i^2} =$

$= \dfrac{-1-i-i-(-1)}{1-(-1)} =$

$= \dfrac{-1-i-i+1}{1+1} =$

$= \dfrac{-2\cdot i}{2} =$

$= -i,$

$Z_1 = (0,-1),$

$|z_1| = 1;$

$z_2 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 + i^3 + 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 - i^3 =$

$= 1 + 3\cdot(-1) + 1 + 3\cdot(-1) =$

$= 1 - 3 + 1 - 3 =$

$= -4,$

$Z_2 = (-4,0),$

$|z_2| = 4.$

b) $$\left|\overline{\left(\overline{z_1}-\frac{1}{4}\cdot\overline{z_2}\right)^{2024}}\right|=\left|\overline{\left(\overline{z_1}-\frac{1}{4}\cdot\overline{z_2}\right)}\right|^{2024}=$$

$$=\left|\overline{\overline{z_1}}-\overline{\frac{1}{4}}\cdot\overline{\overline{z_2}}\right|^{2024}=$$

$$=\left|z_1-\frac{1}{4}\cdot z_2\right|^{2024}=$$

$$=\left|-i-\frac{1}{4}\cdot(-4)\right|^{2024}=$$

$$=\left|1-i\right|^{2024}=$$

$$=\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^{2024}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{2024}=$$

$$=2^{1012}.$$

4. a) Neka su $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r \geq 0$ proizvoljni, ali fiksirani. Odredite grafički prikaz skupa

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

u Gaussovoj ravnini.

b) Odredite grafički prikaz skupa S iz a) podzadatka u Gaussovoj ravnini ako se znak jednakosti u tom podzadatku zamijeni redom znakovima $\leq$, $<$, $\geq$ i $>$.

c) Skicirajte skupove $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z+1| \leq 3\}$ u Gaussovoj ravnini.

Rješenje:

a) Neka je $z_0 = a_0 + b_0 \cdot i$, za proizvoljne, ali fiksirane $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $z = x + y \cdot i$, pri čemu su $x, y \in \mathbb{R}$. U Gaussovoj je ravnini kompleksnom broju z_0 pridružena točka $Z_0 = (a_0, b_0)$, a kompleksnom broju z točka $Z = (x, y)$. Očito je

$$z - z_0 = (x - a_0) + (y - b_0) \cdot i,$$

otkuda je

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2}.$$

Iz uvjeta $|z - z_0| = r$ slijedi

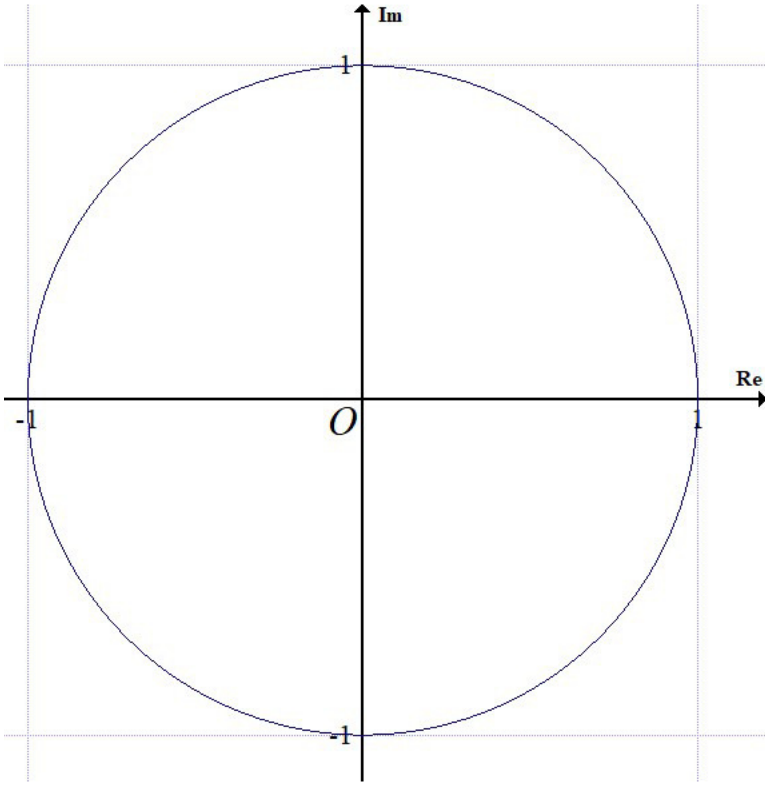
$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r^2.$$

To je jednadžba kružnice sa središtem u točki Z_0 i polumjerom r. Ta kružnica je traženi grafički prikaz.

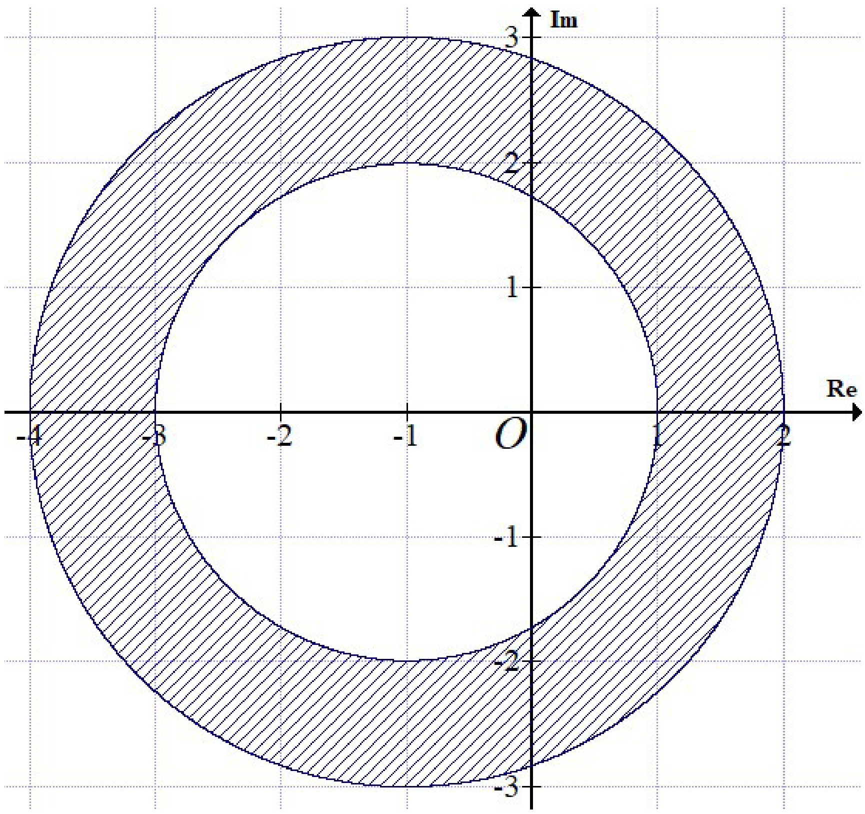
b) Grafički prikazi su redom:

- krug sa središtem u točki pridruženoj broju z_0 i polumjerom r;
- otvoreni krug sa središtem u točki pridruženoj broju z_0 i polumjerom r;
- Gaussova ravnina bez otvorenog kruga sa središtem u točki pridruženoj broju z_0 i polumjerom r;
- Gaussova ravnina bez kruga sa središtem u točki pridruženoj broju z_0 i polumjerom r.

c) Vidjeti slike 1. i 2.



Slika 1.



Slika 2.

5. Skicirajte sljedeće skupove točaka u Gaussovoj ravnini:

a) $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0\}$;

b) $S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(2 \cdot \overline{z}\right) - \mathrm{Re}\left(-2 \cdot z\right) = 2\right\}$;

c) $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = |z|\}$;

d) $S_4 = \left\{z \in \mathbb{C} : z = 4 \cdot \left(\overline{z}\right)^{-1}\right\}$.

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = x + y \cdot i,\ x, y \in \mathbb{R}$.

a)

$$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0,$$
$$x + y = 0,$$
$$y = -x.$$

S_1 je pravac $p_1 \ldots y = -x$, tj. simetrala II. i IV. kvadranta Gaussove ravnine. Vidjeti sliku 3.

b)

$$\mathrm{Im}\left(2 \cdot \overline{z}\right) - \mathrm{Re}\left(-2 \cdot z\right) = 2,$$
$$\mathrm{Im}\left(2 \cdot (x - y \cdot i)\right) - \mathrm{Re}\left(-2 \cdot (x + y \cdot i)\right) = 2,$$
$$\mathrm{Im}\left(2 \cdot x - 2 \cdot y \cdot i)\right) - \mathrm{Re}\left(-2 \cdot x - 2 \cdot y \cdot i)\right) = 2,$$
$$-2 \cdot y - (-2 \cdot x) = 2,$$
$$y - x = -1,$$
$$y = x - 1.$$

S_2 je pravac $p \ldots y = x - 1$. Vidjeti sliku 4.

c)

$$\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = |z|,$$
$$x - y = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$(\text{uz uvjet } x - y \geq 0) \quad (x - y)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2,$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = x^2 + y^2,$$
$$x \cdot y = 0.$$

S_3 je skupovna unija pozitivnoga dijela realne osi, negativnoga dijela imaginarne osi i ishodišta. Vidjeti sliku 5.

d)

$$z = 4 \cdot \left(\overline{z}\right)^{-1},$$

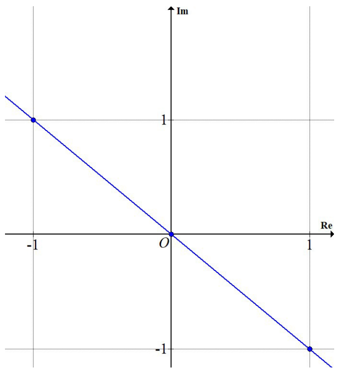
$$z \cdot \overline{z} = 4 \cdot \left(\overline{z}\right)^{-1} \cdot \overline{z},$$

$$z \cdot \overline{z} = 4 \cdot 1,$$

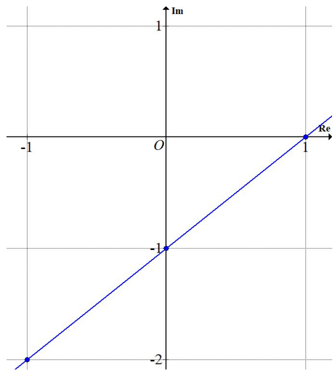
$$|z|^2 = 4,$$

$$|z| = 2.$$

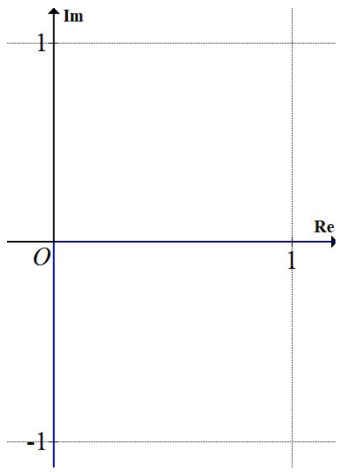
S_4 je središnja kružnica polumjera $r = 2$. Vidjeti sliku 6.



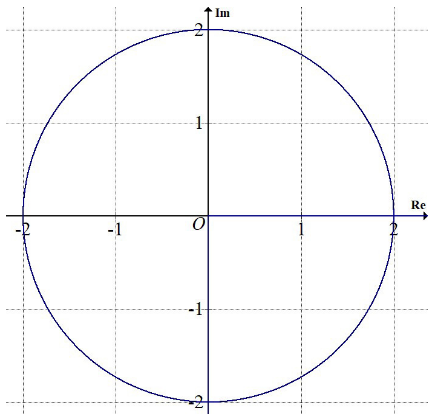
Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.



Slika 6.