

1.6.

**INTEGRIRANJE IRACIONALNIH
FUNKCIJA**

1.6.1. POJAM IRACIONALNE FUNKCIJE

- *Iracionalna* funkcija je svaka funkcija oblika

$$R \left[x, \left(\frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots \right]$$

- pri čemu su R racionalna funkcija, a $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots \in \mathbb{Z}, q_i \neq 0$, konstante.
- Razmotrit ćemo dva tipa određivanja neodređenog integrala ovakve funkcije.

1.6.2. TIP 1.: $\int \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \cdot dx$

- **Korak 1.** Ako je $a > 0$, integral zapišimo u obliku:

$$I = \sqrt{a} \cdot \int \sqrt{x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}} \cdot dx$$

- i prijeđimo na Korak 2. Inače, prijeđimo na Korak 4.
- **Korak 2.** Podintegralni radikand zapišimo u obliku $(x + p)^2 + q$, gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ konstante. Prijeđimo na Korak 3.
- **Korak 3.** Zamjenom $t = x + p$ dobivamo tablični integral.
- **Korak 4.** Ako je $a = 0$, zamjenom $t = b \cdot x + c$ dobivamo tablični integral. Inače, prijeđimo na Korak 5.

1.6.2. TIP 1.: $\int \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \cdot dx$

- **Korak 5.** Ako je $a < 0$, zamijenimo $a_1 := -a$, pa polazni integral I zapišimo u obliku

$$I = \sqrt{a_1} \cdot \int \sqrt{\frac{c}{a_1} + \frac{b}{a_1} \cdot x - x^2} \cdot dx$$

- i prijeđimo na Korak 6.
- **Korak 6.** Podintegralni radikand zapišimo u obliku $q - (p - x)^2$, gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ konstante. Zamjenom $t := p - x$ dobivamo tablični integral.

1.6.3. TIP 2.: $\int \frac{m \cdot x + n}{\sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}} \cdot dx$

- **Korak 1.** Odredimo konstante $\check{S}, \acute{C} \in \mathbb{R}$ takve da za svaki dopustivi x vrijedi jednakost:
- $m \cdot x + n = \check{S} \cdot (2 \cdot a \cdot x + b) + \acute{C}$.
- **Korak 2.** Polazni integral I zapišemo u obliku:

$$I = \check{S} \cdot \int \frac{2 \cdot a \cdot x + b}{\sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}} \cdot dx + \acute{C} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}}$$

- Prvi pribrojnik jednak je $2 \cdot \check{S} \cdot \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$, dok drugi svodimo na tablični integral postupkom opisanim za Tip 1.