1.4.

METODA DJELOMIČNE (PARCIJALNE) INTEGRACIJE

1.4.1. DJELOMIČNA (PARCIJALNA) INTEGRACIJA

- I ovom metodom želimo polazni integral svesti na što jednostavniji integral.
- Osnova ove metode je formula za derivaciju umnoška dviju funkcija:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- iz koje integriranjem dobijemo:

$$\int (u \cdot v)' = \int u' \cdot v + \int u \cdot v' \Rightarrow$$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

1.4.2. ALGORITAM DJELOMIČNE INTEGRACIJE

- Pretpostavka: Podintegralna funkcija f je umnožak funkcije u i *diferencijala* funkcije v:
- $f = u \cdot \mathrm{d}v$.
- Korak 1. Integriranjem odredimo *standardnu antiderivaciju funkcije* (*diferencijala*) $\mathrm{d}v$.
- Korak 2. Odredimo diferencijal $\mathrm{d}u$ funkcije u.
- Korak 3. Polazni neodređeni integral je jednak:

$$\int f = \int u \cdot \mathrm{d}v = u \cdot v - \int v \cdot \mathrm{d}u$$

1.4.3. NAPOMENE

- 1. Ako je odabir funkcije u pogodan („dobar”), integral
- $\int v \cdot \mathrm{d}u$ mora biti jednostavniji za određivanje od polaznoga integrala.
- Ako to nije slučaj, odabir funkcije u je pogrešan pa tada moramo ili „zamijeniti funkcije” (tj. za u odabrati drugi faktor koji tvori podintegralnu funkciju) ili odabrati neku drugu metodu određivanja traženoga integrala.
- 2. Metodom djelomične integracije često se (ali ne i u pravilu!) određuju integrali u kojima je podintegralna funkcija umnožak *transcendentne* funkcije (npr. e^x, ln, arcsin, arctg i sl.) i algebarske funkcije (polinoma ili racionalne funkcije).
- 3. Za funkciju u obično se izabiru logaritamska funkcija, ciklometrijske funkcije itd.

1.4.4. CAUCHYJEV PROBLEM

- U modeliranju tehničkih procesa često se susreću tzv. *Cauchyjevi* [košijevi] *problemi.*
- Općenito, to su problemi određivanja (konkretne) realne funkcije f iz sustava:
- $$\begin{cases} g\left(f^{(n)}, f^{(n-1)}, \ldots, f'', f', f\right) = h, \\ f(a_1) = b_1, \\ f(a_2) = b_2, \\ . \\ . \\ . \\ f(a_n) = b_n. \end{cases}$$

1.4.4. CAUCHYJEV PROBLEM

- Pritom su g i h „konkretne" realne funkcije, a a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n „konkretni" realni brojevi.
- Uz određene pretpostavke na funkciju f i početne uvjete (u što ovdje nećemo ulaziti), pokazuje se da navedeni problem ima *jedinstveno* rješenje.
- Kao jednu od primjena integrala riješit ćemo najjednostavniji takav problem.
- Problem: Odrediti realnu funkciju F iz jednakosti:
- $$\begin{cases} F' = f, \\ F(a) = b \end{cases}$$
- pri čemu su zadani funkcija f, te a, $b \in \mathbb{R}$.

1.4.4. CAUCHYJEV PROBLEM

- Algoritam:
- Korak 1. Odrediti neodređeni integral

$$I = \int f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

- Korak 2. U dobiveni izraz uvrstiti broj a umjesto x, a broj b umjesto I. Riješiti dobivenu linearnu jednadžbu po nepoznanici C.
- Korak 3. Uvrstiti izračunatu vrijednost C u izraz dobiven u Koraku 1. Dobivena funkcija je tražena funkcija F.

1. Obrazložite zašto u primjeni metode djelomične integracije smijemo odrediti (samo) standardnu antiderivaciju funkcije v, a ne nužno pripadni cjelokupni neodređeni integral toga izraza.

Rješenje: Pogledajmo što se dogodi kad umjesto standardne antiderivacije funkcije v odredimo pripadni neodređeni integral:

$$\begin{aligned}
\int u\cdot \mathrm{d}v &= \left|\begin{matrix} u_1=u & v_1=\int \mathrm{d}v = v+C \\ \mathrm{d}u_1=\mathrm{d}u & \mathrm{d}v_1=\mathrm{d}v\end{matrix}\right| = \\
&= u\cdot(v+C)-\int (v+C)\cdot \mathrm{d}u = \\
&= u\cdot v + C\cdot u - \left(\int v\cdot \mathrm{d}u + \int C\cdot \mathrm{d}u\right) = \\
&= u\cdot v + C\cdot u - \left(\int v\cdot \mathrm{d}u + C\cdot\int \mathrm{d}u\right) = \\
&= u\cdot v + C\cdot u - \int v\cdot \mathrm{d}u - C\cdot\int \mathrm{d}u = \\
&= u\cdot v + C\cdot u - \int v\cdot \mathrm{d}u - C\cdot(u+C_1) = \\
&= u\cdot v + C\cdot u - \int v\cdot \mathrm{d}u - C\cdot u - C\cdot C_1 = \\
&= u\cdot v - \int v\cdot \mathrm{d}u - C\cdot C_1.
\end{aligned}$$

Nakon što odredimo neodređeni integral $\int v\cdot \mathrm{d}u$, na desnoj će se strani gornje jednakosti pojaviti još jedna realna konstanta (označimo je s C_2). No, tada je $C_2 - C\cdot C_1$ razlika realne konstante i umnoška dviju realnih konstanti, tj. ponovno realna konstanta. Zbog toga tu konstantu smijemo pisati (tek) na samom kraju zadatka, a u „međukoracima“ smijemo koristiti (samo) standardne antiderivacije.

2. Pronađite grešku u ovom „izvodu“ i obrazložite svoj odgovor:

$$\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u=\dfrac{1}{x} & v=\int \mathrm{d}x = x \\ \mathrm{d}u=\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{x}\cdot x-\int x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=1+\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x-\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x=1,$$

$$0=1.$$

Rješenje: Gornji „izvod“ bi bio točan kad bi $\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x$ označavao (samo) standardnu antiderivaciju funkcije $\frac{1}{x}$ (tj. jedinstvenu funkciju). Međutim, $\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x$ označava (neprebrojiv!) *skup* funkcija, a ne jednu funkciju. To zapravo znači da u gornjoj jednakosti imamo operaciju zbrajanja skupa funkcija i funkcije (vidjeti napomenu 1.1.4. u točki 1.1.).

Označimo li s F standardnu antiderivaciju funkcije $\frac{1}{x}$, onda su:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\{F(x)+C : C\in\mathbb{R}\},$$

$$1+\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int f(x)\cdot \mathrm{d}x+1=\{F(x)+C+1 : C\in\mathbb{R}\}.$$

U gornjem „dokazu“ mi zapravo tvrdimo da su ta dva skupa jednaka. To će biti ispunjeno ako i samo ako izraz $C+1$ može biti bilo koji realan broj (jer u definiciji prvoga skupa C može biti bilo koji realan broj). Lako se vidi da za svaki $C_1\in\mathbb{R}$ jednadžba $C+1=C_1$ ima jedinstveno realno rješenje $C=C_1-1$. To znači da $C+1$ može poprimiti bilo koju realnu vrijednost, pa su gornja dva skupa jednaka. (Ova tvrdnja je izravna posljedica bijektivnosti funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1.$)

Zadnji redak „dokaza“ je praktički besmislen jer

$$\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x-\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x$$

zapravo znači da algebarsku operaciju oduzimanja realnih brojeva želimo primijeniti na skupove, što je nemoguće.

Napomena: U skupovnom je smislu *razlika skupova* A i B definirana s:

$$A - B := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Ovaj pojam *nema nikakve veze* s *razlikom funkcija* definiranom s:

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x),\ \forall x \in D(f) = D(g).$$

3. Metodom djelomične integracije odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int x \cdot e^x \cdot dx$;

Rješenje: Iako je u ovom slučaju vrlo jednostavno derivirati i integrirati obje funkcije x i e^x, samo jedna „kombinacija“ dovodi do ispravnoga rješenja. Integriranjem polinoma 1. stupnja (u ovom slučaju polinoma $p(x) = x$) *uvijek* dobijemo polinom 2. stupnja. Množenjem toga polinoma funkcijom $g(x) = e^x$ i integriranjem dobivena umnoška dobiva se integral kompliciraniji od polaznoga. Zbog toga redom imamo:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{matrix} u = x & v = \int e^x \cdot dx = e^x \\ du = dx & dv = e^x \cdot dx \end{matrix} \right| = \\ &= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = \\ &= x \cdot e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

b) $\int y^2 \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}y$;

Rješenje: U ovom će podzadatku biti potrebno dvaput primijeniti metodu djelomične integracije. Iako je (ponovno) vrlo jednostavno derivirati i integrirati funkcije y^2 i $\cos y$, (ponovno) treba pripaziti da – nakon provedbe metode djelomične integracije – *ne* dobijemo integral kompliciraniji od polaznoga. To će se dogoditi ako deriviramo $\cos y$ i integriramo y^2 jer ćemo u tom slučaju dobiti integral umnoška $y^3 \cdot \sin y$ koji je kompliciraniji od polaznoga. Zbog toga redom imamo:

$$
\begin{aligned}
I &= \int y^2 \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}y = \\
&= \begin{vmatrix} u = y^2 & v = \int \cos y \cdot \mathrm{d}y = \sin y \\ \mathrm{d}u = 2 \cdot y \cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v = \cos y \cdot \mathrm{d}y \end{vmatrix} = \\
&= y^2 \cdot \sin y - \int 2 \cdot y \cdot \sin y \cdot \mathrm{d}y = \\
&= \begin{vmatrix} u = 2 \cdot y & v = \int \sin y \cdot \mathrm{d}y = -\cos y \\ \mathrm{d}u = 2 \cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v = \sin y \cdot \mathrm{d}y \end{vmatrix} = \\
&= y^2 \cdot \sin y - \left(2 \cdot y \cdot (-\cos y) - \int (-\cos y) \cdot 2 \cdot \mathrm{d}y\right) = \\
&= y^2 \cdot \sin y + 2 \cdot y \cdot \cos y - 2 \cdot \int \cos y \cdot \mathrm{d}y = \\
&= y^2 \cdot \sin y + 2 \cdot y \cdot \cos y - 2 \cdot \sin y = \\
&= \left(y^2 - 2\right) \cdot \sin y + 2 \cdot y \cdot \cos y + C.
\end{aligned}
$$

c) $\int \operatorname{arcctg} t \cdot \mathrm{d}t$.

Rješenje: U ovom slučaju nemamo izbor. Deriviramo funkciju $\operatorname{arcctg} t$ i integriramo konstantnu funkciju 1. Dobivamo:

$$I = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arcctg} t & v = \int 1 \cdot \mathrm{d}t = t \\ \mathrm{d}u = \left(\dfrac{-1}{t^2+1}\right) \cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = 1 \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= t \cdot \operatorname{arcctg} t - \int t \cdot \left(\frac{-1}{t^2+1}\right) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= t \cdot \operatorname{arcctg} t + \underbrace{\int \frac{t}{t^2+1} \cdot \mathrm{d}t}_{=:I_1}.$$

Integral I_1 najlakše i najbrže je odrediti metodom zamjene. Zamijenimo $x := t^2 + 1$. Diferenciranjem obiju strana te jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \left(t^2+1\right)' \cdot \mathrm{d}t = \\ &= (2 \cdot t + 0) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 2 \cdot t \cdot \mathrm{d}t, \\ t \cdot \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln|x| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\underbrace{t^2+1}_{>0}\right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t^2+1\right). \end{aligned}$$

Prema tome, rješenje zadatka je:

$$I = t \cdot \operatorname{arcctg} t + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t^2+1\right) + C.$$

4. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} F'(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right), \\ F(0) = 0. \end{cases}$

Rješenje: Za razliku od prethodnih zadataka, rješenje ovoga zadatka (ako postoji) je *jedinstveno*, tj. postoji točno jedna funkcija F koja ima oba zadana svojstva. Ta je funkcija općenito *neka* antiderivacija funkcije $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. Kako je odrediti? Jednostavno: najprije ćemo odrediti skup *svih* antiderivacija funkcije f, tj. neodređeni integral te funkcije, a potom naći onaj element toga skupa za kojega vrijedi $F(0) = 0$.

Dakle, najprije odredimo

$$I = \int \sin\left(\sqrt{x}\right) \cdot \mathrm{d}x .$$

Kombiniramo dvije metode: metodu zamjene i metodu djelomične integracije. Najprije zamijenimo

$$t := \sqrt{x}.$$

Diferenciranjem obiju strana te jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2 \cdot t} \cdot \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}x &= 2 \cdot t \cdot \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin t \cdot 2 \cdot t \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \begin{vmatrix} u = 2 \cdot t & v = \int \sin t \cdot \mathrm{d}t = -\cos t \\ \mathrm{d}u = 2 \cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = \sin t \cdot \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \\ &= \left(2 \cdot t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t) \cdot 2 \cdot \mathrm{d}t\right) = \\ &= -2 \cdot t \cdot \cos t + 2 \cdot \int \cos t \cdot \mathrm{d}t = \\ &= -2 \cdot t \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t = \\ &= 2 \cdot \left(\sin\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right)\right) + C. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da tražena funkcija *F* ima oblik:

$$F(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right)\right) + C, \text{ za neki } C \in \mathbb{R}.$$

Preostaje odrediti nepoznatu realnu konstantu *C* iz uvjeta $F(0) = 0$:

$$\begin{aligned} &0 = 2 \cdot \left(\sin\left(\sqrt{0}\right) - \sqrt{0} \cdot \cos\left(\sqrt{0}\right)\right) + C, \\ &0 = 2 \cdot (0 - 0) + C, \\ &C = 0. \end{aligned}$$

Dakle, *jedinstveno* rješenje zadatka je standardna antiderivacija funkcije *f*, tj.

$$F(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right)\right).$$

b) $\begin{cases} F'(y)=\ln^2 y, \\ F(1)=2; \end{cases}$

Rješenje: Osnovna ideja je potpuno analogna onoj iz prethodnoga podzadatka. Odredit ćemo skup svih antiderivacija funkcije $f(y)=\ln^2 y$ (tj. ponovno neodređeni integral te funkcije) pa potom „pronaći“ onaj element toga skupa za kojega vrijedi jednakost $F(1)=2$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} I &= \int \ln^2 y \cdot \mathrm{d}y = \\ &= \left| \begin{matrix} u=\ln^2 y & v=\int \mathrm{d}y = y \\ \mathrm{d}u = 2\cdot \ln y \cdot \dfrac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v=\mathrm{d}y \end{matrix} \right| = \\ &= y\cdot \ln^2 y - \int y\cdot 2\cdot \ln y \cdot \frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y = \\ &= y\cdot \ln^2 y - 2\cdot \int \ln y \cdot \mathrm{d}y = \\ &= y\cdot \ln^2 y - 2\cdot (y\cdot \ln y - y) = \\ &= y\cdot \left(\ln^2 y - 2\cdot \ln y + 2\right) + C. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da tražena funkcija F ima oblik:

$$F(y) = y\cdot\left(\ln^2 y - 2\cdot \ln y + 2\right) + C, \text{ za neki } C\in\mathbb{R}.$$

Preostaje odrediti nepoznatu realnu konstantu C takvu da vrijedi $F(1)=2$. Imamo:

$$\begin{aligned} &2 = 1\cdot\left(\ln^2 1 - 2\cdot \ln 1 + 2\right) + C, \\ &2 = 0 - 2\cdot 0 + 2 + C, \\ &C = 0. \end{aligned}$$

Dakle, i u ovom je slučaju *jedinstveno* rješenje zadatka standardna antiderivacija funkcije *f*, tj.

$$F(y) = y\cdot\left(\ln^2 y - 2\cdot \ln y + 2\right).$$

c) $\begin{cases} F'(w) = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w, \\ F(0) = -1. \end{cases}$

Rješenje: I u ovom slučaju vrlo jednostavno derivirati i integrirati obje funkcije $2 \cdot \mathrm{e}^w$ i $\sin w$. Dok je u prethodnom zadatku samo jedna „kombinacija“ dovodila do ispravnoga rješenja, ovdje možemo proizvoljno birati koju od navedenih funkcija ćemo derivirati, a koju integrirati.

Međutim, ipak postoji „zamka“. Metodu djelomične integracije morat ćemo primijeniti dva puta. U **obje** primjene **moramo napraviti istu operaciju** (deriviranje ili integriranje) **s eksponencijalnom funkcijom** jer ćemo se u suprotnom (tj. ako eksponencijalnu funkciju u prvoj primjeni deriviramo, a u drugoj integriramo) vratiti na početak postupka.

Opredijelimo se za integriranje funkcije $2 \cdot \mathrm{e}^w$ u obje primjene. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
I &= \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w \cdot \mathrm{d}w = \\
&= \left| \begin{matrix} u = \sin w & v = \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{d}w = 2 \cdot \mathrm{e}^w \\ \mathrm{d}u = \cos w \cdot \mathrm{d}w & \mathrm{d}v = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{d}w \end{matrix} \right| = \\
&= 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w - \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \cos w \cdot \mathrm{d}w = \\
&= \left| \begin{matrix} u = \cos w & v = \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{d}w = 2 \cdot \mathrm{e}^w \\ \mathrm{d}u = (-\sin w) \cdot \mathrm{d}w & \mathrm{d}v = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{d}w \end{matrix} \right| = \\
&= 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w - \left(2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \cos w - \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (-\sin w) \cdot \mathrm{d}w \right) = \\
&= 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w - 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \cos w - \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w \cdot \mathrm{d}w = \\
&= 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) - I, \\
2 \cdot I &= 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w), \\
I &= \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) + C, \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Objasnimo pobliže dobivenu jednakost, tj. utvrdimo imamo li ponovno slučaj opisan u rješenju zadatka 2. Ponovno ćemo koristiti napomenu 1.1.4. iz točke 1.1.

Neka je F_1 standardna antiderivacija funkcije $f(w) = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \sin w$. Prema definiciji neodređenoga integrala, mora vrijediti sljedeća jednakost skupova:

$$\begin{aligned}
\{F_1(w) + C : C \in \mathbb{R}\} &= \{2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) - (F_1(w) + C) : C \in \mathbb{R}\}, \\
\{F_1(w) + C : C \in \mathbb{R}\} &= \{2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) - F_1(w) - C : C \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Funkcija $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = -x$ je bijekcija, pa ćemo u obama skupovima „pokupiti" sve realne brojeve kao moguće konstante. No, to znači da će ti skupovi biti jednaki ako i samo ako vrijedi jednakost:

$$F_1(w) = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) - F_1(w).$$

Ovaj izraz je jednakost dviju funkcija, pa izrazimo $F_1(w)$:

$$\begin{aligned}
&F_1(w) + F_1(w) = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w),\\
&2 \cdot F_1(w) = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w),\\
&F_1(w) = \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w).
\end{aligned}$$

Tako smo dobili pravilo standardne antiderivacije funkcije *f*. To znači da je

$$\begin{aligned}
I &= F_1(w) + C =\\
&= \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) + C.
\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da tražena funkcija F ima oblik:

$$F(w) = \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w) + C, \text{ za neki } C \in \mathbb{R}.$$

Nepoznatu realnu konstantu C odredimo iz zadanoga uvjeta $F(0) = -1$:

$$\begin{aligned}
&-1 = \mathrm{e}^0 \cdot (\sin 0 - \cos 0) + C,\\
&-1 = 1 \cdot (0 - 1) + C,\\
&-1 = -1 + C,\\
&C = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je standardna antiderivacija funkcije *f*, tj.

$$F(w) = \mathrm{e}^w \cdot (\sin w - \cos w).$$

Napomena: Da smo se opredijelili za deriviranje funkcije $2 \cdot \mathrm{e}^w$, dobili bismo redom:

$$\begin{aligned}
I &= \begin{vmatrix} u = 2 \cdot \mathrm{e}^w & v = \int \sin w \cdot \mathrm{d}w = -\cos w \\ \mathrm{d}u = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{d}w & \mathrm{d}v = \sin w \cdot \mathrm{d}w \end{vmatrix} =\\
&= 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (-\cos w) - \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot (-\cos w) \cdot \mathrm{d}w =\\
&= (-2) \cdot \mathrm{e}^w \cdot \cos w + \int 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \cos w \cdot \mathrm{d}w =\\
&= \begin{vmatrix} u = 2 \cdot \mathrm{e}^w & v = \int \cos w \cdot \mathrm{d}w = \sin w \\ \mathrm{d}u = 2 \cdot \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{d}w & \mathrm{d}v = \cos w \cdot \mathrm{d}w \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= (-2)\cdot e^{w}\cdot \cos w + \left(2\cdot e^{w}\cdot \sin w - \int 2\cdot e^{w}\cdot \sin w\cdot dw\right) =$$
$$= (-2)\cdot e^{w}\cdot \cos w + 2\cdot e^{w}\cdot \sin w - \int 2\cdot e^{w}\cdot \sin w\cdot dw =$$
$$= 2\cdot e^{w}\cdot (\sin w - \cos w) - I,$$

s istim rezultatom.