1.3.

METODA ZAMJENE (SUPSTITUCIJE)

1.3.1. METODA ZAMJENE (SUPSTITUCIJE)

- Antiderivaciju koja nije „tablična” često možemo odrediti svođenjem na „tabličnu” metodom zamjene (supstitucije).
- Pretpostavimo da treba odrediti $\int f(x)\cdot \mathrm{d}x$.
- Algoritam:
- 1. Zamijenimo: $t := g(x)$, pri čemu g mora biti „konkretna” funkcija (zapravo, bijekcija).
- 2. Ako je potrebno, izrazimo x pomoću t, tj. zamijenimo $x = g^{-1}(t)$.
- 3. Diferencijal $\mathrm{d}x$ zamijenimo s $\frac{\mathrm{d}t}{g'(x)}$ ($\mathrm{d}t$ „prepišemo”, a g' odredimo deriviranjem).
- 4. Odredimo antiderivaciju funkcije dobivene zamjenama opisanima u prethodnim koracima.
- 5. U rezultatu Koraka 4. umjesto t pišemo pravilo funkcije g (iz Koraka 1.) Dobiveni izraz je tražena antiderivacija.

1.3.2. NAPOMENA

- Ako je zamjena „dobra”, nakon provedbe Koraka 3. trebali bismo dobiti integral bitno jednostavniji od polaznoga (idealno: „tablični”, ali nije nužno).
- Opće pravilo kada (ne) treba primijeniti metodu zamjene ne postoji!

1. Pogodnom zamjenom odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int (2024 \cdot x - 2025)^{2026} \cdot \mathrm{d}x$;

Rješenje: Ideja je zamijeniti

$$t := 2024 \cdot x - 2025.$$

Diferenciranjem obiju strana te jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= (2024 \cdot x - 2025)' \cdot \mathrm{d}x = \\
&= (2024 \cdot 1 - 0) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2024 \cdot \mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}x &= \frac{1}{2024} \cdot \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ponovno tražimo neodređeni integral, pa ćemo pretpostaviti da je $C \in \mathbb{R}$ konstanta. Tako sada imamo:

$$\begin{aligned}
I &= \int t^{2026} \cdot \frac{1}{2024} \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2024} \cdot \int t^{2026} \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2024} \cdot \frac{1}{2026+1} \cdot t^{2026+1} = \\
&= \frac{1}{4\,102\,648} \cdot t^{2027} = \\
&= \frac{1}{4\,102\,648} \cdot (2024 \cdot x - 2025)^{2027} + C.
\end{aligned}$$

b) $\int \frac{20 \cdot t \cdot \mathrm{d}t}{\sin^2\left(2 \cdot t^2 + 1\right)}$;

Rješenje: U ovome je podzadatku ideja zamijeniti

$$u := 2 \cdot t^2 + 1.$$

Diferenciranjem obiju strana te jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \left(2 \cdot t^2 + 1\right)' \cdot \mathrm{d}t = \\ &= (2 \cdot 2 \cdot t + 0) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 4 \cdot t \cdot \mathrm{d}t, \\ t \cdot \mathrm{d}t &= \frac{1}{4} \cdot \mathrm{d}u, \qquad / \cdot 20 \\ 20 \cdot t \cdot \mathrm{d}t &= 5 \cdot \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Tako sada imamo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5 \cdot \mathrm{d}u}{\sin^2 u} = \\ &= 5 \cdot \int \frac{1}{\sin^2 u} \cdot \mathrm{d}u = \\ &= 5 \cdot \left(-\mathrm{ctg}\; u\right) = \\ &= (-5) \cdot \mathrm{ctg}\; u = \\ &= (-5) \cdot \mathrm{ctg}\left(2 \cdot t^2 + 1\right) + C. \end{aligned}$$

c) $\int \frac{\pi \cdot \sin(2 \cdot u)}{\sqrt{\sin^2 u + \mathrm{e}}} \cdot \mathrm{d}u;$

Rješenje: U ovome je podzadatku ideja zamijeniti

$$t := \sin^2 u + \mathrm{e}.$$

Diferenciranjem te jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \left(\sin^2 u + \mathrm{e}\right)' \cdot \mathrm{d}u = \\ &= \left(2 \cdot \sin u \cdot (\sin u)' + 0\right) \cdot \mathrm{d}u = \\ &= (2 \cdot \sin u \cdot \cos u) \cdot \mathrm{d}u = \\ &= \sin(2 \cdot u) \cdot \mathrm{d}u, \quad / \cdot \pi \\ \pi \cdot \sin(2 \cdot u) \cdot \mathrm{d}u &= \pi \cdot \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tako sada imamo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\pi}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \pi \cdot \int t^{\frac{-1}{2}} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \pi \cdot \frac{1}{\frac{-1}{2} + 1} \cdot t^{\frac{-1}{2}+1} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot t^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{t} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\sin^2 u + \mathrm{e}} + C. \end{aligned}$$

Napomena: Zamjenom $t := \sin^2 u$ dobije se integral

$$\int \frac{\pi}{\sqrt{t + \mathrm{e}}} \cdot \mathrm{d}t.$$

On se odredi (novom) zamjenom $x = t + \mathrm{e}$, što zapravo znači da je $x = \sin^2 u + \mathrm{e}$. Na ovaj način polazni integral zapravo rješavamo gore opisanim postupkom, ali nešto kompliciranije (jer provodimo dvije zamjene). Uvjerite se da i tako dobivamo gore navedeno rješenje.

d) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} w} + 2024 \cdot w \cdot \ln\left(w^2+1\right)}{w^2+1} \cdot \mathrm{d}w.$

Rješenje: Zadani integral najprije rastavimo na zbroj dvaju integrala:

$$I = \int \left(\frac{e^{\operatorname{arctg} w}}{w^2+1} + \frac{2024 \cdot w \cdot \ln\left(w^2+1\right)}{w^2+1} \right) \cdot \mathrm{d}w =$$
$$= \underbrace{\int \frac{e^{\operatorname{arctg} w}}{w^2+1} \cdot \mathrm{d}w}_{=:I_1} + 2024 \cdot \underbrace{\int \frac{w \cdot \ln\left(w^2+1\right)}{w^2+1} \cdot \mathrm{d}w}_{=:I_2}.$$

Odredimo zasebno svaki pribrojnik. Radi skraćenja postupka, odredit ćemo *standardne antiderivacije* svake podintegralne funkcije, zbrojiti ih i „nadopisati“ konstantu $C \in \mathbb{R}$.

Za određivanje prvoga pribrojnika prirodno je zamijeniti

$$t := \operatorname{arctg} w.$$

Diferenciranjem te jednakosti dobijemo:

$$\mathrm{d}t = (\operatorname{arctg} w)' \cdot \mathrm{d}w =$$
$$= \frac{1}{w^2+1} \cdot \mathrm{d}w.$$

Zbog toga je:

$$I_1 = \int e^{\operatorname{arctg} w} \cdot \frac{1}{w^2+1} \cdot \mathrm{d}w =$$
$$= \int e^t \cdot \mathrm{d}t =$$
$$= e^t =$$
$$= e^{\operatorname{arctg} w}.$$

Za određivanje drugoga pribrojnika prirodno je zamijeniti

$$t := \ln\left(w^2+1\right).$$

Diferenciranjem te jednakosti dobivamo:

$$\mathrm{d}t = \left(\ln\left(w^2+1\right)\right)' \cdot \mathrm{d}w =$$
$$= \left(\frac{1}{w^2+1} \cdot \left(w^2+1\right)' \right) \cdot \mathrm{d}w =$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{1}{w^2+1}\cdot(2\cdot w+0)\right)\cdot \mathrm{d}w=\\
&=\frac{2\cdot w}{w^2+1}\cdot \mathrm{d}w=\\
&=2\cdot\frac{w}{w^2+1}\cdot \mathrm{d}w,
\end{aligned}
$$

$$\frac{w}{w^2+1}\cdot \mathrm{d}w=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t.$$

Zbog toga je:

$$
\begin{aligned}
I_2&=\int \ln\left(w^2+1\right)\cdot\frac{w}{w^2+1}\cdot \mathrm{d}w=\\
&=\int t\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\int t\cdot \mathrm{d}t=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1}\cdot t^{1+1}=\\
&=\frac{1}{4}\cdot t^2=\\
&=\frac{1}{4}\cdot \ln^2\left(w^2+1\right).
\end{aligned}
$$

Tako konačno dobivamo:

$$
\begin{aligned}
I&=I_1+2024\cdot I_2=\\
&=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} w}+2024\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln^2\left(w^2+1\right)=\\
&=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} w}+506\cdot\ln^2\left(w^2+1\right)+C.
\end{aligned}
$$

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{12 \cdot t^2}{\sqrt{t^6+1}} \cdot \mathrm{d}t$;

Rješenje: U ovome je podzadatku ideja zamijeniti

$$x := t^3.$$

Diferenciranjem te jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \left(t^3\right)' \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 3 \cdot t^{3-1} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 3 \cdot t^2 \cdot \mathrm{d}t, \quad / \cdot 4 \\ 12 \cdot t^2 \cdot \mathrm{d}t &= 4 \cdot \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ponovno tražimo neodređeni integral, pa ćemo pretpostaviti da je $C \in \mathbb{R}$ konstanta. Tako sada imamo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 4 \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| = \\ &= 4 \cdot \ln\left|t^3 + \sqrt{t^6+1}\right| + C. \end{aligned}$$

b) $\int \frac{8 \cdot x}{\sqrt{4-x^4}} \cdot \mathrm{d}x$;

Rješenje: U ovome je podzadatku ideja zamijeniti

$$t := x^2.$$

Diferenciranjem te jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \left(x^2\right)' \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot x^{2-1} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x, \quad / \cdot 4 \\ 8 \cdot x \cdot \mathrm{d}x &= 4 \cdot \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4 \cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}} = \\ &= 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - t^2}} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 4 \cdot \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) = \\ &= 4 \cdot \arcsin\left(\frac{x^2}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

c) $\int 168 \cdot u \cdot (2 \cdot u + 1)^5 \cdot \mathrm{d}u$;

Rješenje: U ovome je podzadatku ideja zamijeniti

$$t := 2 \cdot u + 1.$$

Diferenciranjem te jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= (2 \cdot u + 1)' \cdot \mathrm{d}u = \\ &= (2 \cdot 1 + 0) \cdot \mathrm{d}u = \\ &= 2 \cdot \mathrm{d}u, \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Nadalje, iz $t := 2 \cdot u + 1$ slijedi

$$u = \frac{1}{2} \cdot (t - 1).$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} I &= \int 168 \cdot \frac{1}{2} \cdot (t-1) \cdot t^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 42 \cdot \int \left(t^6 - t^5\right) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 42 \cdot \left(\int t^6 \cdot \mathrm{d}t - \int t^5 \cdot \mathrm{d}t\right) = \\ &= 42 \cdot \left(\frac{1}{6+1} \cdot t^{6+1} - \frac{1}{5+1} \cdot t^{5+1}\right) = \\ &= 6 \cdot t^7 - 7 \cdot t^6 = \\ &= 6 \cdot (2 \cdot u + 1)^7 - 7 \cdot (2 \cdot u + 1)^6 = \\ &= (2 \cdot u + 1)^6 \cdot (6 \cdot (2 \cdot u + 1) - 7) = \\ &= (2 \cdot u + 1)^6 \cdot (12 \cdot u + 6 - 7) = \\ &= (2 \cdot u + 1)^6 \cdot (12 \cdot u - 1) + C. \end{aligned}$$

d) $\int \frac{5\cdot\sin(2\cdot w)}{\sqrt{2025-\cos^4 w}}\cdot \mathrm{d}w.$

Rješenje: U ovome je podzadatku ideja zamijeniti

$$t := \cos^2 w.$$

Diferenciranjem te jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \left(\cos^2 w\right)' \cdot \mathrm{d}w = \\
&= \left(2\cdot\cos w\cdot(\cos w)'\right)\cdot \mathrm{d}w = \\
&= \left(2\cdot\cos w\cdot(-\sin w)\right)\cdot \mathrm{d}w = \\
&= (-2)\cdot\sin w\cdot\cos w\cdot \mathrm{d}w = \\
&= -\sin(2\cdot w)\cdot \mathrm{d}w, \qquad /\cdot(-5) \\
5\cdot\sin(2\cdot w)\cdot \mathrm{d}w &= (-5)\cdot \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(-5)\cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{2025-t^2}} = \\
&= (-5)\cdot\int \frac{1}{\sqrt{45^2-t^2}}\cdot \mathrm{d}t = \\
&= (-5)\cdot\arcsin\left(\frac{t}{45}\right) = \\
&= (-5)\cdot\arcsin\left(\frac{1}{45}\cdot\cos^2 w\right) = \\
&= (\text{zbog neparnosti funkcije } \arcsin) = \\
&= 5\cdot\arcsin\left(\frac{-1}{45}\cdot\cos^2 w\right) + C.
\end{aligned}$$

3. Neka su f integrabilna realna funkcija, F njezina **standardna** antiderivacija i p polinom 1. stupnja čiji je vodeći koeficijent a. Dokažite da tada vrijedi jednakost:

$$\int (f\circ p)(x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot (F\circ p)(x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$p(x)=a\cdot x+b,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

Primjenom metode zamjene dobijemo:

$$\begin{aligned}\int f(a\cdot x+b)\cdot\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=a\cdot x+b,\\ \mathrm{d}t=(a\cdot x+b)'\cdot\mathrm{d}x=\\ \quad=a\cdot\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\\ &=\int f(t)\cdot\frac{1}{a}\cdot\mathrm{d}t=\\ &=\frac{1}{a}\cdot\int f(t)\cdot\mathrm{d}t=\\ &=\frac{1}{a}\cdot F(t)=\\ &=\frac{1}{a}\cdot F(a\cdot x+b)=\\ &=\frac{1}{a}\cdot(F\circ p)(x)+C,\ C\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Iz rezultata prethodnoga zadatka slijede jednakosti:

$$\left.\begin{array}{l}\int\frac{1}{a\cdot x+b}\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\ln|a\cdot x+b|+C,\\ \int\frac{1}{\sqrt{a\cdot x+b}}\cdot\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{a\cdot x+b}+C,\\ \int\cos(a\cdot x+b)\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\sin(a\cdot x+b)+C,\\ \int\sin(a\cdot x+b)\cdot\mathrm{d}x=\left(\frac{-1}{a}\right)\cdot\cos(a\cdot x+b)+C,\\ \int\mathrm{e}^{a\cdot x+b}\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x+b}+C,\end{array}\right\}\forall a,b,C\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$