1.8.

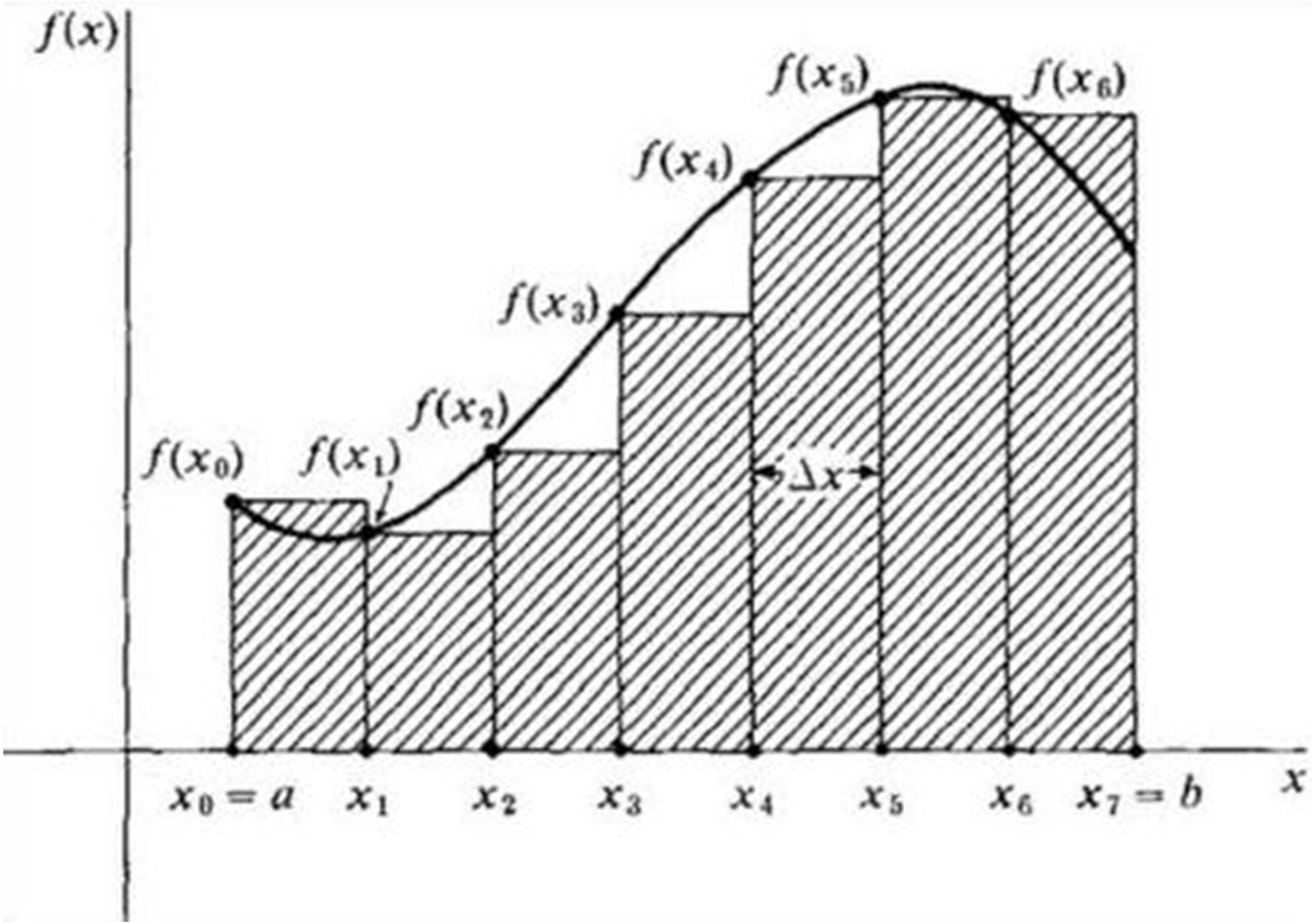
ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

1.8.1. POJAM ODREĐENOGA INTEGRALA

- Pretpostavimo da je f realna funkcija *neprekidna* na segmentu $[a, b]$, te da smo taj segment točkama $x_1, \ldots, x_{n-1}$ podijelili na ukupno n (ne nužno jednakih) dijelova.
- Stavimo li $x_0 = a$ i $x_n = b$, onda zbroj

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

- nazivamo *integralnim zbrojem* ili *integralnom sumom* funkcije f na segmentu $[a, b]$.
- S_n je zapravo zbroj površina pravokutnika kojima je duljina jednaka $x_{i+1} - x_i$, a širina $f(x_i)$.


f(x)
f(x₅)

1.8.1. POJAM ODREĐENOGA INTEGRALA

- Što je broj podjela segmenta $[a, b]$ veći, tj. što su diobene točke bliže jedna drugoj, integralni zbroj postaje sve bolja aproksimacija za *površinu* krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ i $y = 0$.
- Uz uvjet $n \to \infty$, tj. $\max(x_{i+1} - x_i) \to 0$, pripadnu graničnu vrijednost integralnoga zbroja S_n nazivamo *određenim integralom* funkcije f u granicama od $x = a$ do $x = b$. Pišemo:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x := \lim_{\max(x_{i+1} - x_i) \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

1.8.2. NAPOMENA

- Pojam određenoga integrala je ispravno definiran i za slabiju klasu funkcija – funkcije koje su *omeđene na segmentu* i imaju *konačno mnogo točaka prekida* 1. *vrste* (granične vrijednosti slijeva, odnosno zdesna, u svakoj od tih točaka postoje, ali su međusobno različite).
- Koristeći svojstvo aditivnosti integrala, u takvim slučajevima se određeni integral omeđene funkcije na segmentu definira kao *zbroj konačno mnogo određenih integrala* po dijelovima neprekidnih funkcija.
- Tada kažemo da sve spomenute točke prekida 1. vrste „ne kvare" određeni integral, tj. ne utječu na njegovu vrijednost.

1.8.3. NEWTON-LEIBNIZOVA FORMULA

- Da bi se izbjeglo računanje površine krivocrtnih trapeza pomoću granične vrijednosti integralnih zbrojeva, uspostavlja se sljedeća veza.
- Teorem 1. Pretpostavimo da je funkcija *f neprekidna* (ili, eventualno, omeđena s konačno mnogo točaka prekida 1. vrste) na segmentu $[a, b]$. Tada vrijedi jednakost:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- gdje je *F bilo koja* antiderivacija funkcije *f*.
- Gornja jednakost naziva se *Newton – Leibnizova formula* i predstavlja temeljnu vezu matematičke analize (grane matematike koja se bavi proučavanjem funkcija) i geometrije.

1.8.4. NEWTON-LEIBNIZOVA FORMULA – SKICA DOKAZA

- Definiramo funkciju $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ pravilom

$$F(x)=\int_a^x f(t)\cdot \mathrm{d}t.$$

- Pokazuje se da vrijedi jednakost:

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in\langle a,b\rangle.$$

- Očito je $F(a)=0.$
- Neka je $G = G(x)$ *bilo koja* antiderivacija funkcije f čije pravilo znamo opisati „konkretnim" analitičkim izrazom („formulom"), a ne integralom. Dakle, G je antiderivacija čije vrijednosti možemo jednostavno računati koristeći njezino *pravilo*, za svaki $x\in[a,b]$.

1.8.4. NEWTON-LEIBNIZOVA FORMULA – SKICA DOKAZA

- Znamo da se *svake* dvije antiderivacije iste funkcije razlikuju za konstantu. Zbog toga postoji jedinstveni $C \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$$F(x) = G(x) + C, \ \forall x \in [a,b].$$

- U ovu jednakost uvrstimo $x = a$, pa dobijemo:

$$F(a) = G(a) + C,$$

$$0 = G(a) + C,$$

$$C = -G(a).$$

- Tako je, dakle, $F(x) = G(x) - G(a)$. Uvrstimo $x = b$, pa slijedi:
- $$F(b) = \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

1.8.5. ALGORITAM ZA IZRAČUNAVANJE ODREĐENOGA INTEGRALA $\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$

- Pretpostavka: Podintegralna funkcija f je neprekidna ili omeđena s konačno mnogo točaka prekida 1. vrste na segmentu $[a, b]$.
- Korak 1. Odrediti neodređeni integral $\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$.
- Korak 2. Odabrati $C = 0$. Tako se dobije standardna antiderivacija F funkcije f.
- Korak 3. Izračunati $F(b) - F(a)$.

1.8.6. OSNOVNA SVOJSTVA ODREĐENOGA INTEGRALA

- Pretpostavke: $a \leq b$, $c \in [a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ konstanta.

$$1.)\ \int_a^b \alpha \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$2.)\ \int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$3.)\ \int_b^a f(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$4.)\ \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

1.8.7. SREDNJA VRIJEDNOST FUNKCIJE NA SEGMENTU

- Neka je f funkcija neprekidna na segmentu $[a, b]$.
- Tada se *srednja* (*prosječna*) *vrijednost* te funkcije na navedenom segmentu računa prema formuli:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

1.8.8. POVRŠINA RAVNINSKOGA LIKA

- Neka je f funkcija neprekidna na segmentu $[a, b]$.
- Tada je površina *krivocrtnoga trapeza* omeđenoga krivuljama $y = f(x)$, $y = 0$ (os apscisa), $x = a$ i $x = b$ jednaka

$$P = \int_a^b \left| f(x) \right| \cdot \mathrm{d}x$$

- Ako za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq 0$, znak apsolutne vrijednosti smije se izostaviti.
- Općenitije, ako su f i g funkcije neprekidne na segmentu $[a, b]$ takve da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq g(x)$, onda je površina lika omeđenoga (samo) grafovima tih funkcija jednaka:

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) \cdot \mathrm{d}x.$$

1.8.9. NAPOMENE

- Može se pokazati da općenito vrijedi nejednakost:

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\cdot \mathrm{d}x.$$

- Jednakost vrijedi ako f ima *isti predznak* na segmentu integracije, odnosno ako vrijedi:

$$\text{ili } f(x) \geq 0 \text{ ili } f(x) < 0,\ \forall x \in [a,b].$$

- Preciznije, znak jednakosti vrijedi ako točno jedna od gornjih nejednakosti vrijedi za sve $x \in [a,b]$ osim eventualno za prebrojivo mnogo x.
- Ta je tvrdnja posljedica svojstva da postojanje prekida funkcije f u prebrojivo mnogo točaka segmenta $[a,b]$ ne utječe na vrijednost određenoga integrala.

1.8.9. NAPOMENE

- Ako je dio ravninskoga lika smješten iznad osi apscisa, a dio ispod te osi, onda ukupnu površinu lika možemo računati tako da *zasebno* odredimo površinu dijela lika iznad osi apscisa, a zasebno površinu dijela lika ispod osi apscisa, pa te površine zbrojimo.
- Kod određivanja površine dijela lika *ispod* osi apscisa najjednostavnije je izračunati pripadni određeni integral (koji će biti strogo negativan), pa mu potom promijeniti predznak. Dobivena vrijednost je tražena površina.

1.8.9. NAPOMENE

- Površina ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $x = f(y)$, te pravcima $x = 0$ (os ordinata), $y = a$ i $y = b$ dana je izrazom:

$$P = \int_a^b |f(y)| \cdot \mathrm{d}y$$

- Površina lika kojega zatvaraju pravac $y = 0$ (os apscisa) i krivulja $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$, gdje je $t \in [a, b]$, dana je izrazom:

$$P = \int_a^b y \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b f_2(t) \cdot f_1'(t) \cdot \mathrm{d}t$$

- Pritom granice integracije treba odabrati tako da prirast $\mathrm{d}x$ bude nenegativan.

1.8.10. DULJINA LUKA KRIVULJE

- Neka je f funkcija neprekidno derivabilna na segmentu $[a, b]$.
- Tada je duljina luka grafa funkcije f između njegovih točaka s apscisama $x = a$ i $x = b$ jednaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \cdot \mathrm{d}x$$

1.8.11. VOLUMEN ROTACIJSKOGA TIJELA

- Ako krivocrtni trapez omeđen krivuljama $y = f(x)$ i pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$ rotira oko osi apscisa, volumen nastaloga rotacijskoga tijela računamo prema formuli:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x.$$

- Ako isti trapez rotira oko osi ordinata i ako su konstante a i b istoga predznaka, volumen nastaloga rotacijskoga tijela računa se prema formuli:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot \left|f(x)\right| \cdot \mathrm{d}x.$$

1.8.1. Pojam i osnovna svojstva određenoga integrala

1. Odredite integralni zbroj S_n za funkciju $f(x)=x$ definiranu na segmentu $[0, 1]$ tako da pripadnim diobenim točkama taj segment bude podijeljen na jednake dijelove. Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ i objasnite dobiveni rezultat.

Rješenje: Diobene točke su $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. Stavimo li $x_0=0,\ x_n=1,$ onda za svaki $i=1,2,\ldots,n-1$ vrijedi

$$x_i=\frac{i}{n},$$
$$x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n},$$

te

$$f(x_i)=x_i=\frac{i}{n}.$$

Zbog toga je:

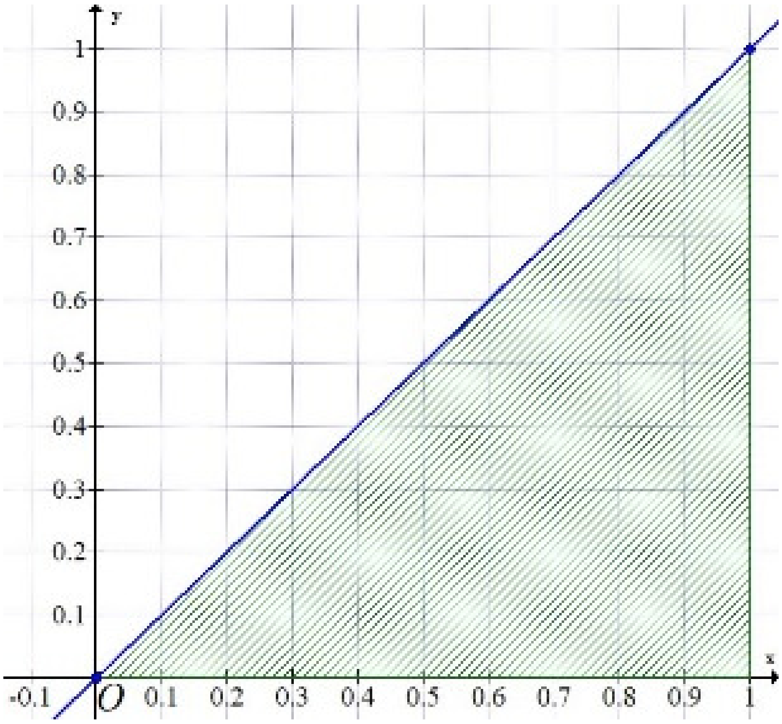
$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)=\\ &=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\\ &=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i=\\ &=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\\ &=\frac{n^2-n}{2\cdot n^2}=\\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot n} \end{aligned}$$

Odatle slijedi:

$$\begin{aligned} \lim_n S_n&=\lim_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot n}\right)=\\ &=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Prema tome, površina krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = x$, $x = 0$ i $x = 1$ iznosi $P = \frac{1}{2}$ kv. jed. No, taj je lik zapravo jednakokračan pravokutan trokut kojemu su duljine kateta jednake $a = 1$, pa je njegova površina jednaka

$$P = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \text{ kv. jed.}$$



Slika 1.

2. Neka su $a > 0$ i $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Ako je f parna funkcija, onda je:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{-a}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

b) Ako je f neparna funkcija, onda je:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 0.$$

Rješenje: **Dokaz I.** Primijetimo da za svaki $a > 0$ vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Prvi pribrojnik na desnoj strani te jednakosti transformirajmo ovako:

$$\int_{-a}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := -x, \\ x = -t, \\ \mathrm{d}t = (-x)' \cdot \mathrm{d}x = (-1) \cdot \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t, \\ -a \to -(-a) = a, \\ 0 \to -0 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{a}^{0} f(-t) \cdot (-\mathrm{d}t) =$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t) \cdot \mathrm{d}t.$$

U članu na lijevoj strani i u drugom pribrojniku promijenimo oznaku varijable:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} f(t) \cdot \mathrm{d}t,$$

$$\int_{0}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t) \cdot \mathrm{d}t.$$

Tako dobivamo da je polazni određeni integral jednak:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \int_{0}^{a} \big(f(t) + f(-t)\big)\cdot \mathrm{d}t,$$

odnosno, ako nezavisnu varijablu (ponovno) preimenujemo u x,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)\cdot \mathrm{d}x.$$

a) Iz definicije parne funkcije slijedi da za svaki $x \in [-a, a]$ vrijedi jednakost

$$f(-x) = f(x).$$

Zbog toga je:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(x)\big)\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= 2\cdot \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Jednakosti

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

i

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

imaju međusobno jednake lijeve strane. Zbog toga takve moraju biti i desne strane tih jednakosti, pa slijedi:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x,$$
$$\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u jednakost

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

dobivamo:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

b) Iz definicije neparne funkcije slijedi da za svaki $x\in[-a,a]$ vrijedi jednakost $f(-x)=-f(x)$. Zbog toga je:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= \int_{0}^{a}\left(f(x)+f(-x)\right)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{0}^{a}\left(f(x)+\left(-f(x)\right)\right)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{0}^{a}\left(f(x)-f(x)\right)\cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{0}^{a} 0\cdot \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Dokaz II. Najprije dokažimo da je (prva) derivacija parne funkcije neparna funkcija. Neka je $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ parna funkcija. Koristeći definiciju derivacije funkcije u točki i definiciju parne funkcije, za bilo koji $c\in[-a,a]$ imamo:

$$\begin{aligned}g'(-c) &= \lim_{x\to -c}\left(\frac{g(x)-g(-c)}{x-(-c)}\right) = \\ &= \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=-x,\\ x=-t,\\ \text{kad } x\to -c, \text{ onda } t\to c\end{array}\right\} = \\ &= \lim_{t\to c}\left(\frac{g(-t)-g(-c)}{-t-(-c)}\right) = \\ &= \lim_{t\to c}\left(\frac{g(t)-g(c)}{-(t-c)}\right) = \\ &= -\lim_{t\to c}\left(\frac{g(t)-g(c)}{t-c}\right) = \\ &= -g'(c),\end{aligned}$$

a odavde izravno slijedi tvrdnja.

Dokažimo i da je (prva) derivacija neparne funkcije parna funkcija. Neka je $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ neparna funkcija. Koristeći definiciju derivacije funkcije u točki i definiciju neparne funkcije, za bilo koji $c\in[-a,a]$ imamo:

$$\begin{aligned}
g'(-c) &= \lim_{x\to -c}\left(\frac{g(x)-g(-c)}{x-(-c)}\right)= \\
&= \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=-x,\\ x=-t,\\ \text{kad } x\to -c, \text{ onda } t\to c\end{array}\right\}= \\
&= \lim_{t\to c}\left(\frac{g(-t)-g(-c)}{-t-(-c)}\right)= \\
&= \lim_{t\to c}\left(\frac{-g(t)-(-g(c))}{-t-(-c)}\right)= \\
&= -\lim_{t\to c}\left(\frac{-(g(t)-g(c))}{-(t-c)}\right)= \\
&= \lim_{t\to c}\left(\frac{g(t)-g(c)}{t-c}\right)= \\
&= g'(c),
\end{aligned}$$

a odavde izravno slijedi tvrdnja.

Iz dokazanih tvrdnji „invertiranjem“ slijedi da je standardna antiderivacija (ali i bilo koja antiderivacija!) neparne funkcije parna funkcija, kao i da je standardna antiderivacija parne funkcije neparna funkcija.

Oprez: Antiderivacija parne funkcije je neparna funkcija ako i samo ako je ta antiderivacija jednaka standardnoj antiderivaciji. Naime, dodavanjem realne konstante $C\neq 0$ bilo kojoj neparnoj funkciji dobivamo funkciju koja nije ni parna, ni neparna.

a) Neka je F standardna antiderivacija funkcije f. Iz pretpostavke da je f parna i gornjih razmatranja slijedi da je F neparna funkcija. Za *bilo koju* neparnu funkciju F definiranu u $c=0$ je nužno $F(0)=0$. (Za dokaz vidjeti predavanja iz *Matematike* 1, nastavna cjelina 4.1. *Osnovni pojmovi o funkcijama*.) Tako primjenom Newton-Leibnizove formule imamo:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= F(a)-F(-a)= \\ &= F(a)-(-F(a))= \\ &= F(a)+F(a)= \\ &= 2\cdot F(a)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= 2\cdot\big(F(a)-F(0)\big)= \\ &= 2\cdot\big(F(a)-0\big)= \\ &= 2\cdot F(a).\end{aligned}$$

Desne strane ovih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i lijeve strane. Odatle izravno slijedi prva jednakost u **a)**.

Nadalje, jednakosti

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= F(a)-F(-a)= \\ &= F(a)-(-F(a))= \\ &= F(a)+F(a)= \\ &= 2\cdot F(a)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}2\cdot\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= 2\cdot\big(F(0)-F(-a)\big)= \\ &= 2\cdot\big(0-F(-a)\big)= \\ &= 2\cdot\big(0-(-F(a))\big)= \\ &= 2\cdot F(a)\end{aligned}$$

imaju jednake desne strane, pa takve moraju biti i lijeve strane. Odatle slijedi preostala jednakost u **a)**.

b) Neka je F standardna antiderivacija funkcije f. Iz pretpostavke da je f neparna i ranijih razmatranja slijedi da je F parna funkcija. Tako primjenom Newton-Leibnizove formule odmah imamo:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= F(a)-F(-a)= \\ &= F(a)-F(a)=0,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

3. Neka su $T>0$ i f neprekidna T-periodična funkcija. Dokažite jednakost:

$$\int_a^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\cdot \mathrm{d}x,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Rješenje: Neka je $m:=\left\lceil \frac{a}{T}\right\rceil$. ($m$ je najmanji cijeli broj veći ili jednak $\frac{a}{T}$ i dobro je definiran zbog pretpostavke $T>0$.) Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{T}\le m<\frac{a}{T}+1,\quad /\cdot T\\ &a\le m\cdot T<a+T.\end{aligned}$$

Prema svojstvu aditivnosti određenoga integrala vrijedi:

$$\int_a^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_a^{m\cdot T} f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_{m\cdot T}^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

U drugom pribrojniku uvedimo zamjenu:

$$\begin{aligned}&t:=x-T,\\ &x=t+T,\\ &\mathrm{d}t=(x-T)'\cdot \mathrm{d}x=\\ &\quad=(1-0)\cdot \mathrm{d}x=\mathrm{d}x,\\ &m\cdot T\mapsto m\cdot T-T=(m-1)\cdot T,\\ &a+T\mapsto (a+T)-T=a.\end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{m\cdot T}^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x&=\int_{(m-1)\cdot T}^{a} \underbrace{f(t+T)}_{=f(t)}\cdot \mathrm{d}t=\\ &=\int_{(m-1)\cdot T}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\\ &=\int_{(m-1)\cdot T}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tako je:

$$\int_a^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_a^{m\cdot T} f(x)\cdot \mathrm{d}x + \int_{(m-1)\cdot T}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{(m-1)\cdot T}^{m\cdot T} f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

Preostaje zamijeniti:

$$\begin{aligned}
&u := x-(m-1)\cdot T,\\
&x = u+(m-1)\cdot T,\\
&\mathrm{d}u = (x-(m-1)\cdot T)'\cdot \mathrm{d}x =\\
&\quad = (1-0)\cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x,\\
&(m-1)\cdot T \mapsto (m-1)\cdot T-(m-1)\cdot T = 0,\\
&m\cdot T \mapsto m\cdot T-(m-1)\cdot T = T.
\end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x &= \int_0^T \underbrace{f(t+(m-1)\cdot T)}_{=f(t)}\cdot \mathrm{d}t =\\
&= \int_0^T f(t)\cdot \mathrm{d}t =\\
&= \int_0^T f(x)\cdot \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

što smo i trebali dokazati.

Napomena 1. Izravno iz definicije periodične funkcije slijedi:

$$f(x+m\cdot T) = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Napomena 2. U gornjem dokazu je bilo ključno što je $\int_a^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x$ *realan broj*, a ne funkcija (npr. standardna antiderivacija). Zbog toga jednakost

$$\int_a^{a+T} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_0^T f(t)\cdot \mathrm{d}t$$

predstavlja jednakost dvaju realnih brojeva, pa varijablu u drugom integralu možemo preimenovati u x. „Izbrišemo“ li granice segmenta integracije, gornja jednakost, naravno, ne vrijedi jer bismo umjesto varijable t morali pisati izraz kojega zamjenjuje ta varijabla. Dakle, slobodno (i neprecizno) govoreći, „kod određenoga integrala ne moramo vraćati izraz kojega zamjenjuje nova nezavisna varijabla.“

4. Izračunajte sljedeće određene integrale:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x}\cdot \mathrm{d}x$;

Rješenje: Na ovom ćemo zadatku pokazati kako primijeniti metodu zamjene varijabli i metodu djelomične integracije prilikom određivanja *određenih* integrala. U prethodnim smo točkama tu metodu primjenjivali u svrhu određivanja neodređenih integrala.

Osnovna ideja je uvesti zamjenu $t := \sqrt{x}$. Odavde su:

$$x = t^2,$$
$$\mathrm{d}x = 2\cdot t\cdot \mathrm{d}t.$$

Što se događa s granicama segmenta integracije? I na njih primijenimo naznačenu zamjenu, i to ovako:

$$0 \mapsto \sqrt{0} = 0,$$
$$\frac{\pi^2}{4} \mapsto \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, *svaku* granicu segmenta integracije uvrstimo u izraz koji smo označili s t, pa tako dobijemo nove granice segmenta integracije. U ovom je slučaju:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot t\cdot \cos t\cdot \mathrm{d}t.$$

Dobiveni integral odredimo metodom djelomične integracije:

$$I = \left| \begin{matrix} u = 2\cdot t & v = \int \cos t\cdot \mathrm{d}t = \sin t \\ \mathrm{d}u = 2\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = \cos t\cdot \mathrm{d}t \end{matrix} \right| =$$
$$= (2\cdot t\cdot \sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot \sin t\cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cdot 0\cdot \sin(0)\right) + (2\cdot\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \pi - 0 + \left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cdot\cos(0)\right) =$$
$$= \pi + (0-2) =$$
$$= \pi - 2.$$

Primijetite da smo ovdje primijenili Newton-Leibnizovu formulu na *svaki* član dobiven metodom djelomične integracije. To smo smjeli napraviti jer su dobiveni članovi ionako dio konačnoga rješenja, pa u „komad po komad“ toga konačnoga rješenja smijemo uvrštavati granice segmenta integracije radi primjene Newton-Leibnizove formule.

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cdot y)\cdot \mathrm{e}^{\sin y}\cdot \mathrm{d}y.$

Rješenje: Najprije primijenimo identitet

$$\sin(2\cdot y) = 2\cdot \sin y\cdot \cos y.$$

Uvedimo zamjenu:

$$\left\{\begin{array}{l} t := \sin y, \\ \mathrm{d}t = \cos y\cdot \mathrm{d}y, \\ 0 \mapsto \sin 0 = 0, \\ \frac{\pi}{2} \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

Dobivamo:

$$I = \int\limits_0^1 2\cdot t\cdot \mathrm{e}^t\cdot \mathrm{d}t.$$

I ovaj integral riješimo metodom djelomične integracije:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{ll} u = 2\cdot t & v = \int \mathrm{e}^t\cdot \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \\ \mathrm{d}u = 2\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\cdot \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \left(2\cdot t\cdot \mathrm{e}^t\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2\cdot \mathrm{e}^t\cdot \mathrm{d}t = \\ &= \left(2\cdot 1\cdot \mathrm{e}^1 - 2\cdot 0\cdot \mathrm{e}^0\right) - \left(2\cdot \mathrm{e}^t\right)\Big|_0^1 = \\ &= 2\cdot \mathrm{e} - 0 - \left(2\cdot \mathrm{e}^1 - 2\cdot \mathrm{e}^0\right) = \\ &= 2\cdot \mathrm{e} - 2\cdot \mathrm{e} + 2 = \\ &= 2. \end{aligned}$$

1.8.2. Srednja vrijednost funkcije definirane na segmentu

1. Neka su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \langle -\pi, \pi]$ konstante. Odredite srednju vrijednost harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ na njezinu temeljnu segmentu.

Rješenje: Iz *Matematike* 1 znamo da je temeljni segment zadane harmonijske funkcije $S = \left[\frac{-\varphi}{\omega}, \frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}\right]$. Zbog toga je tražena srednja vrijednost jednaka:

$$
\begin{aligned}
\overline{f} &= \frac{1}{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega} - \left(\frac{-\varphi}{\omega}\right)} \cdot \int\limits_{\frac{-\varphi}{\omega}}^{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}} A\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{\omega}{2\cdot\pi}\cdot A\cdot\frac{1}{\omega}\cdot(-\cos(\omega\cdot t+\varphi))\Big|_{\frac{-\varphi}{\omega}}^{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}} = \\
&= \frac{-A}{2\cdot\pi}\cdot\left(\cos\left(\omega\cdot\left(\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}\right)+\varphi\right)-\cos\left(\omega\cdot\left(\frac{-\varphi}{\omega}\right)+\varphi\right)\right) = \\
&= \frac{-A}{2\cdot\pi}\cdot(\cos(2\cdot\pi)-\cos 0) = \\
&= \frac{-A}{2\cdot\pi}\cdot(1-1) \\
&= \frac{-A}{2\cdot\pi}\cdot 0 = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

2. Izračunajte srednju vrijednost realne funkcije $g(x)=8\cdot\sqrt{3\cdot x-x^2}$ na njezinoj prirodnoj domeni.

Rješenje: Odredimo najprije prirodnu domenu zadane funkcije. Izraz pod drugim korijenom treba biti nenegativan, pa je jedini uvjet:

$$3\cdot x-x^2\geq 0.$$

Rješavanjem te kvadratne nejednadžbe (učinite to sami) dobivamo $x\in[0,3]$. Dakle, $D(g)=[0,3]$.

Tako zaključujemo da je tražena srednja vrijednost jednaka:

$$\begin{aligned}\overline{g}&=\frac{1}{3-0}\cdot\int_0^3 8\cdot\sqrt{3\cdot x-x^2}\cdot \mathrm{d}x=\\&=\frac{8}{3}\cdot\int_0^3\sqrt{3\cdot x-x^2}\cdot\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Određivanje integrala iracionalnih funkcija upoznali smo u točki 1.6. Imamo redom:

$$3\cdot x-x^2=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}\overline{g}&=\frac{8}{3}\cdot\int_0^3\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\\&=\frac{16}{3}\cdot\left.\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{\frac{9}{4}}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)\right)\right|_0^{\frac{3}{2}}=\\&=\frac{16}{3}\cdot\left(0+\frac{9}{8}\cdot\arcsin 0-\left(0+\frac{9}{8}\cdot\arcsin(-1)\right)\right)=\\&=\frac{16}{3}\cdot\left(0+0-0-\frac{9}{8}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\\&=\frac{16}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\\&=3\cdot\pi.\end{aligned}$$

3. Izračunajte srednju vrijednost funkcije $g(t)=3\cdot\pi\cdot\sin^3 t$ na segmentu $[0,\pi]$.

Rješenje: Tražena srednja vrijednost je jednaka:

$$
\begin{aligned}
\overline{g} &= \frac{1}{\pi-0}\cdot\int_0^{\pi} 3\cdot\pi\cdot\sin^3 t\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot 3\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3 t\cdot\mathrm{d}t = \\
&= 3\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\sin t\cdot\mathrm{d}t = \\
&= 3\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\cdot\sin t\cdot\mathrm{d}t = \\
&= \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x:=\cos t,\\ \mathrm{d}x=-\sin t\cdot\mathrm{d}t,\\ \sin t\cdot\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\\ 0\to\cos 0=1,\\ \pi\to\cos\pi=-1\end{array}\right\} = \\
&= 3\cdot\int_1^{-1}(1-x^2)\cdot(-\mathrm{d}x) = \\
&= 3\cdot(-1)\cdot\int_1^{-1}(1-x^2)\cdot\mathrm{d}x = \\
&= 3\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot\mathrm{d}x = \\
&= (\text{jer je } g_1(x)=1-x^2 \text{ parna funkcija}) = \\
&= 3\cdot 2\cdot\int_0^{1}(1-x^2)\cdot\mathrm{d}x = \\
&= 6\cdot\left(x-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)\Bigg|_0^1 = \\
&= 6\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot 1-\left(0-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right) = \\
&= 6\cdot\left(1-\frac{1}{3}+0-0\right) = \\
&= 6\cdot\frac{2}{3} = \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Napomena 4. Prisjetimo se da vrijedi svojstvo:

$$\int_b^a f(x)\cdot \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x,$$

tj. da zamjena redoslijeda granica segmenta integracije mijenja predznak određenoga integrala. Zbog toga u prethodnom računu koristimo jednakost:

$$3\cdot(-1)\cdot \int_1^{-1}(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x = 3\cdot \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x.$$

Napomena 5. Funkcija $g_1(t) = 1 - t^2$ je parna jer vrijedi jednakost:

$$g_1(-t) = 1-(-t)^2 = 1 - t^2 = g_1(t).$$

Zbog toga smijemo primijeniti svojstvo integrala parne funkcije na segmentu oblika $[-a, a]$ citirano u Napomeni 3.

4. Izračunajte srednju vrijednost funkcije $g(x)=\lfloor x \rfloor$ na segmentu $[-2\cdot\pi,\ 2\cdot\pi]$. (S $\lfloor x \rfloor$ je označen najveći cijeli broj jednak ili manji od x.)

Rješenje: U ovom zadatku primijenit ćemo jedno od osnovnih svojstava određenoga integrala:

$$\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\cdot \mathrm{d}x,\ \forall c\in[a,b].$$

Osnovna ideja je uočiti da, ako je $k\in\mathbb{Z}$ proizvoljan, ali fiksiran, onda je

$$g(x)=k,\ \forall x\in[k,k+1\rangle.$$

Naime, za svaki $x\in[k,k+1\rangle$ najveći cijeli broj koji je jednak ili manji od x je upravo k. (Grubo i neprecizno rečeno, zaokružujemo x „naniže“.) Zbog toga ćemo segment integracije $[-2\cdot\pi,2\cdot\pi]$ napisati kao konačnu uniju skupova

$$\begin{aligned}[-2\cdot\pi,2\cdot\pi]&=[-2\cdot\pi,-6\rangle\cup[-6,-5\rangle\cup\ldots\cup[5,6\rangle\cup[6,2\cdot\pi]=\\&=[-2\cdot\pi,-6\rangle\cup\left(\bigcup_{k=-6}^{5}[k,k+1\rangle\right)\cup[6,2\cdot\pi],\end{aligned}$$

pa uočiti da je:

$$g(x)=\begin{cases}-7,\ \text{za } \forall x\in[-2\cdot\pi,-6\rangle,\\ k,\ \text{za } \forall x\in[k,k+1\rangle,\ \text{pri čemu je } k\in\{-6,-5,\ldots,4,5\},\\ 6,\ \text{za } \forall x\in[6,2\cdot\pi].\end{cases}$$

Koristeći gore navedeno svojstvo određenoga integrala dobivamo:

$$\begin{aligned}\overline{g}&=\frac{1}{2\cdot\pi-(-2\cdot\pi)}\cdot\int_{-2\cdot\pi}^{2\cdot\pi}\lfloor x\rfloor\cdot\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-2\cdot\pi}^{-6}\lfloor x\rfloor\cdot\mathrm{d}x+\sum_{k=-6}^{5}\int_k^{k+1}\lfloor x\rfloor\cdot\mathrm{d}x+\int_6^{2\cdot\pi}\lfloor x\rfloor\cdot\mathrm{d}x\right)=\\&=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-2\cdot\pi}^{-6}-7\cdot\mathrm{d}x+\sum_{k=-6}^{5}\int_k^{k+1}k\cdot\mathrm{d}x+\int_6^{2\cdot\pi}6\cdot\mathrm{d}x\right)=\\&=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left((-7)\cdot\int_{-2\cdot\pi}^{-6}1\cdot\mathrm{d}x+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot\int_k^{k+1}1\cdot\mathrm{d}x+6\cdot\int_6^{2\cdot\pi}1\cdot\mathrm{d}x\right)=\\&=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left((-7)\cdot(-6+2\cdot\pi)+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot(x)\Big|_k^{k+1}+6\cdot(2\cdot\pi-6)\right)=\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(42-14\cdot\pi+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot(k+1-k)+12\cdot\pi-36\right)=$$
$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(6-2\cdot\pi+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot 1\right)=$$
$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(6-2\cdot\pi+\frac{12}{2}\cdot(-6+5)\right)=$$
$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot(6-2\cdot\pi-6)=$$
$$=\frac{-1}{2}.$$

Napomena 6. U rješenju gornjega zadatka iskoristili smo jednakost:

$$\sum_{k=-6}^{5}k=-6+(-5)+(-4)+\ldots+3+4+5=$$
$$=\frac{12}{2}\cdot(-6+5)=$$
$$=-6.$$

Naime, navedeni brojevi u danom poretku očito tvore aritmetički niz. Ima ih ukupno 12. Prvi član niza je –6, a posljednji 5, pa je zbroj svih navedenih brojeva jednak –6.

5. Brzina prirasta populacije zmajeva na životinjskoj farmi dr. Orwella dana je izrazom

$$v(t) = 20 + 50 \cdot \ln(t+2),$$

gdje je t vrijeme iskazano u godinama. Procijenite prosječan godišnji prirast promatrane populacije između 2. i 4. godine. Zaokružite dobiveno rješenje na najbliži **prirodan** broj.

Rješenje: Traženi prirast jednak je srednjoj vrijednosti funkcije v na segmentu [2, 4]. Tako redom imamo:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{1}{4-2} \cdot \int_2^4 (20 + 50 \cdot \ln(t+2)) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_2^4 (20 + 50 \cdot \ln(t+2)) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (20 \cdot t + 50 \cdot ((t+2) \cdot \ln(t+2) - (t+2)))\Big|_2^4 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (50 \cdot (t+2) \cdot \ln(t+2) - 30 \cdot t - 100)\Big|_2^4 = \\
&= (25 \cdot (t+2) \cdot \ln(t+2) - 15 \cdot t - 50)\Big|_2^4 = \\
&= 25 \cdot 6 \cdot \ln 6 - 15 \cdot 4 - 50 - (25 \cdot 4 \cdot \ln 4 - 15 \cdot 2 - 50) = \\
&= 150 \cdot \ln 6 - 60 - 100 \cdot \ln 4 + 30 = \\
&= 150 \cdot \ln 6 - 100 \cdot \ln 4 - 30 \approx 100.13 \approx \\
&= 100 \text{ zmajeva/god.}
\end{aligned}$$

1.8.3. Duljina luka krivulje iznad segmenta

1. Izračunajte duljinu luka lančanice $y = \operatorname{ch} x$ iznad segmenta [0, ln 5].

Rješenje: U ovome je zadatku $f(x) = \operatorname{ch} x$. Pojednostavnimo najprije podintegralnu funkciju ovako:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} &= \sqrt{1+\left((\operatorname{ch} x)'\right)^2} = \\ &= \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \\ &= \operatorname{ch} x.\end{aligned}$$

Koristeći identitete

$$\left.\begin{aligned} e^{\ln x} &= x, \\ e^{-\ln x} &= \frac{1}{x} \end{aligned}\right\}, \ \forall x > 0,$$

i definicijsku formulu funkcije sh, dobivamo da je tražena duljina jednaka:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\ln 5} \operatorname{ch} x \cdot \mathrm{d}x = \\ &= (\operatorname{sh} x)\Big|_0^{\ln 5} = \\ &= \operatorname{sh}(\ln 5) - \underbrace{\operatorname{sh} 0}_{=0} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}}{2} = \\ &= \frac{5 - 5^{-1}}{2} = \\ &= \frac{12}{5} \text{ jed. duljine.}\end{aligned}$$

2. Izračunajte duljinu luka parabole $y = x^2 - 2\cdot x$ između njezinih sjecišta s osi apscisa.

Rješenje: Apscise (prve koordinate) sjecišta zadane parabole s osi apscisa dobijemo rješavanjem jednadžbe

$$x^2 - 2\cdot x = 0.$$

Odatle je $x_1 = 0,\ x_2 = 2.$ Dakle, tražimo duljinu luka zadane parabole između točaka (0, 0) i (2, 0).

Imamo redom:

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\left(x^2 - 2\cdot x\right)'\right)^2}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + (2\cdot x - 2)^2}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot x - 2}{2}\cdot\sqrt{1 + (2\cdot x - 2)^2} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(2\cdot x - 2 + \sqrt{1 + (2\cdot x - 2)^2}\right)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(2 + \sqrt{5}\right) - \left(-\sqrt{5} + \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5} - 2\right)\right)\right) =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right) =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\cdot\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2}\right) =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{\left(\sqrt{5} + 2\right)^2}{5 - 4}\right) =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{5} + 2\right) \text{ jed. duljine.}$$

Napomena 1. Koristeći definiciju funkcije area sinus hiperbolni

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

gornji rezultat možemo kraće zapisati u obliku:

$$l = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{Arsh}(2) \text{ jed. duljine.}$$

3. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=\frac{2}{3}\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x-1}$ iznad segmenta $[1,4]$.

Rješenje: U ovome je zadatku

$$f(x)=\frac{2}{3}\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x-1}=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Najprije pojednostavnimo podintegralnu funkciju:

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\left(\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}=$$
$$=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(x-1)'\right)^2}=$$
$$=\sqrt{1+\left((x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 1\right)^2}=$$
$$=\sqrt{1+(x-1)}=$$
$$=\sqrt{x}=$$
$$=x^{\frac{1}{2}}.$$

Zbog toga je tražena duljina jednaka:

$$l=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{d}x=$$
$$=\left.\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot x^{\frac{1}{2}+1}\right)\right|_1^4=$$
$$=\left.\left(\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_1^4=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{=8}-\underbrace{1^{\frac{3}{2}}}_{=1}\right)=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 7=$$
$$=\frac{14}{3}\text{ jed. duljine.}$$

4. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = 2 \cdot \left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x - 1} \right) \right)$ iznad segmenta $[0, 2 \cdot \ln 2]$.

Rješenje: U ovome je zadatku $f(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x - 1} \right) \right)$. Analogno kao u prethodnom zadatku, najprije pojednostavnimo podintegralnu funkciju. Koristeći tablicu osnovnih derivacija i pravilo za deriviranje složenih funkcija imamo redom:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\left(2\cdot\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right)\right)'\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+2^2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\cdot\left(e^x-1\right)' - \frac{1}{1+\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{e^x-1}\right)'\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}} - \frac{1}{1+(e^x-1)}\cdot\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}} - \frac{1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}} - \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x-1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{1+4\cdot\frac{\left(e^x-1\right)^2}{4\cdot\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}} = \\
&= \sqrt{1+\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x-1}} = \\
&= \sqrt{1+\left(e^x-1\right)} = \\
&= \sqrt{e^x} = \\
&= e^{\frac{x}{2}}.
\end{aligned}
$$

Zbog toga je tražena duljina luka jednaka:

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\cdot\ln 2} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \right) \Bigg|_0^{2\cdot\ln 2} = \\
&= 2 \cdot \left(\underbrace{\mathrm{e}^{\ln 2}}_{=2} - \underbrace{\mathrm{e}^{0}}_{=1} \right) = \\
&= 2 \text{ jed. duljine.}
\end{aligned}
$$

5. Izračunajte duljinu luka krivulje $y^2 = 4 \cdot x$ od njezina tjemena do točke $T = (1, y > 0)$.

Rješenje: Traženu duljinu računamo promatrajući krivulju kao *graf funkcije čija je varijabla* y (a ne x). Ta funkcija u ovom slučaju glasi:

$$f(y) = \frac{y^2}{4}.$$

(Jednostavno izrazimo x pomoću y u jednadžbi krivulje.) Donja granica segmenta integracije ponovno je 0, dok je gornja granica toga segmenta jednaka y_T. Zbog toga najprije odredimo y_T.

Iz jednadžbe

$$y_T^2 = 4 \cdot 1$$

i uvjeta $y_T > 0$ lagano slijedi $y_T = 2$.

Tako sada redom imamo:

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\left(\frac{y^2}{4} \right)' \right)^2} \cdot \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot y}{4} \right)^2} \cdot \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} \right)^2} \cdot \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{y}{2}}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{y}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} \right)^2} \right) \right) \Bigg|_0^2 = \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \text{ jed. duljine.}
\end{aligned}$$

Napomena 2. Koristeći definiciju funkcije area sinus hiperbolni navedenu u napomeni 1. dobiveni rezultat kraće možemo zapisati u obliku:

$$l = \sqrt{2} + \mathrm{Arsh}(1) \text{ jed. duljine.}$$

1.8.4. Volumen rotacijskoga tijela

1. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$ i $x=16$ oko osi:

   a) apscisa;
   b) ordinata.

   Rješenje: a) Traženi volumen je jednak:

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \cdot \int_4^{16} \left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \pi \cdot \int_4^{16} x \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)\Bigg|_4^{16} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\underbrace{16^2 - 4^2}_{=256-16=240}\right) = \\
&= 120 \cdot \pi \text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

   b) Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{x} \geq 0, \ \forall x \geq 0.$$

   Zbog toga vrijedi jednakost:

$$\left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x}, \ \forall x \in [4,16].$$

   Tako dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$\begin{aligned}
V_y &= 2 \cdot \pi \cdot \int_4^{16} x \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \int_4^{16} x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \int_4^{16} x^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1} \cdot x^{\frac{3}{2}+1}\right)\Bigg|_4^{16} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_4^{16} = \\
&= 2\cdot\pi\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\underbrace{16^{\frac{5}{2}}-4^{\frac{5}{2}}}_{=1024-32=992}\right) = \\
&= \frac{3968}{5}\cdot\pi \text{ kub. jed.}
\end{aligned}
$$

2. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \pi$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rješenje: a) Primjenjujući formulu za pretvorbu kvadrata funkcije sinus u trigonometrijsku funkciju dvostruko većega kuta, dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi\cdot\int_0^{\pi}(\sin x)^2\cdot dx = \\
&= \pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 x\cdot dx = \\
&= \pi\cdot\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot x)\right)\cdot dx = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos(2\cdot x))\cdot dx = \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\pi-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sin(2\cdot\pi)}_{=0}-\left(0-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sin(2\cdot 0)}_{=0}\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \\
&= \frac{\pi^2}{2} \text{ kub. jed.}
\end{aligned}
$$

b) Primijetimo da je $\sin x \geq 0,\ \forall x \in [0, \pi]$. Zbog toga vrijedi jednakost:

$$|\sin x| = \sin x,\ \forall x \in [0, \pi].$$

Tako dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$V_y = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & v = \int \sin x\cdot \mathrm{d}x = -\cos x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \sin x\cdot \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left((-x\cdot\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\cdot \mathrm{d}x \right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left((-\pi\cdot\underbrace{\cos\pi}_{=-1} - (-\underbrace{0\cdot\cos 0}_{=0})) + \int_0^{\pi} \cos x\cdot \mathrm{d}x \right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(\pi + (\sin x)\Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(\pi + (\underbrace{\sin\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}) \right) =$$

$$= 2\cdot\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

3. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \dfrac{\pi}{4}$ oko osi apscisa.

Rješenje: Koristeći osnovne trigonometrijske identitete dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^2 \cdot dx = \\
&= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 \cdot dx = \\
&= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx = \\
&= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx = \\
&= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) \cdot dx = \\
&= \pi \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \cdot dx \right) = \\
&= \pi \cdot (\operatorname{tg} x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= \pi \cdot \left(\underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \right)}_{=1} - \frac{\pi}{4} - (\underbrace{\operatorname{tg} 0}_{=0} - 0) \right) = \\
&= \pi \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \pi - \frac{\pi^2}{4} \text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

Primjedba 1. U ovome zadatku se nije tražio volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom zadanoga ravninskoga lika oko osi ordinata jer pripadni određeni integral nije moguće elementarno odrediti.

4. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot x + 2}}$, $y = 0$, $x = -1$ i $x = 0$ oko osi apscisa.

Rješenje: Vrijedi identitet:

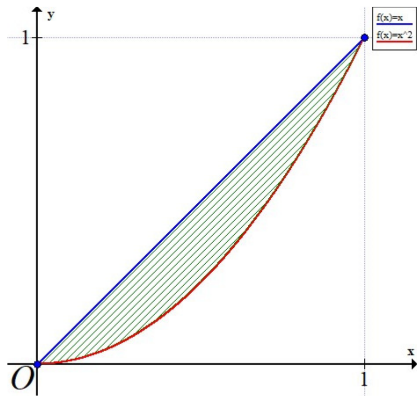
$$x^2 + 2 \cdot x + 2 = (x+1)^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zbog toga traženi volumen iznosi:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot x + 2}} \right)^2 \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \pi \cdot \int_{-1}^{0} \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2 \cdot x + 2} \right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{4 \cdot \pi}{\pi^2} \cdot \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2 \cdot x + 2} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arctg}(x+1) \right) \Big|_{-1}^{0} = \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \\
&= 1 \text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

5. Ravninski lik omeđen krivuljama $y = x$ i $y = x^2$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte volumen nastaloga rotacijskoga tijela. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Ravninski lik koji rotira oko osi ordinata omeđen je pravcem i parabolom, pri čemu je pravac iznad parabole. Zbog toga traženi volumen dobijemo tako da od volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom pravca oko osi ordinata oduzmemo volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom parabole oko osi ordinata:

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 x \cdot x \cdot \mathrm{d}x - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Zbog svojstva aditivnosti integrala ovaj izraz dalje možemo pojednostavniti ovako:

$$\begin{aligned}
V &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{d}x - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 x^3 \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4\right)\Bigg|_0^1 = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^4\right)\right) = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \\
&= \frac{\pi}{6} \text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

1.8.5. Površina ravninskoga lika

1. Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju krivulja $y = \frac{-2}{x^2+1}$, normala na tu krivulju povučena u točki krivulje $T = (x_T > 0, -1)$ i os ordinata. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom slikom.

Rješenje: Najprije uvrstimo $y = -1$ u jednadžbu krivulje. Dobivamo jednadžbu

$$\frac{-2}{x^2+1} = -1,$$

otkuda je $x^2 = 1$. Zbog uvjeta $x > 0$ slijedi $x = 1$. Dakle, $T = (1, -1)$.

Deriviranjem izraza $y = \frac{-2}{x^2+1}$ po varijabli x dobijemo:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{0 \cdot \left(x^2+1\right) - (-2) \cdot \left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = \\ &= \frac{4 \cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Koeficijent smjera normale povučene na zadanu krivulju u točki T jednak je:

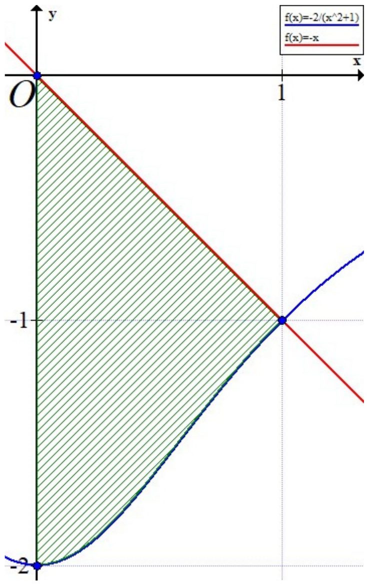
$$\begin{aligned} k_n &= \frac{-1}{y'(1)} = \\ &= \frac{-1}{\frac{4 \cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2}} = \\ &= \frac{-1}{\frac{4}{2^2}} = \\ &= \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

Zbog toga je jednadžba normale zapisana u eksplicitnom obliku:

$$n \ldots \; y - (-1) = (-1) \cdot (x - 1),$$

$$y+1=-x+1,$$
$$y=-x.$$

Nacrtajmo pripadnu sliku (vidjeti sliku 1).



Slika 1.

Uočimo da vrijedi nejednakost:

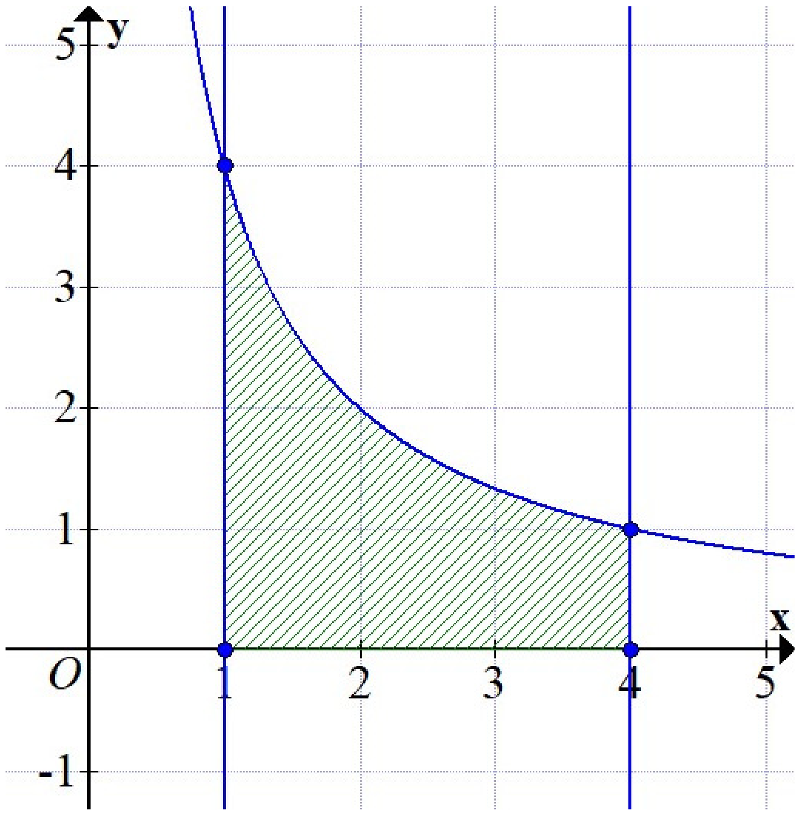
$$-x \geq \frac{-2}{x^2+1}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Tako odmah dobivamo:

$$P=\int_0^1 \left(-x-\left(-\frac{2}{x^2+1}\right)\right)\cdot \mathrm{d}x =$$
$$=\int_0^1 \left(-x+\frac{2}{x^2+1}\right)\cdot \mathrm{d}x =$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 =$$
$$=\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot 1^2}_{=\frac{-1}{2}}+\underbrace{2\cdot \operatorname{arctg} 1}_{=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}-\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot 0^2}_{=0}+\underbrace{2\cdot \operatorname{arctg} 0}_{=0}\right)\right)=$$
$$=\frac{-1}{2}+\frac{\pi}{2}=$$
$$=\frac{\pi-1}{2}\text{ kv. jed.}$$

2. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $x \cdot y = 4$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 4$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Nacrtajmo sve četiri krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

Vidimo da je ravninski lik krivocrtni trapez omeđen zadanim krivuljama. Jednadžbu krivulje $x \cdot y = 4$ zapišimo u eksplicitnom obliku:

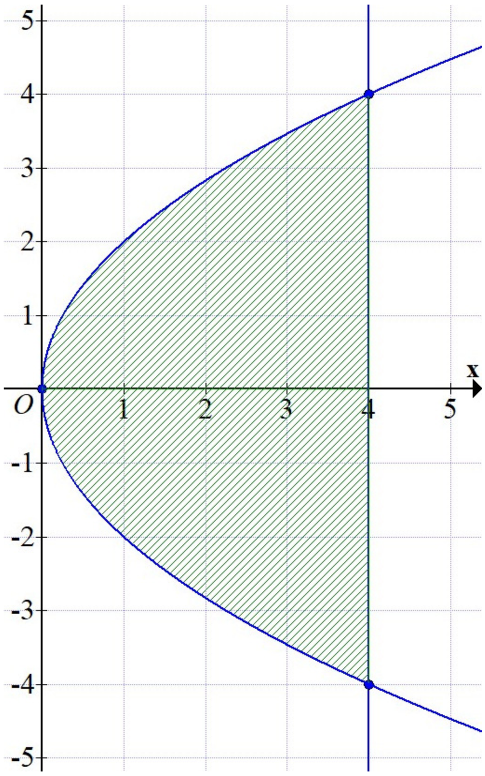
$$y = \frac{4}{x},$$

pa je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \int_1^4 \frac{4}{x} \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \left(4 \cdot \ln|x|\right)\Big|_1^4 = \\ &= 4 \cdot \underbrace{\ln|4|}_{=\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2 \cdot \ln 2} - 4 \cdot \underbrace{\ln|1|}_{=\ln 1 = 0} = \\ &= 4 \cdot 2 \cdot \ln 2 = \\ &= 8 \cdot \ln 2 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$

3. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y^2 = 4 \cdot x$ i $x = 4$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Nacrtajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 3.



Slika 3.

Ovaj zadatak možemo riješiti na dva načina. Prvi način je uočiti da je lik simetričan s obzirom na os apscisa, pa izračunati površinu gornje (ili donje) polovice lika, te traženu površinu dobiti množeći netom spomenutu površinu s 2. Konkretno, ako se opredijelimo za gornju polovicu, onda je tražena površina jednaka:

$$P = 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{4 \cdot x} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \cdot \int_0^4 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 4 \cdot \int_0^4 \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 4 \cdot \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$=4\cdot\left.\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot x^{\frac{1}{2}+1}\right)\right|_0^4=$$

$$=4\cdot\left.\left(\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^4=$$

$$=4\cdot\frac{2}{3}\cdot\left.\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^4=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\left(\underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{=8}-\underbrace{0^{\frac{3}{2}}}_{=0}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot 8=$$

$$=\frac{64}{3}\text{ kv. jed.}$$

Postoji i nešto jednostavniji način rješavanja ovoga zadatka. Naime, promotrit ćemo poziciju išrafiranoga lika s obzirom na os ordinata. Uočimo da se taj lik dobije kad se iz pravokutnika kojemu su vrhovi $(0,-4),(4,-4),(4,4)$ i $(0,4)$ izreže lik omeđen krivuljom $y^2=4\cdot x$, osi ordinata, te pravcima $y=-4$ i $y=4$. Tako dobivamo da je tražena površina jednaka:

$$P=4\cdot 8-\int_{-4}^{4}\frac{y^2}{4}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=32-2\cdot\int_{0}^{4}\frac{y^2}{4}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=32-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left.\left(\frac{1}{2+1}\cdot y^{2+1}\right)\right|_0^4=$$

$$=32-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(4^3-0^3)=$$

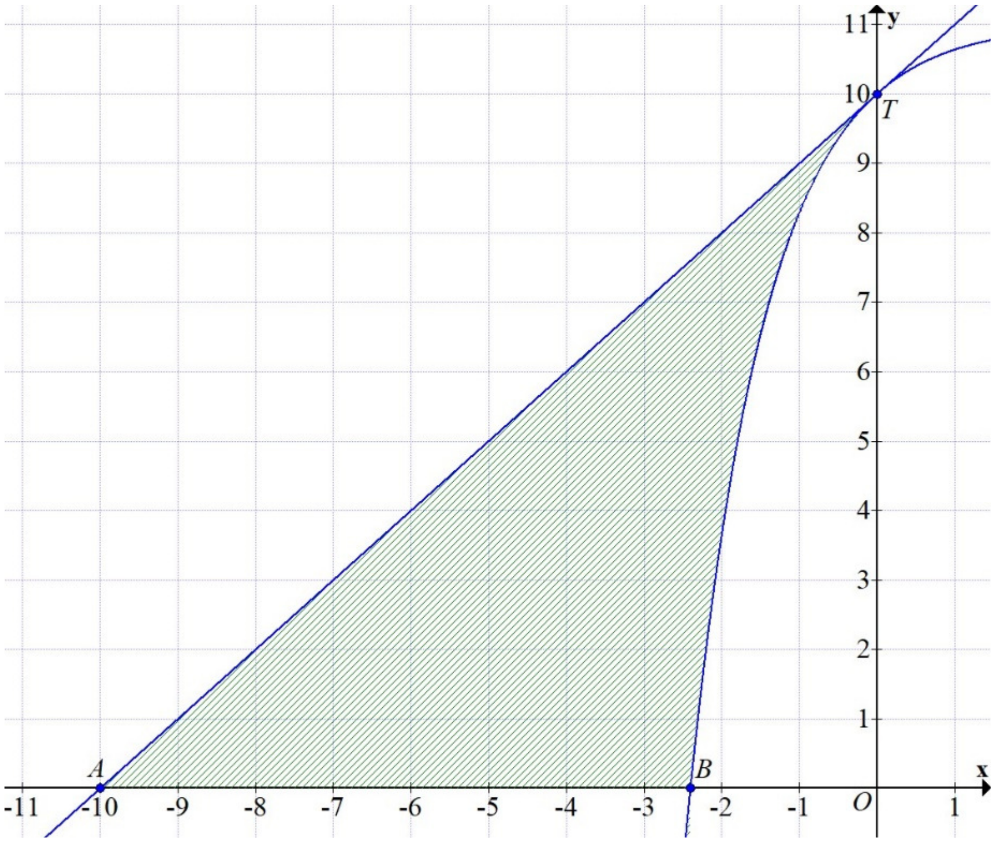
$$=32-\frac{1}{6}\cdot 64=$$

$$=32-\frac{1}{3}\cdot 32=$$

$$=\frac{64}{3}\text{ kv. jed.}$$

4. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os apscisa, krivulja $y = 11 - \mathrm{e}^{-x}$ i tangenta na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 10)$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Nacrtajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 4.



Slika 4.

Odredimo najprije koordinate točke T. Ona pripada krivulji, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} &10 = 11 - \mathrm{e}^{-x}, \\ &\mathrm{e}^{-x} = 1, \quad / \ln \\ &-x = \ln 1, \\ &-x = 0, \\ &x = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $T = (0,10)$.

Nadalje, odredimo jednadžbu tangente t. Njezin koeficijent smjera jednak je prvoj derivaciji izraza koji zadaje krivulju $y = 11 - \mathrm{e}^{-x}$ izračunatoj u točki $x = 0$. Tako lagano dobivamo:

$$\begin{aligned}
k &= \left(\left(11-\mathrm{e}^{-x}\right)'\right)_{x=0} = \\
&= \left(0-\mathrm{e}^{-x}\cdot(-x)'\right)_{x=0} = \\
&= \left(-\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1)\right)_{x=0} = \\
&= \left(\mathrm{e}^{-x}\right)_{x=0} = \\
&= \mathrm{e}^{-0} = \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pa jednadžba tangente zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$\begin{aligned}
&y-10 = 1\cdot(x-0),\\
&y = x+10,\\
&-x+y = 10,\\
&\frac{x}{-10}+\frac{y}{10} = 1.
\end{aligned}$$

Uz oznake sa slike 4., odatle slijedi $A=(-10,0)$.

Preostaje odrediti koordinate točke *B*. Uočimo da je ta točka sjecište krivulje $y=11-\mathrm{e}^{-x}$ s osi apscisa. To znači da je druga koordinata točke *B* jednaka nuli, pa odredimo prvu koordinatu te točke:

$$\begin{aligned}
&0 = 11-\mathrm{e}^{-x},\\
&\mathrm{e}^{-x} = 11, \quad /\ln\\
&-x = \ln 11,\\
&x = -\ln 11.
\end{aligned}$$

Dakle, $B=(-\ln 11,0)$.

Uočimo da se išrafirani ravninski lik dobije tako da se iz trokuta čiji su vrhovi *O*, *T* i *B* izreže lik kojega omeđuju os apscisa, os ordinata i krivulja $y=11-\mathrm{e}^{-x}$. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{10\cdot 10}{2}-\int_{-\ln 11}^{0}\left(11-\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= 50-\left(11\cdot x+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_{-\ln 11}^{0} = \\
&= 50-\left(\underbrace{11\cdot 0}_{=0}+\underbrace{\mathrm{e}^{-0}}_{=1}-\left(11\cdot(-\ln 11)+\underbrace{\mathrm{e}^{-(-\ln 11)}}_{=e^{\ln 11}=11}\right)\right) = \\
&= 50-(1+11\cdot\ln 11-11) = \\
&= 60-11\cdot\ln 11 \text{ kv. jed.}
\end{aligned}$$

5. Na krivulju $K\ldots\ y = 18 \cdot x - x^2$ povučene su tangente u sjecištima krivulje s osi apscisa. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga tim tangentama i krivuljom K. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo krivulju K i povučene tangente u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 5.

Slika 5.

Odredimo najprije sjecišta zadane krivulje s osi apscisa. U tu svrhu riješimo jednadžbu

$$18 \cdot x - x^2 = 0.$$

Njezina su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 18$. Dakle, spomenuta sjecišta su točke O i $S_1 = (18, 0)$.

Odredimo jednadžbe tangenata povučenih u točkama O i S_1. Prva derivacija izraza koji zadaje krivulju K je:

$$y' = 18 - 2 \cdot x.$$

Tako za točku O dobivamo:

$$\begin{aligned} k_1 &= y'(0) = \\ &= 18 - 2 \cdot 0 = \\ &= 18, \\ t \ldots\ y - 0 &= 18 \cdot (x - 0), \\ t \ldots\ y &= 18 \cdot x, \end{aligned}$$

dok za točku S_1 slijedi:

$$\begin{aligned}
k_2 &= y'(18) = \\
&= 18 - 2 \cdot 18 = \\
&= -18, \\
t \ldots\ & y - 0 = (-18) \cdot (x - 18), \\
t \ldots\ & y = (-18) \cdot x + 324.
\end{aligned}$$

Odredimo sjecišta dobivenih tangenata. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = 18 \cdot x, \\ y = -18 \cdot x + 324. \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Odatle slijedi

$$18 \cdot x = -18 \cdot x + 324,$$

odnosno $x = 9$. Sada se lako izračuna

$$y = 18 \cdot 9 = 162.$$

Dakle, sjecište tangenata je točka $S_2 = (9, 162)$.

Preostaje odrediti traženu površinu. Uočimo da se išrafirani ravninski lik dobije tako da se iz trokuta kojemu su vrhovi O, S_1 i S_2 izreže ravninski lik omeđen krivuljom K i osi apscisa. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{18 \cdot 162}{2} - \int_0^{18} \left(18 \cdot x - x^2\right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 1458 - \left.\left(18 \cdot \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} - \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1}\right)\right|_0^{18} = \\
&= 1458 - \left.\left(9 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3\right)\right|_0^{18} = \\
&= 1458 - \left(\left(\underbrace{9 \cdot 18^2}_{=2916} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 18^3}_{=1944}\right) - \left(\underbrace{9 \cdot 0^2}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 0^3}_{=0}\right)\right) = \\
&= 1458 - 2916 + 1944 = \\
&= 486 \text{ kv. jed.}
\end{aligned}$$

6. Pokažite da je površina kruga polumjera r jednaka $P = r^2 \cdot \pi$ kv. jed.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je krug omeđen središnjom kružnicom (tj. kružnicom sa središtem u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). To znači da je jednadžba pripadne kružnice $K \ldots x^2 + y^2 = r^2$. Budući da kružnica K **nije** graf nijedne realne funkcije jedne realne varijable, promotrimo njezinu četvrtinu koja se nalazi u prvom kvadrantu. Jednadžba te četvrtine je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, a ona se nalazi iznad segmenta $[0, r]$. Tako dobivamo:

$$P = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right) \Bigg|_0^r =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{r}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2}}_{=0} + \frac{r^2}{2} \cdot \underbrace{\arcsin\left(\frac{r}{r}\right)}_{=\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}} - \left(\underbrace{\frac{0}{2} \cdot \sqrt{r^2 - 0^2}}_{=0} + \frac{r^2}{2} \cdot \underbrace{\arcsin\left(\frac{0}{r}\right)}_{=\arcsin 0 = 0} \right) \right) =$$

$$= 4 \cdot \left(0 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - 0 \right) =$$

$$= r^2 \cdot \pi \text{ kv. jed.}$$

7. Neka su $a, b > 0$. Pokažite da je površina ravninskoga lika omeđenoga elipsom $b^2 x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ jednaka $P = a \cdot b \cdot \pi$ kv. jed.

Rješenje: Analogno kao i u rješenju prethodnoga zadatka, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je središte elipse u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Promotrimo onu njezinu četvrtinu koja se nalazi u prvom kvadrantu. Jednadžba te četvrtine je:

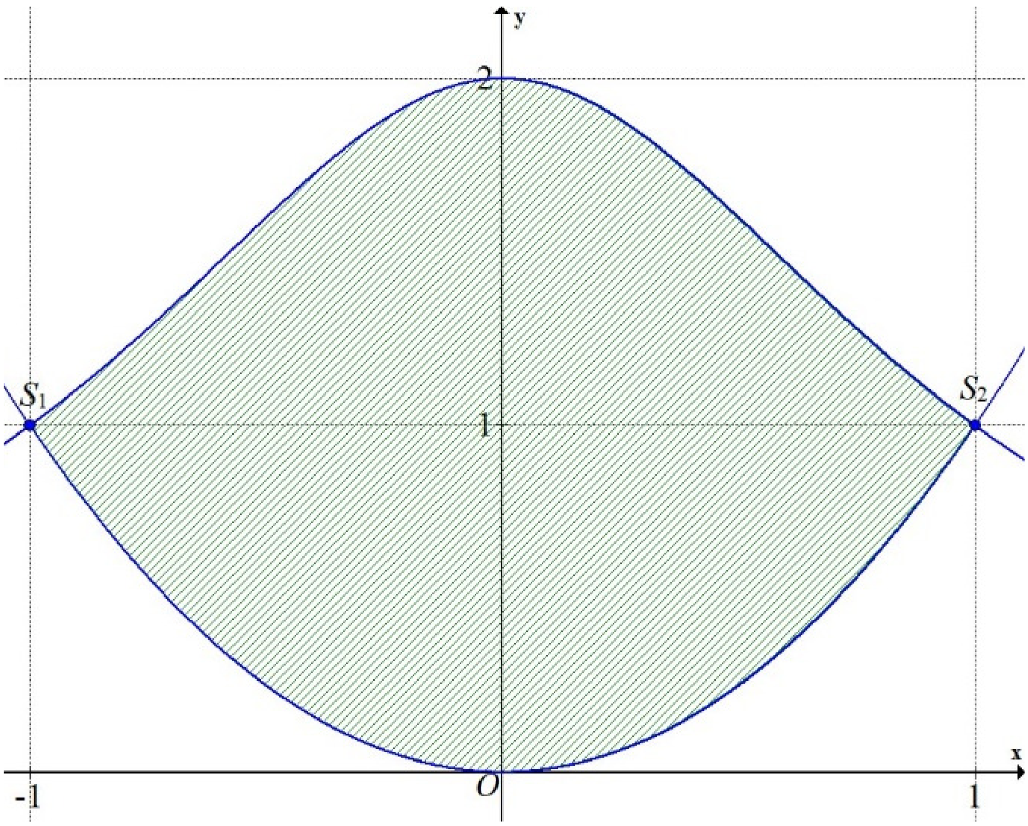
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2} = \\
&= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{b^2 \cdot \left(a^2 - x^2\right)} = \\
&= \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2},
\end{aligned}
$$

a ona se nalazi iznad segmenta $[0, a]$. Tako dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P &= 4 \cdot \int_0^r \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \Bigg|_0^a = \\
&= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - a^2}}_{=0} + \frac{a^2}{2} \cdot \underbrace{\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)}_{=\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}} - \left(\frac{0}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - 0^2}}_{=0} + \frac{a^2}{2} \cdot \underbrace{\arcsin\left(\frac{0}{a}\right)}_{=\arcsin 0 = 0} \right) \right) = \\
&= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(0 + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - 0 \right) = \\
&= a \cdot b \cdot \pi \text{ kv. jed.}
\end{aligned}
$$

8. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\ y = \dfrac{2}{x^2+1}$ i $K_2 \ldots\ y = x^2$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 6.



Slika 6.

Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x^2+1}, \\ y = x^2 \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Izjednačavanjem dobivamo jednadžbu

$$\frac{2}{x^2+1} = x^2,$$

odnosno bikvadratnu jednadžbu

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Zamjenom $t := x^2$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Budući da je $x^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, tražimo nenegativno rješenje dobivene kvadratne jednadžbe. Lako nalazimo da dobivena jednadžba ima jedinstveno nenegativno rješenje $t = 1$. Tako iz kvadratne jednadžbe $x^2 = 1$ slijedi $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

Primijetimo da vrijedi nejednakost:

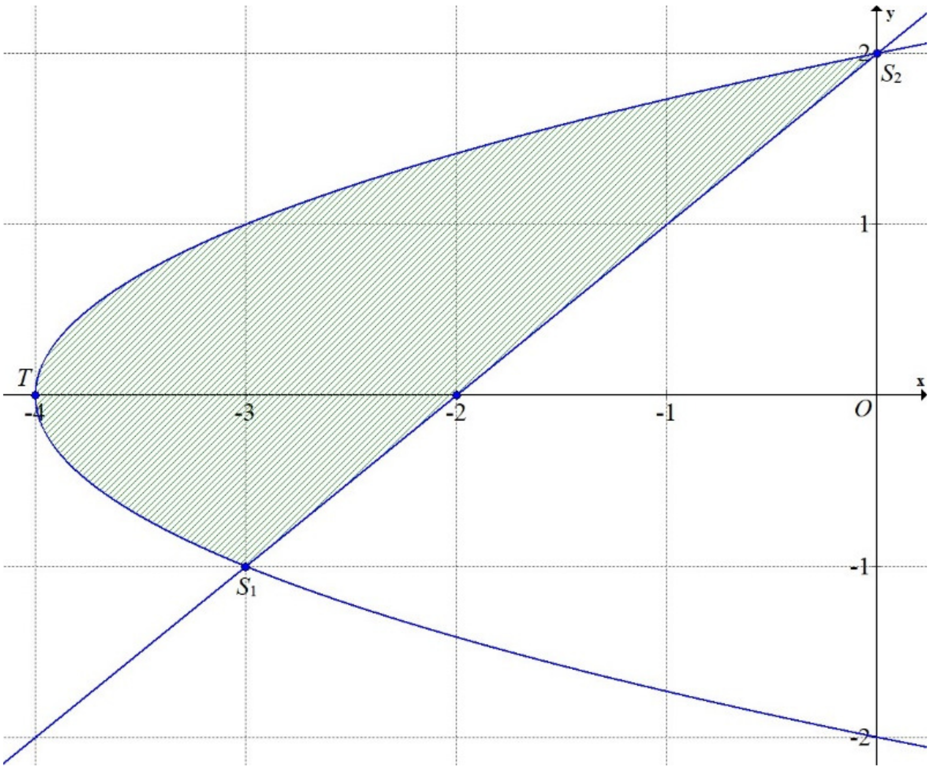
$$\frac{2}{x^2+1} \geq x^2,\ \forall x \in [-1, 1],$$

kao i da su funkcije na objema stranama te nejednakosti parne. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{x^2+1} - x^2 \right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{x^2+1} - x^2 \right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} \right) \Bigg|_0^1 = \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{=\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{1^3}_{=1} - \left(2 \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{0^3}_{=0} \right) \right) = \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - 0 - 0 \right) = \\
&= \pi - \frac{2}{3} \text{ kv. jed.}
\end{aligned}$$

9. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots\ y^2 = x + 4$ i $K_2 \ldots\ x - y + 2 = 0$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Krivulja K_1 je parabola čije je tjeme u točki $T = (-4, 0)$ i koja je simetrična s obzirom na os apscisa. Krivulja K_2 je pravac čija je jednadžba u eksplicitnom obliku $y = x + 2$. U skladu s tim, skicirajmo obje krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 7.



Slika 7.

Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y^2 = x + 4, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je $x = y - 2$, pa uvrštavanjem te jednakosti u prvu jednadžbu dobivamo:

$$y^2 = y - 2 + 4,$$
$$y^2 - y - 2 = 0.$$

Odatle je $y_1 = -1,\ y_2 = 2$. Sada lako izračunamo $x_1 = -3,\ x_2 = 0$, pa zaključujemo: $S_1 = (-3, -1),\ S_2 = (0, 2)$.

Lako vidimo da išrafirani ravninski lik možemo dobiti tako da iz ravninskoga lika omeđenoga krivuljama K_1, $y=-1$, $y=2$ i $x=0$ izrežemo trokut kojemu su vrhovi $S_1, (0,-1)$ i S_2. Površinu prvoga ravninskoga lika izračunat ćemo pomoću određenoga integrala po varijabli *y*. Pritom, međutim, moramo biti vrlo oprezni: taj lik se nalazi **ispod** osi ordinata jer vrijedi nejednakost:

$$y^2-4 \leq 0,\ \forall y \in [-1,2].$$

Zbog toga prilikom računanja površine moramo primijeniti apsolutnu vrijednost, odnosno jednakost

$$\left|y^2-4\right| = 4-y^2,\ \forall y \in [-1,2].$$

Tako dobivamo:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-1}^{2} \left|y^2-4\right| \cdot \mathrm{d}y - \frac{3\cdot 3}{2} = \\
&= \int_{-1}^{2} \left(4-y^2\right) \cdot \mathrm{d}y - \frac{9}{2} = \\
&= \left.\left(4\cdot y - \frac{1}{2+1}\cdot y^{2+1}\right)\right|_{-1}^{2} - \frac{9}{2} = \\
&= \left(\underbrace{4\cdot 2}_{=8} - \frac{1}{3}\cdot \underbrace{2^3}_{=8} - \left(\underbrace{4\cdot(-1)}_{=-4} - \underbrace{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3}_{=-\frac{1}{3}}\right)\right) - \frac{9}{2} = \\
&= 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{9}{2} = \\
&= \frac{9}{2} \text{ kv. jed.}
\end{aligned}$$

Primjedba 1. Zadatak je moguće riješiti i integriranjem po varijabli *x*. U tom je slučaju tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-4}^{-3} \left|-\sqrt{x+4}\right| \cdot \mathrm{d}x + \frac{1\cdot 1}{2} + \int_{-4}^{0} \sqrt{x+4} \cdot \mathrm{d}x - \frac{2\cdot 2}{2} = \\
&= \int_{-4}^{-3} \sqrt{x+4} \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{2} + \int_{-4}^{0} \sqrt{x+4} \cdot \mathrm{d}x - 2 = \\
&= \int_{-4}^{-3} (x+4)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}x + \int_{-4}^{0} (x+4)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}x - \frac{3}{2} =
\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x+4)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-4}^{-3}+\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x+4)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-4}^{0}-\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(1^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}+4^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot(1+8)-\frac{3}{2}=$$

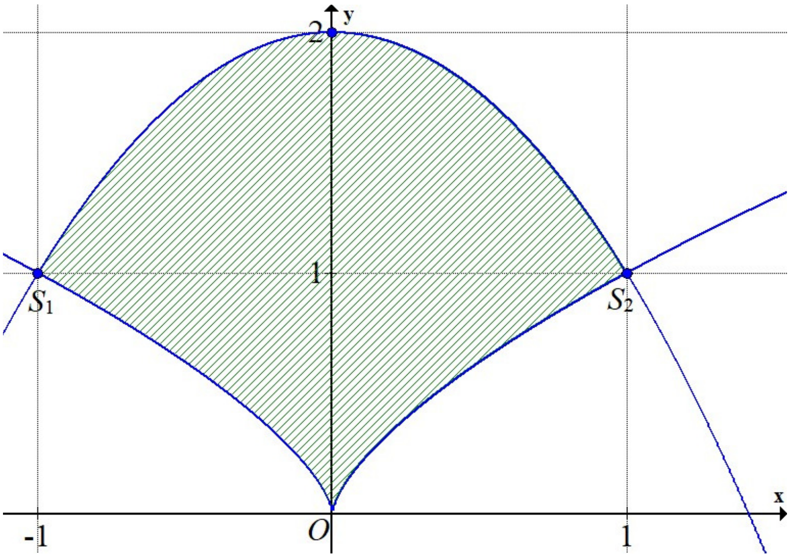
$$=6-\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{9}{2}\text{ kv. jed.}$$

Uvjerite se u ispravnost ovoga računa i objasnite svaki njegov korak.

10. Odredite površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots y^3 = x^2$ i $K_2 \ldots y = 2 - x^2$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 8.



Slika 8.

Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y^3 = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je $x^2 = 2 - y$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo kubnu jednadžbu

$$y^3 = 2 - y,$$

odnosno

$$y^3 + y - 2 = 0.$$

Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $y = 1$ u što se možemo uvjeriti ovako:

$$\begin{aligned} &y^3 + y - 2 = 0, \\ &\left(y^3 - 1\right) + (y - 1) = 0, \\ &(y - 1) \cdot \left(y^2 + y + 1\right) + (y - 1) = 0, \\ &(y - 1) \cdot \left(y^2 + y + 2\right) = 0. \end{aligned}$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$y^2 + y + 2 = 0$$

jednaka je

$$\begin{aligned} D &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= 1 - 8 = \\ &= -7 < 0, \end{aligned}$$

pa ta jednadžba nema realnih rješenja. Odatle slijedi tvrdnja.

Uvrštavanjem $y = 1$ u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$x^2 = 1,$$

a odatle je $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Dakle, sjecišta zadanih krivulja su točke

$$S_1 = (-1,1) \text{ i } S_2 = (1,1).$$

Preostaje primijetiti da vrijedi nejednakost

$$2 - x^2 \geq x^{\frac{2}{3}}, \ \forall x \in [-1,1],$$

te da su obje strane ove nejednakosti parne funkcije. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot \int_{0}^{1} \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot \left. \left(2 \cdot x - \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} - \frac{1}{\frac{2}{3}+1} \cdot x^{\frac{2}{3}+1} \right) \right|_0^1 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{1^3}_{=1} - \frac{3}{5} \cdot \underbrace{1^{\frac{5}{3}}}_{=1} - \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{0^3}_{=0} - \frac{3}{5} \cdot \underbrace{0^{\frac{5}{3}}}_{=0} \right) \right) = \\ &= 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} - 0 + 0 + 0 \right) = \\ &= \frac{32}{15} \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$