

1.5.

INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJA

1.5.1. POJAM RACIONALNE FUNKCIJE

- **Podsjetnik:** *Racionalna funkcija* je svaka realna funkcija oblika $\frac{P}{Q}$, gdje su P i Q polinomi.
- Određivanje neodređenoga integrala ovakvih funkcija podijelit ćemo na nekoliko tipova i zasebno razmatrati svaki pojedini tip.
- Ukoliko ne istaknemo drugačije, pretpostavit ćemo da se radi o *pravoj* racionalnoj funkciji.

1.5.2. TIP 1: $\int \frac{dx}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

◎ **Korak 1.** Ako je $a \neq 1$, brojnik i svaki član nazivnika podijelimo s a . Tako u nazivniku dobivamo izraz oblika $x^2 + p \cdot x + q$, gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ konstante.

◎ **Korak 2.** Nazivnik napišemo u obliku

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

◎ **Korak 3.** Zamjenom $t := x + \frac{p}{2}$ dobivamo tablični integral (po varijabli t).

1.5.3. TIP 2.: $\int \frac{m \cdot x + n}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \cdot dx$

- ◎ Pretpostavka: Nazivnik podintegralne funkcije **nema** realnih nultočka. (Ako ima, primijenimo metodu neodređenih koeficijenata koju ćemo opisati u 1.5.4.)
- ◎ Korak 1. Odredimo konstante $\check{S}, \acute{C} \in \mathbb{R}$ takve da za svaki dopustivi x vrijedi jednakost:
- ◎ $m \cdot x + n = \check{S} \cdot (2 \cdot a \cdot x + b) + \acute{C}$.
- ◎ Korak 2. Polazni integral I zapišemo u obliku
$$I = \check{S} \cdot \int \frac{2 \cdot a \cdot x + b}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \cdot dx + \acute{C} \cdot \int \frac{dx}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$$
- ◎ Korak 3. Prvi pribrojnik jednak je $\check{S} \cdot \ln(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$, a drugi pribrojnik je integral tipa 1.

1.5.4. METODA NEODREĐENIH KOEFIČIJENATA

- © Ako je u nazivniku racionalne funkcije polinom stupnja barem 3, primjenjujemo tzv. *metodu neodređenih koeficijenata*.
- © **Korak 1.** Nazivnik Q rastavimo na faktore, pri čemu je svaki faktor polinom stupnja najviše 2.
- © **Korak 2.** Podintegralnu funkciju rastavimo na *parcijalne razlomke*, pa svaki od njih integriramo zasebno. (Pripadni integrali su ili tablični ili integrali tipova 1, odnosno 2.).
- © **Korak 3.** Polazni integral jednak je zbroju integrala svih dobivenih parcijalnih razlomaka.

1.5.5. OSTALI SLUČAJEVI

☉ Ako je racionalna funkcija *neprava*, onda polinom P treba podijeliti polinomom Q prema pravilu za dijeljenje polinoma s ostatkom, tj. odrediti jedinstvene polinome g i r takve da vrijedi:

☉ $P = g \cdot Q + r$, $\deg r < \deg Q$

☉ Na taj način polazni integral I postaje jednak

$$I = \int g(x) \cdot dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} \cdot dx$$

☉ pa se svodi na određivanje tabličnoga integrala, odnosno integrala nekoga od prethodno navedenih tipova.