1.8.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

1.8.1. POJAM ODREĐENOGA INTEGRALA

- Pretpostavimo da je f realna funkcija *neprekidna* na segmentu $[a, b]$, te da smo taj segment točkama x_1, ..., x_{n-1} podijelili na ukupno n (ne nužno jednakih) dijelova.
- Stavimo li $x_0 = a$ i $x_n = b$, onda zbroj

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

- nazivamo *integralnim zbrojem* ili *integralnom sumom* funkcije f na segmentu $[a, b]$.
- S_n je zapravo zbroj površina pravokutnika kojima je duljina jednaka $x_{i+1} - x_i$, a širina $f\,(x_i)$.

1.8.1. POJAM ODREĐENOGA INTEGRALA

- Što je broj podjela segmenta $[a, b]$ veći, tj. što su diobene točke bliže jedna drugoj, integralni zbroj postaje sve bolja aproksimacija za *površinu* krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ i $y = 0$.
- Uz uvjet $n \to \infty$, tj. $\max(x_{i+1} - x_i) \to 0$, pripadnu graničnu vrijednost integralnoga zbroja S_n nazivamo *određenim integralom* funkcije f u granicama od $x = a$ do $x = b$. Pišemo:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x := \lim_{\max(x_{i+1} - x_i) \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

1.8.2. NEWTON-LEIBNIZOVA FORMULA

- Da bi se izbjeglo računanje površine krivocrtnih trapeza pomoću limesa integralnih suma, uspostavlja se sljedeća veza.
- **Teorem 1.** Pretpostavimo da je funkcija f *neprekidna* na segmentu $[a, b]$. Tada vrijedi jednakost:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- gdje je F *bilo koja* antiderivacija funkcije f.
- Gornja jednakost naziva se *Newton – Leibnizova formula* i predstavlja temeljnu vezu matematičke analize (grane matematike koja se bavi proučavanjem funkcija) i geometrije.

1.8.3. ALGORITAM ZA IZRAČUNAVANJE ODREĐENOGA INTEGRALA $\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$

- **Pretpostavka**: Podintegralna funkcija f je neprekidna na segmentu $[a, b]$.
- **Korak 1.** Odrediti neodređeni integral $\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$.
- **Korak 2.** Odabrati $C = 0$. Tako se dobije funkcija F koju nazivamo **standardna antiderivacija** funkcije f.
- **Korak 3.** Izračunati $F(b) - F(a)$.

1.8.4. OSNOVNA SVOJSTVA ODREĐENOGA INTEGRALA

- **Pretpostavke:** $a \leq b$, $c \in [a, b]$, $\check{C} \in \mathbb{R}$ konstanta.

$$1.)\ \int_a^b \check{C} \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = \check{C} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$2.)\ \int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$3.)\ \int_b^a f(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$4.)\ \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

1.8.5. SREDNJA VRIJEDNOST FUNKCIJE NA SEGMENTU

- Neka je f funkcija neprekidna na segmentu $[a,\ b]$.
- Tada se *prosječna* (srednja) *vrijednost* te funkcije na navedenom segmentu računa prema formuli:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

1.8.6. POVRŠINA RAVNINSKOGA LIKA

- Neka je f funkcija neprekidna na segmentu $[a,\ b]$.
- Tada je površina *krivocrtnoga trapeza* omeđenoga krivuljama $y = f\,(x)$, $y = 0$ (os apscisa), $x = a$ i $x = b$ jednaka

$$P = \int_a^b \left|f\,(x)\right| \cdot \mathrm{d}x$$

- Ako za svaki $x \in [a,\ b]$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq 0$, znak apsolutne vrijednosti smije se izostaviti.
- Općenitije, ako su f i g funkcije neprekidne na segmentu $[a,\ b]$ takve da za svaki $x \in [a,\ b]$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq g(x)$, onda je površina lika omeđenoga (samo) grafovima tih funkcija jednaka:

$$P = \int_a^b \left|f\,(x) - g(x)\right| \cdot \mathrm{d}x = \left|\int_a^b \left(f\,(x) - g(x)\right) \cdot \mathrm{d}x\right|$$

1.8.6. POVRŠINA RAVNINSKOGA LIKA

- Općenitije, ako su f i g funkcije neprekidne na segmentu $[a, b]$ i takve da vrijedi
  - $f(x) \geq g(x)$, za svaki $x \in [a, b]$,
- onda je površina lika omeđenoga (samo) grafovima tih funkcija jednaka:

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) \cdot \mathrm{d}x.$$

- **Napomena**: Može se pokazati da vrijedi jednakost:

$$\int_a^b |f(x)| \cdot \mathrm{d}x = \left| \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \right|.$$

1.8.7. NAPOMENA

- Površina ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $x = f(y)$, te pravcima $x = 0$ (os ordinata), $y = a$ i $y = b$ dana je izrazom:

$$P = \left| \int_a^b f(y) \cdot \mathrm{d}y \right|$$

- Površina lika kojega zatvaraju pravac $y = 0$ (os apscisa) i krivulja $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$, gdje je $t \in [a, b]$, dana je izrazom:

$$P = \int_a^b y \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b f_2(t) \cdot f_1'(t) \cdot \mathrm{d}t$$

- Pritom granice integracije treba odabrati tako da prirast $\mathrm{d}x$ bude nenegativan.

1.8.8. DULJINA LUKA KRIVULJE

- Neka je f funkcija neprekidno derivabilna na segmentu $[a,\ b]$.
- Tada je duljina luka grafa funkcije f između njegovih točaka s apscisama $x = a$ i $x = b$ jednaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \cdot \mathrm{d}x$$

1.8.9. VOLUMEN ROTACIJSKOGA TIJELA

- Ako krivocrtni trapez omeđen krivuljama $y = f(x)$ i pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$ rotira oko osi apscisa, volumen nastaloga rotacijskoga tijela računamo prema formuli:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x.$$

- Ako isti trapez rotira oko osi ordinata i ako su konstante a i b istoga predznaka, volumen nastaloga rotacijskoga tijela računa se prema formuli:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot \left|f(x)\right| \cdot \mathrm{d}x.$$