1. UVOD. KOMPLEKSNI BROJEVI

1.3. OBLICI ZAPISA KOMPLEKSNOGA BROJA. DE MOIVRÈOVE FORMULE.

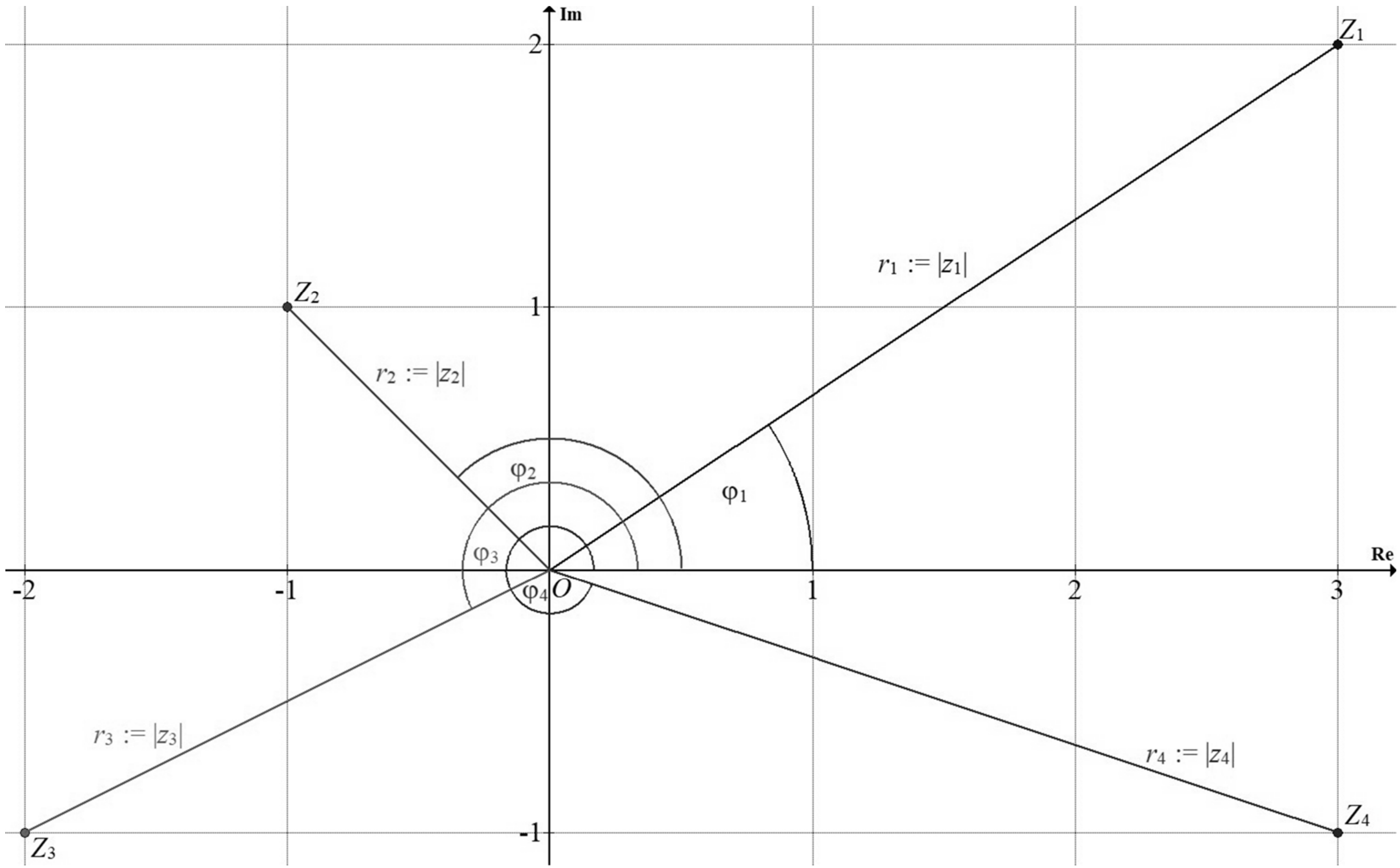
1.3.1. ALGEBARSKI ZAPIS KOMPLEKSNOGA BROJA

- Uobičajeni ("klasični") zapis kompleksnoga broja je zapis iz cjeline 1.2.
- Algebarski zapis: $z = a + b \cdot i$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Re}(z) := a =$ realni dio broja z
- $\mathrm{Im}(z) := b =$ imaginarni dio broja z
- $|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{a^2 + b^2} =$ modul broja z
- Osnovno svojstvo ovoga zapisa kompleksnoga broja: laka i brza provedba operacija zbrajanja i oduzimanja, a (tehnički) nešto teža i bitno sporija provedba operacija množenja i dijeljenja.

1.3.2. GLAVNI ARGUMENT KOMPLEKSNOGA BROJA

- *Svakom* broju $z \in \mathbb{C}$ pridružena je *točno jedna* točka kompleksne (Gaussove) ravnine.
- Pretpostavimo da je $z \neq 0$ i da je Z točka pridružena broju z.
- Spojnica točke Z s ishodištem Gaussove ravnine (tj. s točkom $O = (0, 0)$) zatvara jedinstven kut φ s **pozitivnim** dijelom realne osi (tj. s polupravcem čiji je početak točka O i kojega tvore sve točke kompleksne ravnine čija je prva koordinata nenegativna, a druga jednaka 0).
- Taj kut se dobije tako da se od pozitivnoga dijela realne osi krene u *smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu* sve dok se ne dođe do spojnice.
- *Mjera* kuta φ pripada intervalu $\left[0, 2 \cdot \pi\right\rangle$ i naziva se *glavni argument kompleksnoga broja z* (oznaka: $\mathrm{Arg}(z)$).
- **Napomena**: Za broj $z = 0$ glavni argument **nije definiran**.
- **Pogrešno** je: $\mathrm{Arg}(0) = 0$.

1.3.2. GLAVNI ARGUMENT KOMPLEKSNOGA BROJA



1.3.3. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE GLAVNOGA ARGUMENTA KOMPLEKSNOGA BROJA

- Ulaz (*input*): $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$
  Izlaz (*output*): glavni argument φ broja z (iskazan u radijanima).
- Korak 1. Ako je $a = 0$, onda:
- ako je $b > 0$, definirati $\varphi := \frac{\pi}{2}$. Kraj algoritma.
- ako je $b < 0$, definirati $\varphi := \frac{3}{2} \cdot \pi$. Kraj algoritma.
- Inače, ići na Korak 2.

1.3.3. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE GLAVNOGA ARGUMENTA KOMPLEKSNOGA BROJA

- Korak 2. Izračunati $\varphi_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ prema formuli:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

- Korak 3. Ako su $a \geq 0$ i $b > 0$, definirati:
- $\varphi \coloneqq \varphi_0$. Kraj algoritma.
- Inače, ići na Korak 4.

1.3.3. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE GLAVNOGA ARGUMENTA KOMPLEKSNOGA BROJA

- Korak 4. Ako su $a < 0$ i $b \geq 0$, definirati:
- $\varphi := \pi - \varphi_0$. Kraj algoritma.
- Inače, ići na Korak 5.
- Korak 5. Ako su $a < 0$ i $b \leq 0$, definirati:
- $\varphi := \pi + \varphi_0$. Kraj algoritma.
- Inače, ići na Korak 6.
- Korak 6. Ako su $a > 0$ i $b \leq 0$, definirati:
- $\varphi := 2 \cdot \pi - \varphi_0$. Kraj algoritma.

1.3.4. NAPOMENE

- 1. Ako glavni argument φ želimo iskazati u stupnjevima, onda rezultat dobiven prethodnim algoritmom trebamo pomnožiti brojem $\frac{180}{\pi}$.

- **Podsjetnik**: Mjeru kuta iskazanu u stupnjevima pretvaramo u mjeru kuta iskazanu u radijanima množenjem brojem $\frac{\pi}{180}$.

- Mjeru kuta iskazanu u radijanima pretvaramo u mjeru kuta iskazanu u stupnjevima množenjem brojem $\frac{180}{\pi}$.

1.3.4. NAPOMENE

- Neka je $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$. Tada vrijede jednakosti:

$$\operatorname{Arg}(\alpha \cdot z) = \begin{cases} \operatorname{Arg}(z), \text{ za } \alpha > 0; \\ \pi + \operatorname{Arg}(z), \text{ za } \alpha < 0 \text{ i } \operatorname{Arg}(z) \in [0, \pi\rangle, \\ \operatorname{Arg}(z) - \pi, \text{ za } \alpha < 0 \text{ i } \operatorname{Arg}(z) \in [\pi, 2 \cdot \pi\rangle. \end{cases}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\overline{z}\right) = 2 \cdot \pi - \varphi.$$

- Prvu jednakost možemo zapamtiti u obliku:
- *Množenjem kompleksnoga broja **strogo pozitivnim** realnim brojem **mijenja se modul** polaznoga broja, dok **glavni argument** ostaje **nepromijenjen**.*

1.3.5. TRIGONOMETRIJSKI OBLIK ZAPISA KOMPLEKSNOGA BROJA

- $z = r \cdot \mathrm{cis}\varphi := r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, gdje su:
- r := apsolutna vrijednost (modul) broja z
- φ := **glavni** argument broja z.
- **Osnovno svojstvo ovoga oblika zapisa kompleksnoga broja**: laka i brza provedba operacija množenja i dijeljenja.
- **Oprez**: **Nije moguće** zbrajati i oduzimati kompleksne brojeve zapisane u ovom obliku.
- Za provedbu tih operacija kompleksne brojeve je nužno zapisati u **algebarskom** obliku.

1.3.6. PRAVILO ZA MNOŽENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA ZAPISANIH U TRIGONOMETRIJSKOM OBLIKU

- Ako su $z_i = r_i \cdot \text{cis}(\varphi_i)$, $i = 1, 2,$ zadani kompleksni brojevi, onda je:
- $z_1 \cdot z_2$ kompleksan broj čiji je modul $r_1 \cdot r_2$, a glavni argument ostatak pri dijeljenju $\varphi_1 + \varphi_2$ s $2 \cdot \pi$, tj.

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot \text{cis}\left((\varphi_1 + \varphi_2) \bmod (2 \cdot \pi)\right).$$

- Općenito vrijedi:

$$\prod_{i=1}^{n} z_i = \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right) \cdot \text{cis}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right) \bmod (2 \cdot \pi)\right)$$

1.3.7. PRAVILO ZA DIJELJENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA ZAPISANIH U TRIGONOMETRIJSKOM OBLIKU

- Ako su $z_i = r_i \cdot \operatorname{cis}(\varphi_i)$, $i = 1, 2,$ zadani kompleksni brojevi takvi da je $z_2 \neq 0$, onda je
- $\dfrac{z_1}{z_2}$ kompleksan broj čiji su:
- modul $\dfrac{r_1}{r_2}$,
- glavni argument:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2, \text{ ako je } \varphi_1 \geq \varphi_2, \\ 2 \cdot \pi + \varphi_1 - \varphi_2, \text{ inače.} \end{cases}$$

1.3.8. PRETVORBA OBLIKA ZAPISA: ALGEBARSKI → TRIGONOMETRIJSKI

- Ulaz (*input*): $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$
- Izlaz (*output*): $z = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$, gdje su $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi\rangle$.
- Korak 1. Izračunati $r := \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Korak 2. Odrediti glavni argument φ algoritmom opisanim u točki 1.3.3.
- Korak 3. Zapisati: $z = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$.

1.3.9. PRETVORBA OBLIKA ZAPISA: TRIGONOMETRIJSKI → ALGEBARSKI

- Ulaz (*input*):

$$z = r \cdot \text{cis}(\varphi), \text{ gdje su } r \geq 0,\ \varphi \in \left[0, 2 \cdot \pi\right\rangle.$$

- Izlaz (*output*):
- $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.
- Korak 1. Izračunati $a := r \cdot \cos \varphi$.
- Korak 2. Izračunati $b := r \cdot \sin \varphi$.
- Korak 3. Zapisati: $z = a + b \cdot i$.

1.3.10. DE MOIVRÈOVA FORMULA ZA POTENCIRANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

- Brza i relativno jednostavna provedba operacije množenja kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku omogućuje relativno jednostavno potenciranje tih istih brojeva na velike (cjelobrojne) potencije.
- Točnije, neka su $n \in \mathbb{N}$ i $z = r \cdot \text{cis}(\varphi)$, gdje su $r > 0$
- i $\varphi \in \left[0, 2 \cdot \pi\right\rangle$.
- Tada vrijedi sljedeća *de Moivrèova formula za potenciranje kompleksnih brojeva*:

$$z^n = \left(r^n\right) \cdot \text{cis}\left((n \cdot \varphi) \operatorname{mod}(2 \cdot \pi)\right)$$

1.3.11. NAPOMENA

- Prethodna formula vrijedi i za bilo koji cijeli broj $n \in \mathbb{Z}$.
- Točnije, ako je $n < 0$, onda z^n ima:
- modul jednak r^n;
- glavni argument jednak $2 \cdot \pi - \left(\left| n \cdot \varphi \right| \mathrm{mod}(2 \cdot \pi) \right)$.
- (S $|\ |$ je označena "obična" apsolutna vrijednost realnoga broja).

1.3.12. DE MOIVRÈOVA FORMULA ZA KORJENOVANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

- Koristeći formulu za potenciranje kompleksnih brojeva može se pokazati da vrijedi sljedeća
- Tvrdnja: Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $z = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$, gdje su $r > 0$ i
- $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi\rangle$. Sva rješenja algebarske jednadžbe
  - $x^n = z$
- dana su formulom

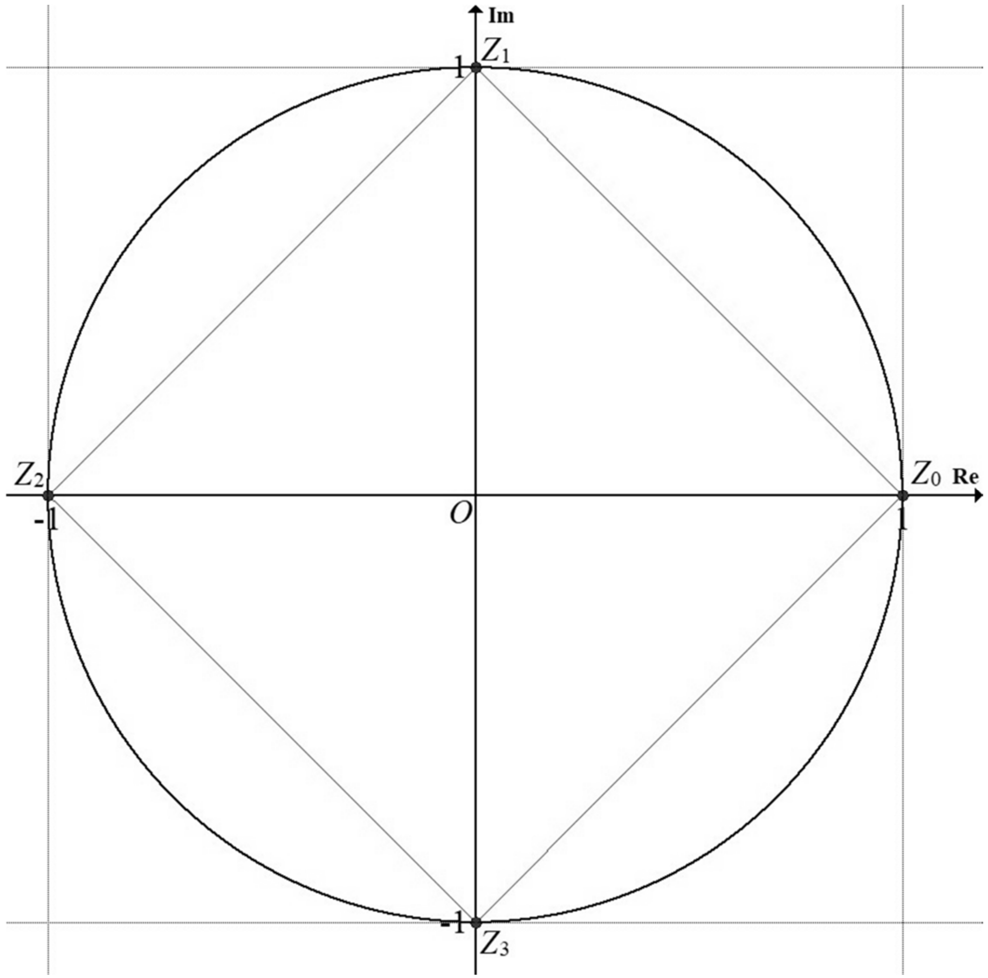
$$x_k = \left(\sqrt[n]{r}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi + k \cdot 2 \cdot \pi}{n}\right), \text{ za } k = 0,\ 1, \ldots,\ n-1.$$

1.3.13. NAPOMENA

- Može se pokazati sljedeća važna
- Tvrdnja: Točke u kompleksnoj ravnini koje su pridružene n -tim korijenima broja z tvore vrhove *pravilnoga n-terokuta upisanoga u središnju kružnicu polumjera* $\sqrt[n]{|z|}$.
- Pritom izraz *središnja kružnica* označava kružnicu čije je središte u točki $O = (0,\ 0)$, tj. u ishodištu Gaussove ravnine.

1.3.13. NAPOMENA

- Na donjoj slici prikazani su svi četvrti korijeni iz jedinice. Dokažite to za vježbu.



1.3.14. EKSPONENCIJALNI OBLIK ZAPISA KOMPLEKSNOGA BROJA

- U tehničkim znanostima često se koristi i zapis kompleksnoga broja koji se temelji na tzv. *Eulerovoj formuli*:

$$e^{i\cdot\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$$

- Lijeva strana te jednakosti je *eksponencijalna funkcija kompleksne varijable* čija je baza realan broj
- e ≈ 2.718281828459...
- Za $\varphi = \pi$ dobivamo tzv. *Eulerov identitet* koji povezuje tri matematičke grane analizu, algebru i geometriju: $e^{i\cdot\pi}=-1$.

1.3.14. EKSPONENCIJALNI OBLIK ZAPISA KOMPLEKSNOGA BROJA

- Pretpostavimo da je $z = r \cdot \text{cis}\ \varphi$, gdje su r i φ redom modul i glavni argument broja z.
- Primjenom Eulerove formule lako slijedi:

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{i \cdot \varphi}.$$

- Gornji oblik nazivamo *eksponencijalni oblik zapisa kompleksnoga broja*.
- Dakle, da bismo kompleksan broj mogli zapisati u eksponencijalnom obliku, *moramo* znati njegov modul i njegov glavni argument.
- Analogna tvrdnja vrijedi i za trigonometrijski oblik.

1. Zapišite sljedeće kompleksne brojeve u svim trima oblicima:

a) $z_1 = \dfrac{(1+i)^{2024}}{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\right)^{2022}};$

b) $z_2 = 8\cdot\overline{\left(\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\cdot e^{i\cdot\frac{7}{12}\cdot\pi}\right)^{18}}{\left(-\sqrt{3}\cdot i-1\right)^{9}}\right)} - \sqrt{3}.$

Rješenje:

a) U rješenju zadatka koristimo sliku 1.

$$z_3 = 1+i,$$
$$Z_3 = (1,1),$$
$$|z_3| = \sqrt{1^2+1^2} =$$
$$= \sqrt{1+1} =$$
$$= \sqrt{2},$$
$$\operatorname{Arg}(z_3) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) =$$
$$= \operatorname{arctg}(1) =$$
$$= \frac{\pi}{4},$$
$$z_3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}},$$
$$z_1 = \frac{(1+i)^{2024}}{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\right)^{2022}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\right)^{2024}}{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\right)^{2022}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2024}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2022}}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot\left(\frac{2024}{4}-\frac{2022}{12}\right)} =$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot e^{i\cdot\pi\cdot\frac{675}{2}}=$$

$$=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{675}{2}\cdot\pi\right)=$$

$$=2\cdot\left(\cos\left(\frac{675}{2}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{675}{2}\cdot\pi\right)\right)=$$

$$=2\cdot(0+i\cdot(-1))=$$

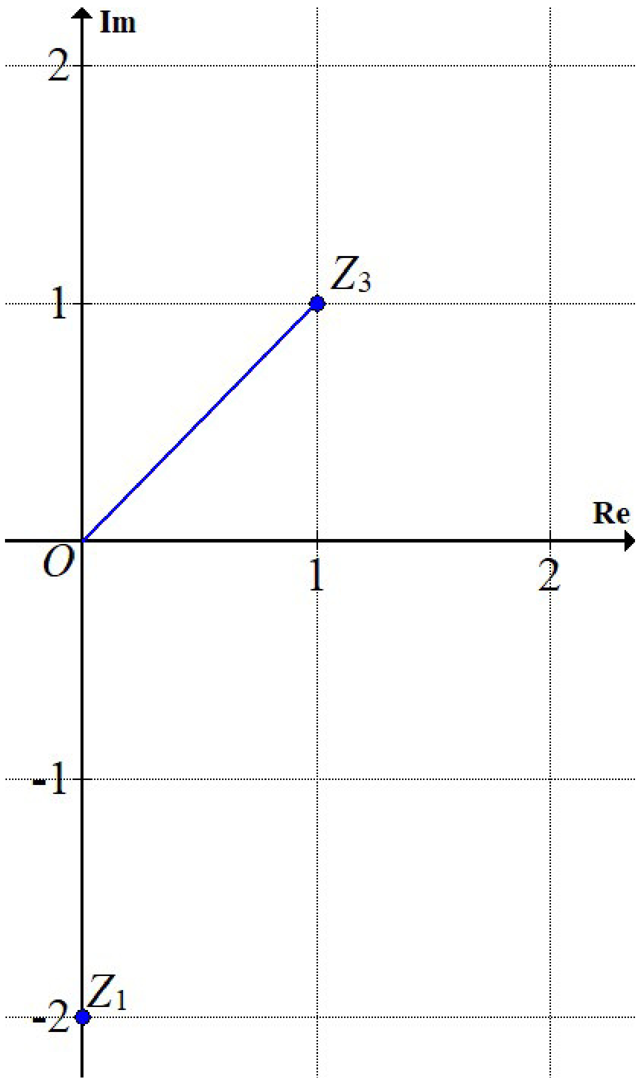
$$=-2\cdot i.$$

$$Z_1=(0,-2),$$

$$|z_1|=2,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1)=\frac{3}{2}\cdot\pi,$$

$$z_1=-2\cdot i=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)=2\cdot e^{i\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi}.$$



Slika 1.

b) U rješenju zadatka koristimo sliku 2.

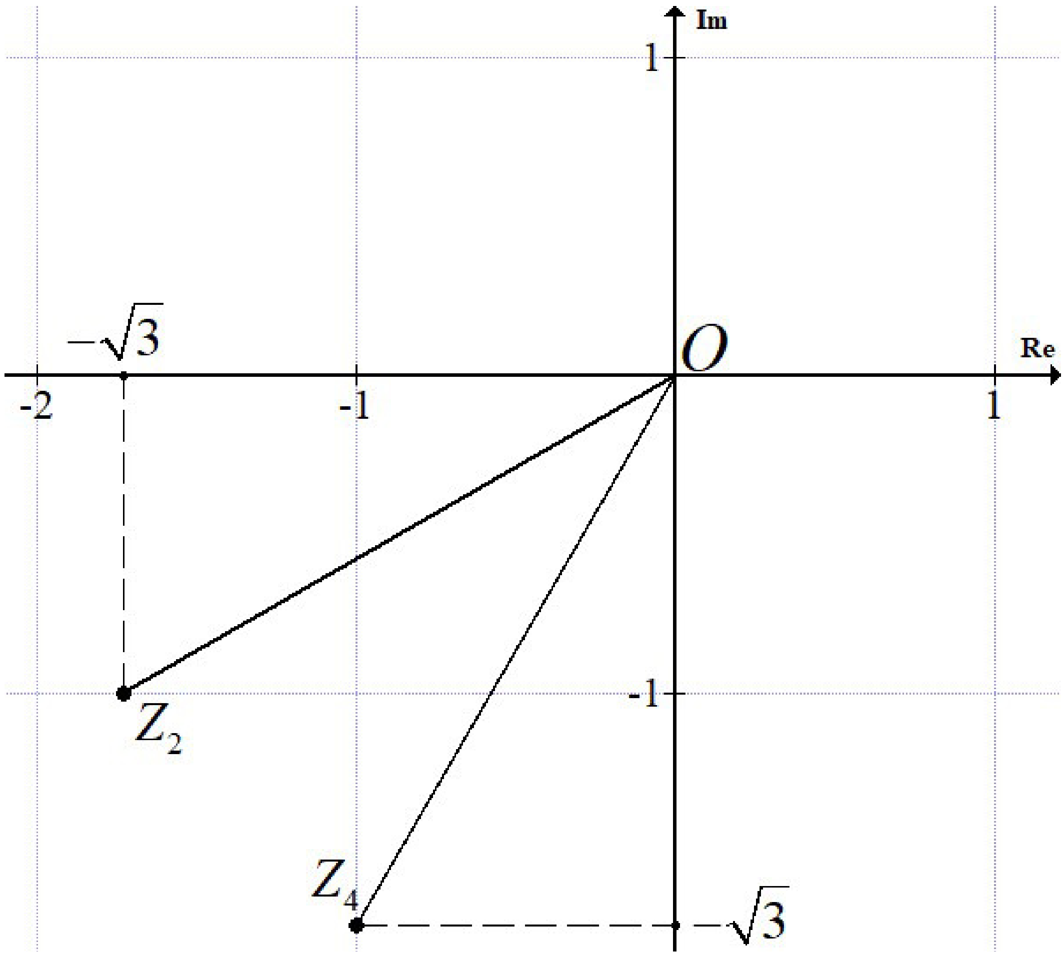
$$
\begin{aligned}
z_4 &= -\sqrt{3}\cdot i - 1 = \\
&= -1 - \sqrt{3}\cdot i, \\
Z_4 &= \left(-1, -\sqrt{3}\right), \\
|z_4| &= \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+3} = \\
&= \sqrt{4} = \\
&= 2, \\
\operatorname{Arg}(z_4) &= \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \\
&= \pi + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \\
&= \pi + \frac{\pi}{3} = \\
&= \frac{4}{3}\cdot\pi, \\
z_4 &= 2\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi}, \\
z_2 &= 8\cdot\overline{\left(\frac{\left(\sqrt[3]{2}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{7}{12}\cdot\pi}\right)^{18}}{\left(2\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi}\right)^{9}}\right)} - \sqrt{3} = \\
&= 8\cdot\overline{\left(\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{18}}{2^9}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\pi\cdot\left(\frac{7}{12}\cdot 18 - \frac{4}{3}\cdot 9\right)}\right)} - \sqrt{3} = \\
&= 8\cdot\overline{\left(\frac{2^6}{2^9}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\pi\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}\right)} - \sqrt{3} = \\
&= 8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)} - \sqrt{3} = \\
&= 8\cdot 2^{-3}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\left(2\cdot\pi - \frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{3} = \\
&= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi} - \sqrt{3} = \\
&= \operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) - \sqrt{3} \overset{\text{a)}}{=} \\
&= \cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) - \sqrt{3} = \\
&= -i - \sqrt{3} = \\
&= -\sqrt{3} - i.
\end{aligned}
$$

$$Z_2 = \left(-\sqrt{3}, -1\right),$$

$$\begin{aligned}|z_2| &= \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \\ &= \sqrt{3+1} = \\ &= \sqrt{4} = \\ &= 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(z_2) &= \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \pi + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{7}{6}\cdot\pi,\end{aligned}$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\right) = 2\cdot e^{i\cdot\frac{7}{6}\cdot\pi}.$$



Slika 2.

2. (pismeni ispit 30. 8. 2021.) Za kompleksne brojeve $z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$ i $z_2 = 2\cdot \operatorname{cis}\varphi_2$, pri čemu su $r_1 \ge 0$, $\varphi_2 \in [0, 2\cdot\pi\rangle$, vrijedi jednakost $z_1 = -\overline{z_2}$. Odredite $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$.

Rješenje: Iz jednakosti $z_1 = -\overline{z_2}$ slijedi:

$$\begin{aligned}
r_1 &= |z_1| = \\
&= \left|-\overline{z_2}\right| = \\
&= \left|(-1)\cdot\overline{z_2}\right| = \\
&= |(-1)|\cdot\left|\overline{z_2}\right| = \\
&= 1\cdot|z_2| = \\
&= |z_2| = \\
&= 2, \\
\overline{z_1} &= \overline{-\overline{z_2}} = \\
&= \overline{(-1)\cdot\overline{z_2}} = \\
&= \overline{-1}\cdot\overline{\overline{z_2}} = \\
&= (-1)\cdot z_2, \\
z_2 &= -\overline{z_1}, \\
\varphi_2 &= \operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Arg}\left(-\overline{z_1}\right) = \\
&= \pi + \operatorname{Arg}\left(\overline{z_1}\right) = \\
&= \pi + (-\operatorname{Arg}(z_1)) = \\
&= \pi - \operatorname{Arg}(z_1) = \\
&= \pi - \frac{\pi}{3} = \\
&= \frac{2}{3}\cdot\pi.
\end{aligned}$$

Dakle,

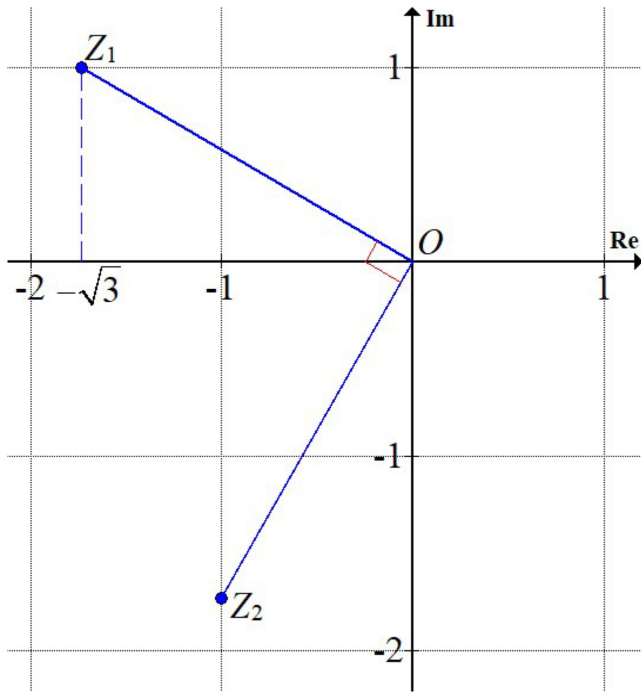
$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} = \\
&= 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) = \\
&= 1 + \sqrt{3}\cdot i,
\end{aligned}$$

$$z_2 = -\overline{z_1} = \\ = -1 + \sqrt{3} \cdot i,$$

pa dalje slijedi:

$$z_1 + z_2 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i,$$
$$z_1 - z_2 = 2,$$
$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2} = \sqrt{3} \cdot i,$$
$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right) = \operatorname{Arg}\left(\sqrt{3} \cdot i\right) = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

3. Točke Z_1 i Z_2 prikazane u Gaussovoj ravnini na slici 3. pridružene su redom kompleksnim brojevima z_1 i z_2. Odredite $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)$.



Slika 3.

Rješenje: Odredimo najprije algebarski oblik obaju brojeva. Imamo redom:

$$Z_1 = \left(-\sqrt{3}, 1\right),$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} =$$
$$= \sqrt{3+1} =$$
$$= \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi_1 = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \pi - \frac{\pi}{6} =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \pi,$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6} \cdot \pi =$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \pi,$$

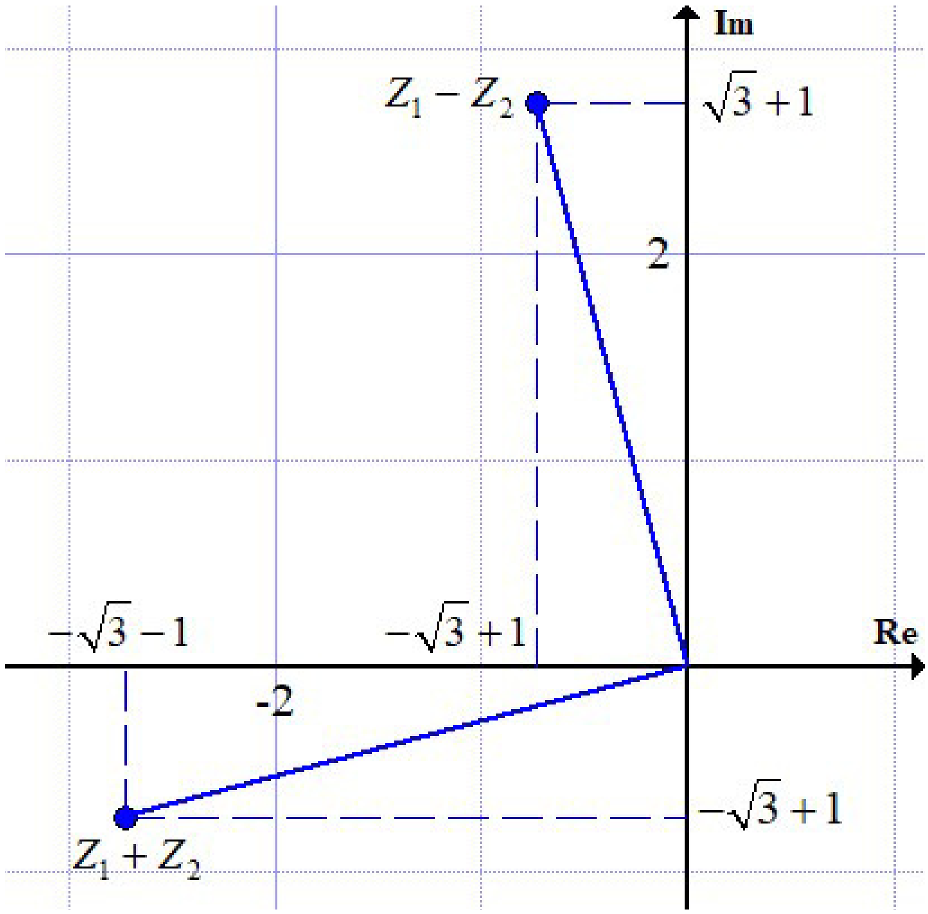
$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(z_2) &= -\operatorname{tg}(\varphi_2 - \pi) = \\
&= -\operatorname{tg}\left(\frac{4}{3}\cdot\pi - \pi\right) = \\
&= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\
&= -\sqrt{3}, \\
z_1 &= -\sqrt{3} + i, \\
z_2 &= -1 - \sqrt{3}\cdot i.
\end{aligned}$$

Potom izračunamo koristeći sliku 4.:

$$\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= \left(-\sqrt{3} + i\right) - \left(-1 - \sqrt{3}\cdot i\right) = \\
&= \left(-\sqrt{3} + 1\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right)\cdot i, \\
\operatorname{Arg}(z_1 - z_2) &= \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \\
&= \pi - \frac{5}{12}\cdot\pi = \\
&= \frac{7}{12}\cdot\pi, \\
z_1 + z_2 &= \left(-\sqrt{3} + i\right) + \left(-1 - i\cdot\sqrt{3}\right) = \\
&= \left(-\sqrt{3} - 1\right) + \left(-\sqrt{3} + 1\right)\cdot i, \\
\operatorname{Arg}(z_1 + z_2) &= \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = \\
&= \pi + \frac{\pi}{12} = \\
&= \frac{13}{12}\cdot\pi.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

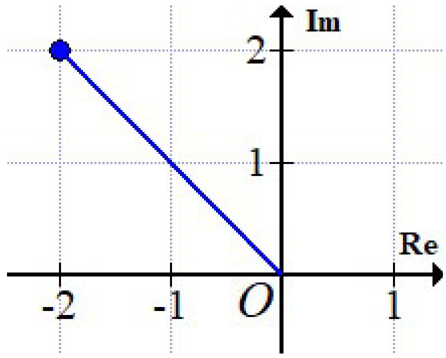
$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right) &= \operatorname{Arg}(z_1 - z_2) - \operatorname{Arg}(z_1 + z_2) = \\
&= \frac{7}{12}\cdot\pi - \frac{13}{12}\cdot\pi = \\
&= \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{3}{2}\cdot\pi \text{ rad.}
\end{aligned}$$



Slika 4.

4. Odredite algebarski i trigonometrijski oblik zapisa onoga rješenja jednadžbe $z^3 = 2 \cdot (i-1)$ kojemu odgovarajuća točka pripada prvom kvadrantu Gaussove ravnine. Potom izračunajte umnožak svih preostalih rješenja te jednadžbe.

Rješenje: Broj $w = 2 \cdot (i-1) = -2 + 2 \cdot i$ najprije treba zapisati u trigonometrijskom obliku. Točka pridružena broju w je $W = (-2, 2)$ (vidjeti sliku 5.).



Slika 5.

Tako sada redom imamo:

$$|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} =$$
$$= \sqrt{4+4} =$$
$$= \sqrt{8},$$
$$\operatorname{Arg}(w) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) =$$
$$= \pi - \operatorname{arctg}(1) =$$
$$= \pi - \frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \pi,$$
$$w = \sqrt{8} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4} \cdot \pi\right),$$
$$n = 3,$$
$$z_k = \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) =$$
$$= \sqrt{8^{\frac{1}{3}}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3 \cdot \pi + 8 \cdot k \cdot \pi}{4}}{3}\right) =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{(8 \cdot k + 3) \cdot \pi}{12}\right), \ k = 0, 1, 2.$$

$k = 0:$

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{(8 \cdot 0 + 3) \cdot \pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

z_0 pripada I. kvadrantu Gaussove ravnine $\Rightarrow$

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 1 + i;$$

$k = 1:$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{(8 \cdot 1 + 3) \cdot \pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{11 \cdot \pi}{12}\right);$$

$k = 2:$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{(8 \cdot 2 + 3) \cdot \pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{19 \cdot \pi}{12}\right);$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis}\frac{11 \cdot \pi}{12}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \text{cis}\frac{19 \cdot \pi}{12}\right) =$$

$$= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5 \cdot \pi}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot i.$$

5. a) Odredite ukupan broj svih rješenja jednadžbe $z^{12} = -i$ koja imaju glavni argument u intervalu $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\cdot\pi\right)$.

b) Među svim rješenjima iz a) podzadatka odredite rješenje koje ima najmanji, odnosno najveći glavni argument. Izračunajte umnožak tih dvaju rješenja i zapišite ga u algebarskom obliku s točnošću od 10^{-5}.

Rješenje: Broju $w = -i$ je pridružena točka $W = (0, -1)$. Ucrtamo li tu točku u Gaussovu ravninu, lako „očitamo“:

$$|w| = 1,\ \mathrm{Arg}(w) = \frac{3}{2}\cdot\pi.$$

Tako redom imamo:

$$z = 1\cdot\mathrm{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) =$$
$$= \mathrm{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right),$$
$$n = 12,$$
$$z_k = \mathrm{cis}\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\pi + k\cdot 2\cdot\pi}{12}\right) =$$
$$= \mathrm{cis}\left(\frac{\frac{3\cdot\pi + 4\cdot k\cdot\pi}{2}}{12}\right) =$$
$$= \mathrm{cis}\left(\frac{(4\cdot k+3)\cdot\pi}{24}\right),\ k = 0,\ 1,\ ...,\ 11.$$
$$\frac{\pi}{6} \le \frac{4\cdot k+3}{24}\cdot\pi < \frac{5}{4}\cdot\pi,$$
$$4 \le 4\cdot k + 3 < 30,$$
$$\frac{1}{4} \le k < \frac{27}{4} \Rightarrow$$
$$k \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Rješenje s najmanjim glavnim argumentom dobije se za $k = 1$.

Rješenje s najvećim glavnim argumentom dobije se za $k = 6$.

$$z_1 = \text{cis}\left(\frac{(4\cdot 1+3)\cdot\pi}{24}\right) =$$
$$= \text{cis}\left(\frac{7}{24}\cdot\pi\right),$$
$$z_6 = \text{cis}\left(\frac{(4\cdot 6+3)\cdot\pi}{24}\right) =$$
$$= \text{cis}\left(\frac{9}{8}\cdot\pi\right),$$
$$z_1\cdot z_6 = \text{cis}\left(\frac{7}{24}\cdot\pi+\frac{9}{8}\cdot\pi\right) =$$
$$= \text{cis}\left(\frac{17}{12}\cdot\pi\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{17}{12}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{17}{12}\cdot\pi\right) =$$
$$= -0.25882-0.96593\cdot i.$$

6. Neka su $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ i $w \in \mathbb{C}$ proizvoljni, ali fiksirani. Pokažite da su sva rješenja jednadžbe $z^n = w$ vrhovi pravilnoga n-terokuta upisanoga u središnju kružnicu polumjera $\sqrt[n]{|w|}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje 1. Neka je $\varphi := \operatorname{Arg}(w)$. Prema de Moivrèovoj formuli za korjenovanje, sva rješenja zadane jednadžbe su:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right), \text{ za } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Za proizvoljan, ali fiksiran $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ kompleksnom broju

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right)$$

pridružena je točka

$$Z_k = \left(\sqrt[n]{|w|} \cdot \cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right), \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right)\right).$$

Jednadžba središnje kružnice čiji je polumjer $\sqrt[n]{|w|}$ glasi:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^2.$$

Provjerimo da koordinate točke Z_k zadovoljavaju tu jednadžbu. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[n]{|w|} \cdot \cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right)\right)^2 + \left(\sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right)\right)^2 = \\
&= \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) + \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) = \\
&= \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^2 \cdot \left(\underbrace{\cos^2\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right)}_{=1}\right) = \\
&= \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^2 \cdot 1 = \\
&= \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dakle, točka Z_k pripada središnjoj kružnici čiji je polumjer $\sqrt[n]{|w|}$.

Preostaje dokazati da je udaljenost *bilo kojih dviju uzastopnih točaka* pridruženima rješenjima zadane jednadžbe konstantna, tj. da *ne ovisi o varijabli k*.

(**Oprez**: **Pogrešno** je pokušati dokazati da je udaljenost *bilo kojih dviju* točaka pridruženima rješenjima zadane jednadžbe konstantna jer je ta tvrdnja istinita samo za $n=3$, tj. u slučaju jednakostraničnoga trokuta. Već u slučaju $n=4$, tj. kad je riječ o kvadratu, znamo da je udaljenost dviju nasuprotnih točaka kvadrata jednaka duljini dijagonale kvadrata, a ne duljini stranice kvadrata. Potpuno analogna tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.)

Znamo da za sve $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ i njima pridružene točke W_1, W_2 Gaussove ravnine vrijedi jednakost:

$$d(W_1, W_2) = |w_1 - w_2|,$$

gdje je d standardna euklidska metrika (tj. standardna udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini). Zbog toga je dovoljno dokazati jednakost:

$$|z_0 - z_{n-1}| = |z_{k+1} - z_k| = \text{const.}, \ \forall k = 0,1,\ldots,n-2.$$

Korištenjem formula za pretvorbu razlike kosinusa, odnosno razlike sinusa, u odgovarajući umnožak osnovnih trigonometrijskih funkcija

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha - \cos\beta &= -2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

(ne)parnost funkcija sinus i kosinus

$$\left.\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x, \end{aligned}\right\} \forall x \in \mathbb{R},$$

nejednakost

$$\sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot\pi\right) \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

koja izravno slijedi iz očitih nejednakosti

$$0 \le \frac{n-1}{n} \cdot \pi < \pi, \ \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\sin x \ge 0, \ \forall x \in [0, \pi],$$

te jedno od osnovnih svojstava funkcije modula kompleksnoga (a time i realnoga) broja:

$$|w_1 \cdot w_2| = |w_1| \cdot |w_2|, \ \forall w_1, w_2 \in \mathbb{C},$$

najprije imamo:

$$|z_0 - z_{n-1}| = \left| \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) - \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right)\right)\right| =$$
$$= \left| \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \left(\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) - \sin\left(\frac{\varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right)\right)\right)\right| =$$
$$= \left| \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(-2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) \cdot \sin\left(\frac{-2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + i \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) \cdot \sin\left(\frac{-2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right)\right)\right| =$$
$$= \left| \sqrt[n]{|w|} \cdot 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right) - i \cdot \cos\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right)\right)\right| =$$
$$= \left| \sqrt[n]{|w|} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right) - i \cdot \cos\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right)\right)\right| =$$
$$= 2 \cdot \left|\sqrt[n]{|w|}\right| \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right) \cdot \left| \left(\sin\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right) - i \cdot \cos\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right)\right)\right| =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right) \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi + (n-1) \cdot \pi}{n}\right)} =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right) \cdot \sqrt{1} =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{n}\right) =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{n} + \pi\right) =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\sin\left(\frac{-\pi}{n}\right) \cdot \cos \pi + \cos\left(\frac{-\pi}{n}\right) \cdot \sin \pi \right) =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \left((-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot (-1) + \cos\left(\frac{-\pi}{n}\right) \cdot 0 \right) =$$
$$= 2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Potom za proizvoljan, ali fiksiran $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ odredimo:

$$\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)=$$

$$=-2\cdot\sin\left(\frac{\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}+\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}-\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}}{2}\right)=$$

$$=-2\cdot\sin\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)=$$

$$=2\cdot\cos\left(\frac{\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}+\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}-\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\cos\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

pa konačno imamo:

$$|z_{k+1}-z_k|=\left|\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}\right)\right)-\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)+i\cdot\left(\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(-2\cdot\sin\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sqrt[n]{|w|}\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)+i\cdot\cos\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)\right)\right|=$$

$$=2\cdot\left|\sqrt[n]{|w|}\right|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\left|\left(-\sin\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)+i\cdot\cos\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)\right)\right|=$$

$$=2\cdot\sqrt[n]{|w|}\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\cdot\pi}{n}\right)\cdot\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\frac{\varphi+(2\cdot k+1)\cdot\pi}{n}\right)}=$$

$$=2\cdot\sqrt[n]{|w|}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sqrt{1}=$$

$$=2\cdot\sqrt[n]{|w|}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Dakle, dokazali smo:

$$|z_0-z_{n-1}|=|z_{k+1}-z_k|=2\cdot\sqrt[n]{|w|}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),\ \forall k=0,1,\ldots,n-2.$$

Za proizvoljne, ali fiksirane $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ i $w \in \mathbb{C}$ vrijednost izraza $2 \cdot \sqrt[n]{|w|} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ je konstantan strogo pozitivan realan broj. To smo i željeli dokazati.

Primjedba: Gornji dokaz predstavlja alternativni (i bitno složeniji u odnosu na standardan trigonometrijski) dokaz da je *duljina stranice* pravilnoga *n*-terokuta upisanoga u kružnicu polumjera *R* jednaka

$$a = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Rješenje 2. Neka je $\varphi := \text{Arg}(w)$. Prema de Moivrèovoj formuli za korjenovanje, sva rješenja zadane jednadžbe su:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right), \text{ za } k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Iz definicije trigonometrijskoga oblika kompleksnoga broja zaključujemo da sva ta rješenja imaju isti modul i da je taj modul jednak $\sqrt[n]{|w|}$.

Iz (geometrijske) interpretacije modula kompleksnoga broja zaključujemo da je modul svakoga kompleksnoga broja jednak duljini spojnice točke pridružene tom kompleksnom broju i ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini. Dakle, ako *bilo kojemu* rješenju gornje jednadžbe pridružimo točku u Gaussovoj ravnini, pa tu točku spojimo s ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u istoj ravnini, duljina te spojnice bit će jednaka $\sqrt[n]{|w|}$. To znači da je točka pridružena *bilo kojemu* rješenju gornje jednadžbe udaljena od ishodišta za $\sqrt[n]{|w|}$. Prema definiciji kružnice, ta točka pripada kružnici čije je središte u ishodištu, a polumjer $\sqrt[n]{|w|}$. Ta je kružnica upravo središnja kružnica čiji je polumjer $\sqrt[n]{|w|}$.

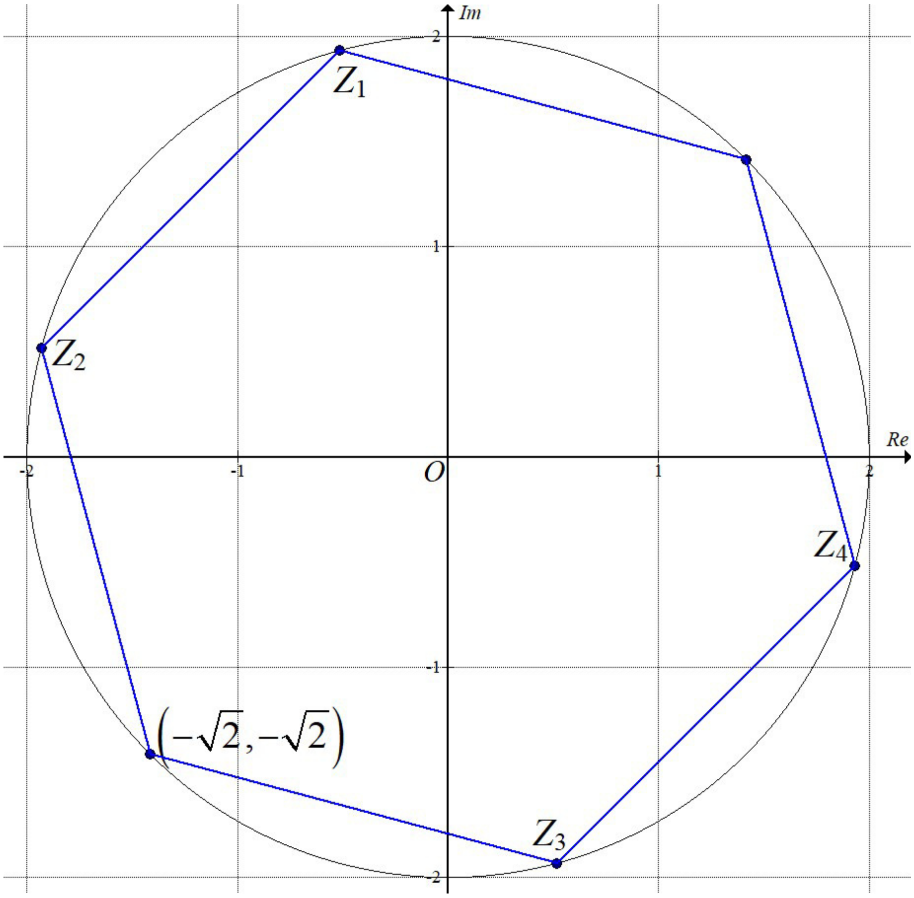
Preostaje dokazati da točke pridružene gore navedenim rješenjima jednadžbe tvore vrhove pravilnoga *n*-terokuta. Središte toga *n*-terokuta je u ishodištu, pa je dovoljno dokazati da svake dvije susjedne spojnice zatvaraju kut mjere $\frac{2 \cdot \pi}{n}$ radijana (koliko iznosi mjera središnjega kuta svakoga pravilnoga *n*-terokuta). Uočimo da je, za svaki $k = 0,1,\ldots,n-2$, mjera (u radijanima) kuta kojega zatvaraju spojnice ishodišta i točaka pridruženih brojevima z_k i z_{k+1} jednaka razlici glavnih argumenata brojeva z_{k+1} i z_k. Odredimo tu razliku:

$$\operatorname{Arg}\left(z_{k+1}\right)-\operatorname{Arg}(z_k)=\frac{\varphi+2\cdot(k+1)\cdot\pi}{n}-\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}=$$
$$=\frac{2\cdot\pi}{n}.$$

Preostaje još odrediti mjeru (u radijanima) kuta kojega zatvaraju spojnice točaka pridruženih brojevima z_{n-1} i z_0. Ta je mjera jednaka:

$$\left(2\cdot\pi-\operatorname{Arg}\left(z_{n-1}\right)\right)+\operatorname{Arg}\left(z_0\right)=$$
$$=2\cdot\pi-\frac{\varphi+2\cdot(n-1)\cdot\pi}{n}+\frac{\varphi}{n}=$$
$$=\frac{2\cdot n\cdot\pi-\varphi-2\cdot(n-1)\cdot\pi+\varphi}{n}=$$
$$=\frac{2\cdot\pi}{n}.$$

7. Izračunajte $|z_1 + z_4| - |z_2 - z_3|$ za brojeve $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ čije su pridružene točke u Gaussovoj ravnini zadane na slici 6. (Broju z_i pridružena je točka Z_i, $\forall i = 1, 2, 3, 4.$) Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.



Slika 6.

Rješenje: Primijetimo da su točke $Z_1, \ldots, Z_4$ i točka $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ vrhovi pravilnoga šesterokuta upisanoga u središnju kružnicu polumjera 2. (Preostali šesti vrh toga šesterokuta je neoznačena točka.) Prema de Moivrèovoj formuli za korjenovanje, postoji jedinstven $w \in \mathbb{C}$ takav da su $Z_1, \ldots, Z_4$ i točka $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ pridruženi šestim korijenima iz broja w.

Točka $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ je pridružena kompleksnom broju

$$z_5 = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i =$$
$$= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right),$$

pa slijedi:

$$\begin{aligned} w = z_5^6 &= \\ &= 2^6 \cdot \text{cis}\left(6 \cdot \frac{5}{4} \cdot \pi\right) = \\ &= 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{15}{2} \cdot \pi\right) = \\ &= 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi + 3 \cdot 2 \cdot \pi\right) = \\ &= 2^6 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right). \end{aligned}$$

Korištenjem de Moivrèove formule za korjenovanje odredimo kompleksne brojeve pridružene točkama $Z_1, ..., Z_4$. Zapisat ćemo ih u algebarskom obliku:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 2 \cdot \pi}{6}\right) = \\ &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{7}{12} \cdot \pi\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right) \cdot i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 4 \cdot \pi}{6}\right) = \\ &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{11}{12} \cdot \pi\right) = \\ &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \cdot i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 8 \cdot \pi}{6}\right) = \\ &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{19}{12} \cdot \pi\right) = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) \cdot i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= 2\cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\pi + 10\cdot\pi}{6}\right) = \\ &= 2\cdot \operatorname{cis}\left(\frac{23}{12}\cdot\pi\right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)\cdot i. \end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_4| - |z_2 - z_3| &= \left|\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right| - \left|-\sqrt{6}+\sqrt{6}\cdot i\right| = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2+2} - \sqrt{6+6} = \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{12} = \\ &= 2 - \sqrt{4\cdot 3} = \\ &= 2 - 2\cdot\sqrt{3}. \end{aligned}$$