Srednja vrijednost funkcije definirane na segmentu

Podsjetnik: Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tada je **srednja vrijednost** te funkcije na zadanom segmentu jednaka

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\cdot\mathrm{d}x.$$

Zadatak 1. Neka su $A,\omega>0$ i $\varphi\in\langle-\pi,\pi]$ konstante. Odredite srednju vrijednost harmonijske funkcije $h(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ na njezinu temeljnu segmentu.

Rješenje: Iz Matematike 1. znamo da je temeljni segment zadane harmonijske funkcije $S=\left[-\frac{\varphi}{\omega},\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}\right]$. Zbog toga je tražena srednja vrijednost jednaka:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}-\left(-\frac{\varphi}{\omega}\right)}\cdot\int_{\frac{-\varphi}{\omega}}^{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}}A\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right)\cdot\mathrm{d}t.$$

Pokažimo da je navedeni izraz jednak nuli. Uvedimo zamjenu $x:=\omega\cdot t+\varphi$. Tada su $\mathrm{d}x=(\omega\cdot t+\varphi)'\cdot\mathrm{d}t=\omega\cdot\mathrm{d}t$, odnosno $\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\cdot\mathrm{d}x$. Pogledajmo u što se preslikaju granice segmenta integracije:

$$-\frac{\varphi}{\omega}\mapsto\omega\cdot\left(-\frac{\varphi}{\omega}\right)+\varphi=-\varphi+\varphi=0,$$
$$\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}\mapsto\omega\cdot\left(\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}\right)+\varphi=2\cdot\pi-\varphi+\varphi=2\cdot\pi.$$

Tako dobivamo:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}-\left(-\frac{\varphi}{\omega}\right)}\cdot\int_0^{2\cdot\pi}A\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{2\cdot\pi-\varphi}{\omega}+\frac{\varphi}{\omega}}\cdot\frac{A}{\omega}\cdot\int_0^{2\cdot\pi}\sin x\cdot\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{\omega}{2\cdot\pi}\cdot\frac{A}{\omega}\cdot(-\cos x)\Big|_0^{2\cdot\pi}=\frac{A}{2\cdot\pi}\cdot(-\underbrace{\cos(2\cdot\pi)}_{=1}-(-\underbrace{\cos 0}_{=1}))=\frac{A}{2\cdot\pi}\cdot(-1+1)=\frac{A}{2\cdot\pi}\cdot 0=0.$$

Zadatak 2. Odredite srednju vrijednost funkcije $f(x) = \arccos x$ na njezinoj prirodnoj domeni.

Rješenje: Prirodna domena funkcije f je segment [-1, 1]. Zbog toga je tražena srednja vrijednost jednaka:

$$\overline{f} = \frac{1}{1-(-1)} \cdot \int_{-1}^{1} \arccos x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \arccos x \cdot \mathrm{d}x$$

Ovaj integral najbrže se odredi metodom djelomične (parcijalne) integracije. Imamo redom:

$$\left| \begin{array}{ll} u = \arccos x & v = \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x \\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{array} \right|,$$

pa slijedi:

$$\overline{f} = \frac{1}{2} \cdot \left((x \cdot \arccos x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \underbrace{\arccos 1}_{=0} - (-1) \cdot \underbrace{\arccos(-1)}_{=\pi} + \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(0 + \pi + \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\pi + \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x \right).$$

Preostaje odrediti integral $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x$. Neka je $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Tada vrijedi jednakost:

$$f_1(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -f_1(x),$$

pa zaključujemo da je funkcija f_1 neparna. Na predavanju smo dokazali da je integral *bilo koje* neparne funkcije integrabilne na segmentu simetričnom s obzirom na nulu, tj. na segmentu oblika [-a, a] jednak nuli. Dakle,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x = 0,$$

pa je konačno:

$$\overline{f} = \frac{1}{2} \cdot (\pi + 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Primjedba 1. Funkcija f_1 iz rješenja prethodnoga zadatka nije definirana u svakoj od dviju granica segmenta integracije (-1 i 1). Zbog toga bi integral $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x$ korektno trebalo odrediti kao tzv. *nepravi integral*. Kad se to napravi, dobije se jednak rezultat. (Metode određivanja nepravih integrala upoznat ćemo u točki 1.9.).

Primjedba 2. „Komplikacija“ s pojavom nepravoga integrala, zabilježena u Primjedbi 1., može se (prividno) izbjeći ako se najprije odredi standardna antiderivacija funkcije *f*. U tom slučaju imamo:

$$I = \int \arccos x \cdot \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \arccos x & v = \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x \\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= x \cdot \arccos x + \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{d}x}_{=:I_1}.$$

$$I_1 = \left\{ \begin{matrix} \text{zamjena:} \\ t := 1 - x^2, \\ \mathrm{d}t = -2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x, \\ x \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t \end{matrix} \right\} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}t = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot t^{-\frac{1}{2}+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow I = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

Koristeći Newton-Leibnizovu formulu sada lagano dobijemo:

$$\overline{f} = \frac{1}{2} \cdot (F(1) - F(-1)) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \underbrace{\arccos 1}_{=0} - \underbrace{\sqrt{1-1^2}}_{=\sqrt{1-1}=0} - \left((-1) \cdot \underbrace{\arccos(-1)}_{=\pi} - \underbrace{\sqrt{1-(-1)^2}}_{=\sqrt{1-1}=0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (0 - 0 - (-\pi - 0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Razlog zbog kojega se zapravo pojavljuje problem s nepravim integralom jest nepostojanje (obostrane) derivacije funkcije $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ u rubovima njezine prirodne domene, tj. u točkama $c \in \{-1, 1\}$. To zapravo znači da vrijedi relacija:

$$\left(x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}\right)' = \arccos x,\ \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Međutim, prema Newton-Leibnizovoj formuli treba odrediti vrijednosti u granicama segmenta integracije (tj. u -1 i 1), pa je zbog toga određivanje nepravoga integrala spomenuto u Primjedbi 1. matematički korektniji način rješavanja ovoga zadatka.

Zadatak 3. Izračunajte srednju vrijednost realne funkcije $g(x) = 8\cdot\sqrt{3\cdot x - x^2}$ na njezinoj prirodnoj domeni.

Rješenje: Odredimo najprije prirodnu domenu zadane funkcije. Izraz pod drugim korijenom treba biti nenegativan, pa je jedini uvjet:

$$3\cdot x - x^2 \geq 0.$$

Rješavanjem te kvadratne nejednadžbe (učinite to sami) dobivamo $x \in [0,3]$. Dakle, $D(g) = [0,3]$.

Tako zaključujemo da je tražena srednja vrijednost jednaka:

$$\overline{f} = \frac{1}{3-0}\cdot\int_0^3 8\cdot\sqrt{3\cdot x - x^2}\cdot \mathrm{d}x = \frac{8}{3}\cdot\int_0^3 \sqrt{3\cdot x - x^2}\cdot\mathrm{d}x.$$

Određivanje integrala iracionalnih funkcija upoznali smo u točki 1.6. Tako imamo redom:

$$3\cdot x - x^2 = (-1)\cdot\left(x^2 - 3\cdot x\right) = (-1)\cdot\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = (-1)\cdot\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Uvedimo zamjenu $t := x - \frac{3}{2}.$ Tada je $\mathrm{d}t = \left(x - \frac{3}{2}\right)'\cdot\mathrm{d}x = 1\cdot\mathrm{d}x = \mathrm{d}x.$ Pogledajmo u što se preslikaju granice segmenta integracije:

$$0 \mapsto 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2},$$
$$3 \mapsto 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Zbog toga je:

$$\overline{f} = \frac{8}{3}\cdot\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\cdot\mathrm{d}t = (\text{jer je podintegralna funkcija parna}) = \frac{8}{3}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\cdot\mathrm{d}t = \frac{16}{3}\cdot\left.\left(\frac{t}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}-t^2} + \frac{\frac{9}{4}}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{t}{\frac{3}{2}}\right)\right)\right|_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}_{=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}=0} + \frac{9}{8}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)}_{=\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}} - \left(\underbrace{\frac{0}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}-0^2}}_{=0\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}=0} + \frac{9}{8}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\frac{0}{\frac{3}{2}}\right)}_{=\arcsin 0 = 0}\right)\right) = \frac{16}{3}\cdot\left(0 + \frac{9}{8}\cdot\frac{\pi}{2} - (0+0)\right) = \frac{16}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\cdot\pi.$$

Primjedba 3. Na predavanju smo dokazali:
Ako je f parna funkcija integrabilna na segmentu oblika [-a, a], onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Funkcija $g_1(t)=\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}$ je parna jer vrijedi jednakost:

$$g_1(-t)=\sqrt{\frac{9}{4}-(-t)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}=g_1(t).$$

Zadatak 4. Izračunajte srednju vrijednost funkcije $f(t)=3\cdot\pi\cdot\sin^3 t$ na segmentu $[0,\ \pi]$.

Rješenje: Tražena srednja vrijednost je jednaka:

$$\overline{g_{[0,\ \pi]}}=\frac{1}{\pi-0}\cdot\int_0^{\pi}3\cdot\pi\cdot\sin^3 t\cdot \mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\cdot 3\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3 t\cdot \mathrm{d}t=3\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\sin t\cdot \mathrm{d}t=3\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\cdot\sin t\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x:=\cos t,\\ \mathrm{d}x=-\sin t\cdot \mathrm{d}t\Rightarrow\sin t\cdot \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\\ 0\to\cos 0=1,\\ \pi\to\cos\pi=-1\end{array}\right\}=3\cdot\int_1^{-1}(1-x^2)\cdot(-\mathrm{d}x)=3\cdot(-1)\cdot\int_1^{-1}(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=3\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x=3\cdot 2\cdot\int_0^1(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x=6\cdot\left(x-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)\Big|_0^1=6\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot 1-\left(0-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right)=6\cdot\left(1-\frac{1}{3}+0-0\right)=6\cdot\frac{2}{3}=4.$$

Primjedba 4. Prisjetimo se da vrijedi svojstvo: $\int_b^a f(x)\cdot \mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x$, tj. da zamjena redoslijeda granica segmenta integracije mijenja predznak određenoga integrala. Zbog toga u gornjem računu koristimo jednakost:

$$3\cdot(-1)\cdot\int_1^{-1}(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x=3\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot \mathrm{d}x.$$

Primjedba 5. Funkcija $f_1(t)=1-t^2$ je parna jer vrijedi jednakost:

$$f_1(-t)=1-(-t)^2=1-t^2=f_1(t).$$

Zbog toga smijemo primijeniti svojstvo integrala parne funkcije na segmentu oblika [-a, a] citirano u Primjedbi 3.

Zadatak 5. Izračunajte srednju vrijednost funkcije $g(x)=\lfloor x \rfloor$ na segmentu $[-2\cdot\pi,\ 2\cdot\pi]$. (S $\lfloor x \rfloor$ je označen najveći cijeli broj jednak ili manji od *x*.)

Rješenje: U ovom zadatku primijenit ćemo jedno od osnovnih svojstava određenoga integrala:

$$\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\cdot \mathrm{d}x,\ \forall c\in[a,b].$$

Osnovna ideja je uočiti da, ako je $k\in\mathbb{Z}$, onda je $g(x)=k,\ \forall x\in[k,k+1\rangle$. Naime, za svaki broj $x\in[k,k+1\rangle$ najveći cijeli broj koji je jednak ili manji od *x* je upravo *k*. (Grubo i neprecizno rečeno, zaokružujemo *x* „naniže“.) Zbog toga ćemo segment integracije $[-2\cdot\pi,2\cdot\pi]$ napisati kao konačnu uniju skupova

$$[-2\cdot\pi,2\cdot\pi]=[-2\cdot\pi,-6\rangle\cup[-6,-5\rangle\cup\ldots\cup[5,6\rangle\cup[6,2\cdot\pi]=[-2\cdot\pi,-6\rangle\cup\left(\bigcup_{k=-6}^{5}[k,k+1\rangle\right)\cup[6,2\cdot\pi],$$

pa uočiti da je:

$$g(x)=\begin{cases}-7,\ \text{za } \forall x\in[-2\cdot\pi,-6\rangle,\\ k,\ \text{za } \forall x\in[k,k+1\rangle,\ \text{pri čemu je } k\in\{-6,-5,\ldots,4,5\},\\ 6,\ \text{za } \forall x\in[6,2\cdot\pi].\end{cases}$$

Koristeći gore navedeno svojstvo određenoga integrala dobivamo:

$$\overline{g}=\frac{1}{2\cdot\pi-(-2\cdot\pi)}\cdot\int_{-2\cdot\pi}^{2\cdot\pi}\lfloor x\rfloor\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-2\cdot\pi}^{-6}\lfloor x\rfloor\cdot \mathrm{d}x+\sum_{k=-6}^{5}\int_{k}^{k+1}\lfloor x\rfloor\cdot \mathrm{d}x+\int_{6}^{2\cdot\pi}\lfloor x\rfloor\cdot \mathrm{d}x\right)=$$
$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-2\cdot\pi}^{-6}-7\cdot \mathrm{d}x+\sum_{k=-6}^{5}\int_{k}^{k+1}k\cdot \mathrm{d}x+\int_{6}^{2\cdot\pi}6\cdot \mathrm{d}x\right)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left((-7)\cdot\int_{-2\cdot\pi}^{-6}1\cdot \mathrm{d}x+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot\int_{k}^{k+1}1\cdot \mathrm{d}x+6\cdot\int_{6}^{2\cdot\pi}1\cdot \mathrm{d}x\right)=$$
$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left((-7)\cdot(-6+2\cdot\pi)+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot(x)\Big|_k^{k+1}+6\cdot(2\cdot\pi-6)\right)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(42-14\cdot\pi+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot(k+1-k)+12\cdot\pi-36\right)$$
$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(6-2\cdot\pi+\sum_{k=-6}^{5}k\cdot 1\right)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left(6-2\cdot\pi+\frac{12}{2}\cdot(-6+5)\right)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot(6-2\cdot\pi-6)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot(-2\cdot\pi)=-\frac{1}{2}.$$

Primjedba 6. U rješenju gornjega zadatka iskoristili smo jednakost:

$$\sum_{k=-6}^{5}k=-6+(-5)+(-4)+\ldots+3+4+5=\frac{12}{2}\cdot(-6+5)=-6.$$

Naime, navedeni brojevi u danom poretku očito tvore aritmetički niz. Ima ih ukupno 12. Prvi član niza je –6, a posljednji 5, pa je zbroj svih navedenih brojeva jednak –6.

Zadatak 6. Brzina prirasta populacije zmajeva na životinjskoj farmi dr. Orwella dana je izrazom $v(t) = 20 + 50 \cdot \ln(t+2)$, gdje je t vrijeme iskazano u godinama. Procijenite prosječan godišnji prirast promatrane populacije između 2. i 4. godine.

Rješenje: Traženi prirast jednak je srednjoj vrijednosti funkcije v na segmentu [2, 4]. Tako redom imamo:

$$\bar{v} = \frac{1}{4-2} \cdot \int_2^4 (20 + 50 \cdot \ln(t+2)) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int_2^4 (20 + 50 \cdot \ln(t+2)) \cdot \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ x := t+2, \\ \mathrm{d}x = (t+2)' \cdot \mathrm{d}t = 1 \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}t \\ 2 \mapsto 2+2 = 4, \\ 4 \mapsto 4+2 = 6 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_4^6 (20 + 50 \cdot \ln x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (20 \cdot x + 50 \cdot (x \cdot \ln x - x))\Big|_4^6 = \frac{1}{2} \cdot (20 \cdot x + 50 \cdot x \cdot \ln x - 50 \cdot x)\Big|_4^6 =$$

$$= (25 \cdot x \cdot \ln x - 15 \cdot x)\Big|_4^6 = 25 \cdot 6 \cdot \ln 6 - 15 \cdot 6 - (25 \cdot 4 \cdot \ln 4 - 15 \cdot 4) = 150 \cdot \ln 6 - 90 - 100 \cdot \ln 4 + 60 =$$

$$= 150 \cdot \ln 6 - 100 \cdot \ln 4 - 30 \approx 100.13 \approx 100 \text{ zmajeva/god.}$$

Srednja vrijednost funkcije definirane na segmentu – domaća zadaća

1. Neka su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ konstante. Odredite srednju vrijednost funkcije $h(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ na segmentu $\left[\frac{\pi - 2\cdot\varphi}{2\cdot\omega}, \frac{5\cdot\pi - 2\cdot\varphi}{2\cdot\omega} \right]$.

2. Odredite srednju vrijednost funkcije $g(u) = \operatorname{arctg} u$ na segmentu $[0,1]$

3. Odredite srednju vrijednost funkcije $f(x) = 8 \cdot \sqrt{2 - x - x^2}$ na njezinoj prirodnoj domeni.

4. Odredite srednju vrijednost funkcije $g(t) = 2 \cdot \lceil t \rceil$ na segmentu $[-2\cdot\pi, 2\cdot\pi]$. (S $\lceil t \rceil$ je označen najmanji cijeli broj jednak ili veći od t.)

5. Odredite srednju vrijednost funkcije $f(x) = 3\cdot\pi\cdot\cos^3 x$ na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Brzina prirasta populacije čudnovatih kljunaša na životinjskoj farmi dr. Orwella dana je izrazom $v(t) = \frac{200 \cdot \ln t}{t^2}$, gdje je t vrijeme u godinama. Procijenite prosječan godišnji prirodni prirast te populacije između 2. i 4. godine.

Upute i rezultati zadataka za domaću zadaću

1. 0.

2. *Uputa*: U određivanju integrala najprije primijenite metodu djelomične integracije u obliku $\left| \begin{array}{ll} x = \operatorname{arctg} u & v = u \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+u^2} \cdot \mathrm{d}u & \mathrm{d}v = \mathrm{d}u \end{array} \right|$, a potom zamjenu $t := 1 + u^2$.

Rješenje: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2$.

3. $3 \cdot \pi$.

4. *Uputa i rješenje*: Uočite da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi jednakost:

$$g(t) = 2 \cdot (k+1),\ \forall t \in \langle k, k+1].$$

Zbog toga je tražena srednja vrijednost jednaka:

$$\overline{g} = \frac{1}{4\cdot\pi}\left(\int_{-2\cdot\pi}^{-6} 2\cdot(-6)\cdot \mathrm{d}t + \sum_{k=-6}^{5}\int_{k}^{k+1} 2\cdot(k+1)\cdot \mathrm{d}t + \int_{6}^{2\cdot\pi} 2\cdot 7\cdot \mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-2\cdot\pi}^{-6} (-6)\cdot \mathrm{d}t + \sum_{k=-6}^{5}(k+1)\cdot 1 + \int_{6}^{2\cdot\pi} 7\cdot \mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left((-6)\cdot(2\cdot\pi-6) + \frac{12}{2}\cdot(-5+6) + 7\cdot(2\cdot\pi-6)\right) = 1.$$

5. 4.

6. *Uputa*: Primijenite metodu djelomične integracije u obliku $\left| \begin{matrix} u = \ln x & v = -\dfrac{1}{x} \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix} \right|$.

Rješenje: 25 čudnovatih kljunaša/godina.

Duljina luka krivulje iznad segmenta

Podsjetnik: Neka je f funkcija neprekidna na segmentu $[a,\ b]$. Tada je **duljina lûka grafa funkcije** f **između točaka** $(a,\ f(a))$ **i** $(b,\ f(b))$, odnosno **iznad segmenta** $[a,\ b]$, dana izrazom:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot \mathrm{d}x.$$

Zadatak 1. Izračunajte duljinu luka lančanice $y=\operatorname{ch} x$ iznad segmenta [0, ln 5].

Rješenje: U ovome je zadatku $f(x)=\operatorname{ch} x$. Pojednostavnimo najprije podintegralnu funkciju ovako:

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left((\operatorname{ch} x)'\right)^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{ch} x.$$

Koristeći identitete

$$\left.\begin{aligned} e^{\ln x}&=x,\\ e^{-\ln x}&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\},\ \forall x>0,$$

i definicijsku formulu funkcije sh, dobivamo da je tražena duljina jednaka:

$$l=\int_0^{\ln 5}\operatorname{ch} x\cdot \mathrm{d}x=(\operatorname{sh} x)\Big|_0^{\ln 5}=\operatorname{sh}(\ln 5)-\underbrace{\operatorname{sh} 0}_{=0}=\frac{e^{\ln 5}-e^{-\ln 5}}{2}=\frac{5-5^{-1}}{2}=\frac{12}{5}.$$

Zadatak 2. Izračunajte duljinu luka parabole $y=x^2-2\cdot x$ između njezinih sjecišta s osi apscisa.

Rješenje: Sjecišta zadane parabole s osi apscisa dobijemo rješavanjem jednadžbe $x^2-2\cdot x=0.$ Odatle je $x_1=0,\ x_2=2.$ Dakle, tražimo duljinu luka zadane parabole između točaka (0, 0) i (2, 0).

U ovome je zadatku $f(x)=x^2-2\cdot x$. Dodatno ćemo koristiti i tvrdnje:

1.) Funkcija $g(x)=\sqrt{1+x^2}$ je parna funkcija (jer je $g(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=g(x)$).

2.) Za integral **parne** funkcije g_1 na segmentu $[-a,\ a]$ vrijedi $\int_{-a}^{a} g_1(x)\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\int_0^a g_1(x)\cdot \mathrm{d}x$.

Tako dobivamo redom:

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\left(\left(x^2-2\cdot x\right)'\right)^2}=\int_0^2\sqrt{1+\left(2\cdot x-2\right)^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=2\cdot x-2\\ \mathrm{d}t=(2\cdot x-2)'\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{d}t,\\ 0\mapsto 2\cdot 0-2=-2,\\ 2\mapsto 2\cdot 2-2=2\end{array}\right\}=\int_{-2}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int_0^2\sqrt{1+t^2}\cdot\mathrm{d}t=\int_0^2\sqrt{1+t^2}\cdot\mathrm{d}t=\left(\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{2}{2}\cdot\sqrt{1+2^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(2+\sqrt{1+2^2}\right)-\left(\underbrace{\frac{0}{2}\cdot\sqrt{1+0^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\underbrace{0+\sqrt{1+0^2}}_{=1}\right)}_{=\ln 1=0}\right)=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Arsh}(2).$$

Zadatak 3. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=\frac{2}{3}\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x-1}$ iznad segmenta [1, 4].

Rješenje: U ovome je zadatku $f(x)=\frac{2}{3}\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x-1}=\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}$. Najprije pojednostavnimo podintegralnu funkciju:

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\left(\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(x-1)'\right)^2}=\sqrt{1+\left((x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 1\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+(x-1)}=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}.$$

Zbog toga je tražena duljina jednaka:

$$l=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot x^{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4=\frac{2}{3}\cdot\left(\underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{=8}-\underbrace{1^{\frac{3}{2}}}_{=1}\right)=\frac{2}{3}\cdot 7=\frac{14}{3}\text{ jed. duljine.}$$

Zadatak 4. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=2\cdot\left(\sqrt{e^x-1}-\mathrm{arctg}\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right)$ iznad segmenta $\left[0,2\cdot\ln 2\right]$.

Rješenje: U ovome je zadatku $f(x)=2\cdot\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right)$. Analogno kao u prethodnom zadatku, najprije pojednostavnimo podintegralnu funkciju. Koristeći tablicu osnovnih derivacija i pravilo za deriviranje složenih funkcija imamo redom:

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\left(2\cdot\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right)\right)'\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+2^2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\cdot\left(e^x-1\right)'-\frac{1}{1+\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{e^x-1}\right)'\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}-\frac{1}{1+(e^x-1)}\cdot\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}-\frac{1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2}=\sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+4\cdot\left(\frac{e^x-1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\right)^2}=\sqrt{1+4\cdot\frac{\left(e^x-1\right)^2}{4\cdot\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}}=\sqrt{1+\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x-1}}=\sqrt{1+\left(e^x-1\right)}=\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}.$$

Zbog toga je tražena duljina luka jednaka:

$$l=\int_0^{2\cdot\ln 2}e^{\frac{x}{2}}\cdot\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=\dfrac{x}{2},\\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}x=2\cdot\mathrm{d}t,\\ 0\mapsto\dfrac{0}{2}=0,\\ 2\cdot\ln 2\mapsto\dfrac{2\cdot\ln 2}{2}=\ln 2\end{array}\right\}=\int_0^{\ln 2}e^t\cdot 2\cdot\mathrm{d}t=2\cdot\int_0^{\ln 2}e^t\cdot\mathrm{d}t=2\cdot\left(e^t\right)\Big|_0^{\ln 2}=2\cdot\left(\underbrace{e^{\ln 2}}_{=2}-\underbrace{e^0}_{=1}\right)=2\text{ jed. duljine.}$$

Zadatak 5. Izračunajte duljinu luka krivulje $y^2=4\cdot x$ od njezina tjemena do točke $T=(1,y>0)$.

1. rješenje: Riječ je o paraboli čije se tjeme nalazi u ishodištu O pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. S obzirom da je druga koordinata točke T strogo pozitivna, zapravo tražimo duljinu luka krivulje $y=\sqrt{4\cdot x}$ između točaka O i T.

Tako dobivamo:

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{4\cdot x}\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(2\cdot\sqrt{x}\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+\left(2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\cdot\mathrm{d}x$$

Uočavamo da podintegralna funkcija nije definirana u nuli. Zbog toga bismo prilikom rješavanja morali primijeniti neprave integrale. Umjesto njih, odredit ćemo standardnu antiderivaciju podintegralne funkcije, pa potom primijeniti Newton-Leibnizovu formulu. Ovakav oblik integrala već smo sreli kod integriranja iracionalnih funkcija u točki 1.6., pa ćemo postupiti analogno kao i u toj točki.

Budući da vrijedi identitet

$$x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

uvodimo zamjenu:

$$t:=x+\frac{1}{2},$$
$$x=t-\frac{1}{2},$$
$$\mathrm{d}x=\left(t-\frac{1}{2}\right)'\cdot\mathrm{d}t=1\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{d}t,$$
$$0\mapsto 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$1\mapsto 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Tako dobivamo:

$$l=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)+1}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}\cdot\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}\cdot\mathrm{d}t=\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{t}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}\cdot\mathrm{d}t}_{:=I_1}+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}\cdot\mathrm{d}t}_{=:I_2}.$$

Integral I_1 odredimo zamjenom $u:=t^2-\frac{1}{4}$. Tada je $\mathrm{d}u:=2\cdot t\cdot\mathrm{d}t\Rightarrow t\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{d}u.$

Pogledajmo u što se preslikaju granice segmenta integracije:

$$\frac{1}{2} \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{3}{2} \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2.$$

Zbog toga je:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{u}} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 u^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot u^{-\frac{1}{2}+1} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot u^{\frac{1}{2}} \right)\Bigg|_0^2 = \left(u^{\frac{1}{2}} \right)\Bigg|_0^2 = 2^{\frac{1}{2}} - 0^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Integral I_2 odredimo izravnim integriranjem primjenjujući osnovna svojstva logaritama:

$$I_2 = \left(\ln\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \right) \right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right) - \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right) = \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) - \ln\left(\frac{1}{2} \right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \ln\left(3 + 2 \cdot \sqrt{2} \right) = \ln\left(\left(\sqrt{2} + 1 \right)^2 \right) = 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2} + 1 \right).$$

Tako konačno dobivamo:

$$l = I_1 + \frac{1}{2} \cdot I_2 = \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1 \right) \text{ jed. duljine.}$$

2. rješenje: Zadatak postaje bitno jednostavniji za rješavanje ako traženu duljinu računamo promatrajući krivulju kao *graf funkcije čija je varijabla y* (a ne *x*). Ta funkcija u ovom slučaju glasi:

$$f(y) = \frac{y^2}{4}.$$

(Jednostavno izrazimo x pomoću y u jednadžbi krivulje.) Donja granica segmenta integracije ponovno je 0, dok je gornja granica toga segmenta jednaka y_T. Zbog toga najprije odredimo y_T.

Iz jednadžbe $y_T^2 = 4 \cdot 1$ i uvjeta $y_T > 0$ lagano slijedi $y_T = 2$.

Tako sada redom imamo:

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\left(\frac{y^2}{4}\right)'\right)^2} \cdot dy = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot y}{4}\right)^2} \cdot dy = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \cdot dy = \left\{\begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := \dfrac{y}{2}, \\ dt = \dfrac{1}{2} \cdot dy \Rightarrow dy = 2 \cdot dt, \\ 0 \mapsto \dfrac{0}{2} = 0, \\ 2 \mapsto \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+t^2} \cdot 2 \cdot dt = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+t^2} \cdot dt = 2 \cdot \left(\frac{t}{2} \cdot \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 = 1 \cdot \underbrace{\sqrt{1+1^2}}_{=\sqrt{2}} + \ln\left(1 + \underbrace{\sqrt{1+1^2}}_{=\sqrt{2}}\right) - \left(\underbrace{0 \cdot \sqrt{0+0^2}}_{=0} + \underbrace{\ln\left(0 + \underbrace{\sqrt{1+0^2}}_{=1}\right)}_{=\ln 1 = 0}\right) =$$

$$= \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - (0+0) = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ jed. duljine.}$$

Primjedba 1. Uočimo da smo u prethodnom zadatku dvjema bitno različitim metodama dobili iste konačne rezultate. To je posljedica činjenica da je određeni integral *realan broj* i da međusobno različite funkcije u različitim točkama mogu dati iste vrijednosti. Da smo, umjesto određenoga integrala, određivali standardne antiderivacije ili neodređene integrale, konačna rješenja zadataka bi, dakako, bila potpuno različita.

Primjedba 2. Uočimo dodatnu prednost računanja *određenoga* integrala. U postupku toga računanja metodu zamjene (supstitucije) možemo primijeniti i više puta, a da pritom ne moramo pamtiti što smo čime zamijenili. To je posljedica činjenice da prilikom primjene metode zamjene u računanju određenoga integrala mijenjamo i granice segmenta integracije. Da smo te integrale računali kao razliku vrijednosti standardne antiderivacije *polazne* funkcije u granicama segmenta integracije, onda bismo morali pamtiti što smo čime zamijenili jer bi se varijabla standardne antiderivacije morala podudarati s varijablom polazne funkcije.

Duljina luka ravninske krivulje - domaća zadaća

1. Izračunajte duljinu luka parabole $y=-x^2+2\cdot x+3$ iznad segmenta određenoga nultočkama pripadne kvadratne funkcije.

2. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{ch}(2\cdot x)$ iznad segmenta $[0,2\cdot\ln 2]$.

3. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ iznad segmenta $[4,6]$.

4. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=\ln x$ iznad segmenta $\left[1,2\cdot\sqrt{2}\right]$.

5. Izračunajte duljinu luka krivulje $y^2=2\cdot x$ između točaka $A=\left(\frac{1}{2},y_A<0\right)$ i $B=(2,y_B>0)$.

Upute i rezultati zadataka za domaću zadaću

1. $2\cdot\sqrt{17}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$ jed. duljine.

2. $\frac{255}{64}$ jed. duljine.

3. 10 jed. duljine.

4. *Uputa*: Integral $\int_1^{2\cdot\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot \mathrm{d}x$ svedite na integral $\int_1^{2\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot \mathrm{d}x$, pa primijenite zamjenu $x=\operatorname{sh} t$. Dobiva se: $l=3+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}$ jed. duljine.

5. $\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right)$ jed. duljine.

Volumen rotacijskoga tijela

Podsjetnik: Promatramo ravninski lik omeđen krivuljama $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ i $x = b$, pri čemu su $a \leq b$ i f neprekidna funkcija. Ako taj lik rotira oko osi apscisa, onda je volumen nastaloga rotacijskoga tijela jednak

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x.$$

Ako dodatno pretpostavimo da su a i b istoga predznaka, onda je volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem gornjega ravninskoga lika oko osi ordinata jednak

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b x \cdot \left|f(x)\right| \cdot \mathrm{d}x.$$

Zadatak 1. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ i $x = 16$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rješenje: **a)** Traženi volumen je jednak:

$$V_x = \pi \cdot \int_4^{16} \left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_4^{16} x \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \left.\left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)\right|_4^{16} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\underbrace{16^2 - 4^2}_{=256-16=240}\right) = 120 \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

b) Primijetimo da je $\sqrt{x} > 0,\ \forall x \in [4,16]$. Zbog toga je $\left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x},\ \forall x \in [4,16]$. Tako dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_4^{16} x \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \int_4^{16} x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \int_4^{16} x^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \left.\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1} \cdot x^{\frac{3}{2}+1}\right)\right|_4^{16} = 2 \cdot \pi \cdot \left.\left(\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right)\right|_4^{16} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\underbrace{16^{\frac{5}{2}} - 4^{\frac{5}{2}}}_{=1024-32=992}\right) = \frac{3968}{5} \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

Zadatak 2. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \pi$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rješenje: **a)** Primjenjujući formulu za pretvorbu kvadrata funkcije sinus u trigonometrijsku funkciju dvostruko većega kuta, dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{\pi} (\sin x)^2 \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x)\right) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} (1 - \cos(2 \cdot x)) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\pi - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sin(2 \cdot \pi)}_{=0} - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{4} \text{ kub. jed.}$$

b) Primijetimo da je $\sin x \geq 0, \ \forall x \in [0, \pi]$. Zbog toga je $|\sin x| = \sin x, \ \forall x \in [0, \pi]$. Tako dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v = \int \sin x \cdot \mathrm{d}x = -\cos x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \sin x \cdot \mathrm{d}x \end{vmatrix} = 2 \cdot \pi \cdot (-x \cdot \cos x)\Big|_0^{\pi} - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot (-\pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - (\underbrace{-0 \cdot \cos 0}_{=0})) + 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} \cos x \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi^2 + 2 \cdot \pi \cdot (\sin x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2 \cdot \pi^2 + 2 \cdot \pi \cdot (\underbrace{\sin \pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}) = 2 \cdot \pi^2 \text{ kub. jed.}$$

Zadatak 3. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \operatorname{tg} x, \ y = 0, \ x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$ oko osi apscisa.

Rješenje: Koristeći osnovne trigonometrijske identitete dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^2 \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \cdot \mathrm{d}x\right) = \pi \cdot (\operatorname{tg} x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \cdot \left(\underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1} - \frac{\pi}{4} - (\underbrace{\operatorname{tg} 0}_{=0} - 0)\right) = \pi \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4} \text{ kub. jed.}$$

Primjedba 1. U ovome zadatku se nije tražio volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom zadanoga ravninskoga lika oko osi ordinata jer pripadni određeni integral nije moguće elementarno odrediti.

Zadatak 4. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot x + 2}}, \ y = 0, \ x = -1$ i $x = 0$ oko osi apscisa.

Rješenje: Traženi volumen iznosi:

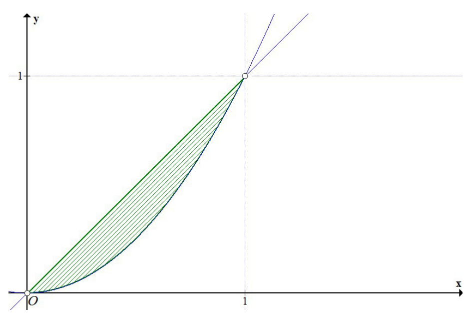
$$V=\pi\cdot\int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2\cdot x+2}}\right)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_{-1}^{0}\left(\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{x^2+2\cdot x+2}\right)\cdot\mathrm{d}x=\frac{4\cdot\pi}{\pi^2}\cdot\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+2\cdot x+2}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}\cdot\mathrm{d}x=\begin{Bmatrix}\text{zamjena: } t:=x+1,\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{Bmatrix}=\frac{4}{\pi}\cdot\int_{0}^{1}\frac{1}{t^2+1}\cdot\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot(\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg} 0)=\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=1 \text{ kub. jed.}$$

Zadatak 5. Ravninski lik omeđen krivuljama $y=x$ i $y=x^2$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte volumen nastaloga rotacijskoga tijela. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Ravninski lik koji rotira oko osi ordinata omeđen je pravcem i parabolom, pri čemu je pravac iznad parabole. Zbog toga traženi volumen dobijemo tako da od volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom pravca oko osi ordinata oduzmemo volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom parabole oko osi ordinata:

$$V=V_1-V_2=2\cdot\pi\cdot\int_0^1 x\cdot x\cdot\mathrm{d}x-2\cdot\pi\cdot\int_0^1 x\cdot x^2\cdot\mathrm{d}x.$$

Zbog svojstva aditivnosti integrala ovaj izraz dalje možemo pojednostavniti ovako:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^1 x\cdot\left(x-x^2\right)\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^1\left(x^2-x^3\right)\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{4}\cdot 1^4-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{1}{4}\cdot 0^4\right)\right)=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}\text{ kub. jed.}$$

Volumen rotacijskoga tijela – domaća zadaća

1. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot e^x$, $y=0$, $x=0$ i $x=1$ oko osi ordinata.

2. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot x\cdot\sin x}$, $y=0$, $x=0$ i $x=\frac{\pi}{2}$ oko osi apscisa.

3. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+8\cdot x+17}}$, $y=0$, $x=-4$ i $x=-3$ oko osi apscisa.

4. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{72}{\pi}\cdot\sin(12\cdot x)$, $y=0$, $x=0$ i $x=\frac{\pi}{24}$ oko osi ordinata.

5. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y=\frac{\ln^2 x}{2\cdot x}$, $y=0$, $x=1$ i $x=e$ oko osi y.

Upute i rezultati zadataka za domaću zadaću

1. *Uputa*: U izračunavanju određenoga integrala primijenite metodu djelomične integracije: $\begin{vmatrix} u=x & v=e^x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^x\cdot\mathrm{d}x \end{vmatrix}$. Dobiva se: $V=1$ kub. jed.

2. *Uputa*: U izračunavanju određenoga integrala primijenite metodu djelomične integracije: $\begin{vmatrix} u=x & v=-\cos x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\sin x\cdot\mathrm{d}x \end{vmatrix}$. Dobiva se: $V=1$ kub. jed.

3. $V=1$ kub. jed.

4. *Uputa*: U izračunavanju određenoga integrala primijenite metodu djelomične integracije: $\begin{vmatrix} u=x & v=-\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot x) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\sin(2\cdot x)\cdot\mathrm{d}x \end{vmatrix}$. Dobiva se: $V=1$ kub. jed.

5. $V=(e-2)\cdot\pi$ kub. jed.

Površina ravninskoga lika

Podsjetnik: Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Površina **krivocrtnoga trapeza** omeđenoga krivuljama $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ i $x=b$ dana je izrazom:

$$P=\int_a^b |f(x)|\cdot \mathrm{d}x\,.$$

Tvrdnja 1. Neka su f i g realne funkcije definirane na segmentu $[a,b]\subset\mathbb{R}$ i takve da vrijedi nejednakost:

$$f(x)\ge g(x),\ \forall x\in[a,b].$$

Tada je površina P ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$ i $x=b$ jednaka:

$$P=\int_a^b (f(x)-g(x))\cdot \mathrm{d}x.$$

Zadatak 1. Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju krivulja $y=-\frac{2}{x^2+1}$, normala na tu krivulju povučena u točki krivulje $T=(x_T>0,\ -1)$ i os ordinata. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom slikom!

Rješenje: Najprije uvrstimo $y = -1$ u jednadžbu krivulje. Dobivamo jednadžbu $-\frac{2}{x^2+1}=-1$, otkuda je $x^2=1$. Zbog uvjeta $x > 0$ slijedi $x = 1$. Dakle, $T = (1, -1)$.

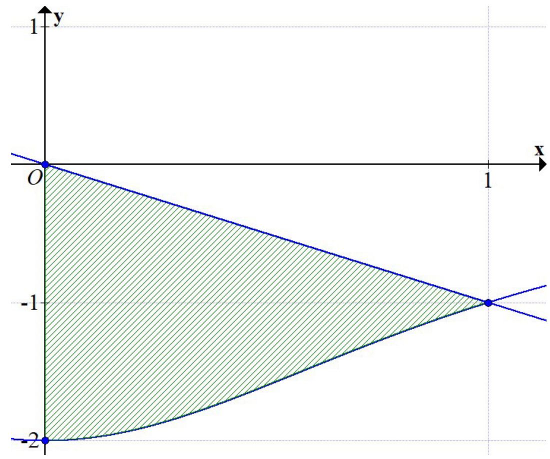
Deriviranjem izraza $y=-\frac{2}{x^2+1}$ dobijemo $y'=\frac{4\cdot x}{(x^2+1)^2}$. Koeficijent smjera normale povučene na zadanu krivulju u točki T jednak je:

$$k_n=-\frac{1}{y'(1)}=-\frac{1}{\frac{4\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2}}=-\frac{1}{\frac{4}{2^2}}=-\frac{4}{4}=-1\,.$$

Zbog toga je jednadžba normale zapisana u eksplicitnom obliku:

$$n\ldots\ y-(-1)=(-1)\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x.$$

Nacrtajmo pripadnu sliku (vidjeti sliku 1).



Slika 1.

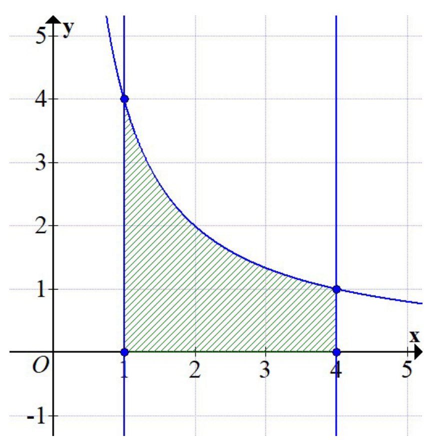
Uočimo da za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi nejednakost $-x \ge -\frac{2}{x^2+1}$. Prema Tvrdnji 1., a uz oznake $f(x) = -x$, $g(x) = -\frac{2}{x^2+1}$, odmah dobivamo:

$$P = \int_0^1 \left(-x - \left(-\frac{2}{x^2+1}\right)\right) \cdot dx = \int_0^1 \left(-x + \frac{2}{x^2+1}\right) \cdot dx = \left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 1^2}_{=-\frac{1}{2}} + \underbrace{2 \cdot \operatorname{arctg} 1}_{=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}} - \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 0^2}_{=0} + 2 \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 1}{2} \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 2. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $x \cdot y = 4$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 4$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Nacrtajmo sve četiri krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

Vidimo da je ravninski lik krivocrtni trapez omeđen zadanim krivuljama. Jednadžbu krivulje $x \cdot y = 4$ zapišimo u eksplicitnom obliku:

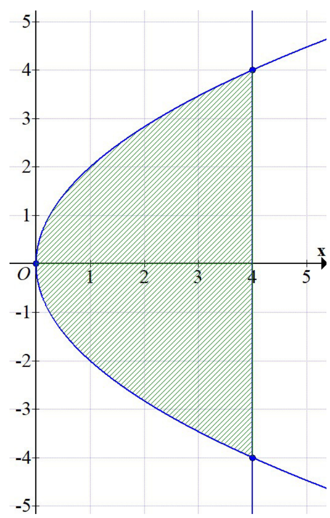
$$y = \frac{4}{x},$$

pa je tražena površina jednaka:

$$P = \int_1^4 \frac{4}{x} \cdot \mathrm{d}x = \left(4 \cdot \ln|x|\right)\Big|_1^4 = 4 \cdot \underbrace{\ln|4|}_{=\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2 \cdot \ln 2} - 4 \cdot \underbrace{\ln|1|}_{=\ln 1 = 0} = 4 \cdot 2 \cdot \ln 2 = 8 \cdot \ln 2 \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 3. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y^2 = 4 \cdot x$ i $x = 4$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Nacrtajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 3.



Slika 3.

Ovaj zadatak možemo riješiti na dva načina. Prvi način je uočiti da je lik simetričan s obzirom na os apscisa, pa izračunati površinu gornje (ili donje) polovice lika, te traženu površinu dobiti množeći netom spomenutu površinu s 2. Konkretno, ako se opredijelimo za gornju polovicu, onda je tražena površina jednaka:

$$P = 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{4 \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^4 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = 4 \cdot \int_0^4 \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = 4 \cdot \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} \right)\Bigg|_0^4 = 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^4 = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{8}{3} \cdot \left(\underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{=8} - \underbrace{0^{\frac{3}{2}}}_{=0} \right) = \frac{8}{3} \cdot 8 = \frac{64}{3} \text{ kv. jed.}$$

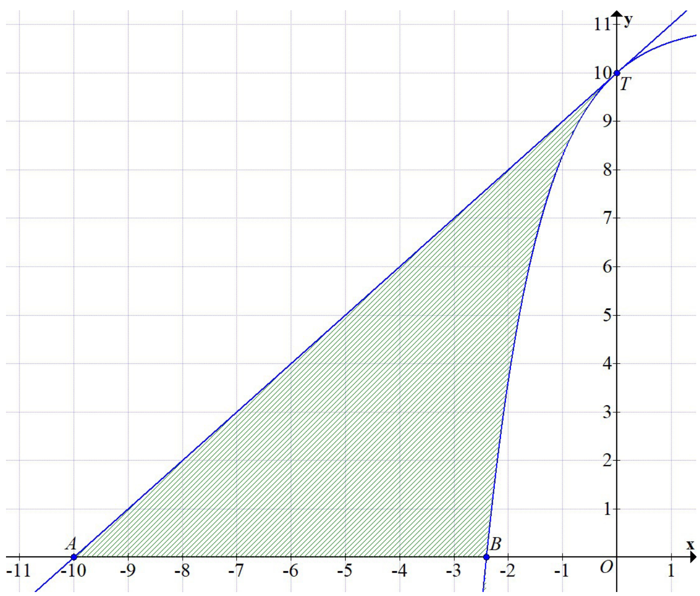
Postoji i nešto jednostavniji način rješavanja ovoga zadatka. Naime, promotrit ćemo poziciju išrafiranoga lika s obzirom na os ordinata. Uočimo da se taj lik dobije kad se iz pravokutnika kojemu su vrhovi (0, -4), (4, -4), (4, 4) i (0, 4) izreže lik omeđen krivuljom $y^2 = 4 \cdot x$, osi ordinata, te pravcima y = -4 i y = 4. Tako dobivamo da je tražena površina jednaka:

$$P = 4 \cdot 8 - \int_{-4}^{4} \frac{y^2}{4} \cdot \mathrm{d}y = 32 - 2 \cdot \int_{0}^{4} \frac{y^2}{4} \cdot \mathrm{d}y = 32 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2+1} \cdot y^{2+1} \right) \Bigg|_0^4 =$$

$$= 32 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (4^3 - 0^3) = 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 = 32 - \frac{1}{3} \cdot 32 = \frac{64}{3} \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 4. S točnošću od 10^{-5} izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os apscisa, krivulja $y = 11 - e^{-x}$ i tangenta na tu krivulju povučena u točki $T = (x, 10)$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Nacrtajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 4.



Slika 4.

Odredimo najprije koordinate točke T. Ona pripada krivulji, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Tako dobivamo:

$$10 = 11 - e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = \ln 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Dakle, T = (0, 10). Nadalje, odredimo jednadžbu tangente t. Njezin koeficijent smjera jednak je prvoj derivaciji izraza koji zadaje krivulju $y = 11 - e^{-x}$ izračunatoj u točki $x = 0$. Tako lagano dobivamo:

$$k=\left(\left(11-e^{-x}\right)'\right)_{x=0}=\left(0-e^{-x}\cdot(-x)'\right)_{x=0}=\left(-e^{-x}\cdot(-1)\right)_{x=0}=\left(e^{-x}\right)_{x=0}=e^{-0}=1,$$

pa jednadžba tangente zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$y-10=1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x+10\Leftrightarrow -x+y=10\Leftrightarrow \frac{x}{-10}+\frac{y}{10}=1.$$

Uz oznake sa slike 4., odatle slijedi A = (-10, 0). Preostaje odrediti koordinate točke B. Uočimo da je ta točka sjecište krivulje $y=11-e^{-x}$ s osi apscisa. To znači da je druga koordinata točke B jednaka nuli, pa odredimo prvu koordinatu te točke:

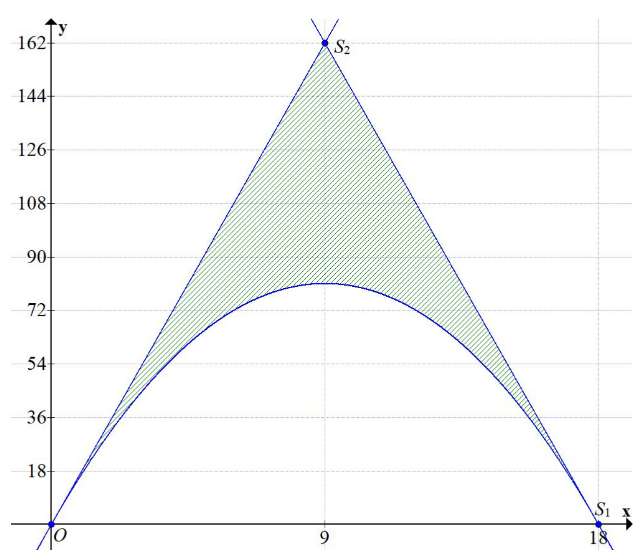
$$0=11-e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}=11\Leftrightarrow -x=\ln 11\Leftrightarrow x=-\ln 11.$$

Dakle, B = (-ln11, 0). Uočimo da se išrafirani ravninski lik dobije tako da se iz trokuta čiji su vrhovi O, T i B izreže lik kojega omeđuju os apscisa, os ordinata i krivulja $y=11-e^{-x}$. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{10\cdot 10}{2}-\int\limits_{-\ln 11}^{0}\left(11-e^{-x}\right)\cdot \mathrm{d}x=50-\left(11\cdot x+e^{-x}\right)\Big|_{-\ln 11}^{0}=50-\left(\underbrace{11\cdot 0}_{=0}+\underbrace{e^{-0}}_{=1}-\left(11\cdot(-\ln 11)+\underbrace{e^{-(-\ln 11)}}_{=e^{\ln 11}=11}\right)\right)=$$
$$=50-(1+11\cdot\ln 11-11)=60-11\cdot\ln 11 \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 5. Na krivulju K... $y=18\cdot x-x^2$ povučene su tangente u sjecištima krivulje s osi apscisa. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga tim tangentama i krivuljom K. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo krivulju K i povučene tangente u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 5.



Slika 5.

Odredimo najprije sjecišta zadane krivulje s osi apscisa. U tu svrhu riješimo jednadžbu $18\cdot x-x^2=0$. Njezina su rješenja $x_1=0$ i $x_2=18$. Dakle, spomenuta sjecišta su točke O i $S_1=(18,0)$.

Odredimo jednadžbe tangenata povučenih u točkama O i S_1. Prva derivacija izraza koji zadaje krivulju K je $y'=18-2\cdot x$. Tako za točku O dobivamo:

$$k_1=18-2\cdot 0=18\Rightarrow t\ldots\ y-0=18\cdot(x-0)\Leftrightarrow t\ldots\ y=18\cdot x,$$

dok za točku S_1 slijedi:

$$k_2=18-2\cdot 18=-18\Rightarrow t\ldots\ y-0=(-18)\cdot(x-18)\Leftrightarrow t\ldots\ y=(-18)\cdot x+324.$$

Odredimo sjecišta dobivenih tangenata. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y=18\cdot x, \\ y=-18\cdot x+324. \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Odatle slijedi $18\cdot x=-18\cdot x+324$, odnosno $x=9$. Sada se lako izračuna $y=18\cdot 9=162$. Dakle, sjecište tangenata je točka $S_2=(9,162)$.

Preostaje odrediti traženu površinu. Uočimo da se išrafirani ravninski lik dobije tako da se iz trokuta kojemu su vrhovi O, S_1 i S_2 izreže ravninski lik omeđen krivuljom K i osi apscisa. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{18\cdot 162}{2}-\int_0^{18}\left(18\cdot x-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=1458-\left(18\cdot\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1}-\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}\right)\Bigg|_0^{18}=1458-\left(9\cdot x^2-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)\Bigg|_0^{18}=$$

$$=1458-\left(\left(\underbrace{9\cdot 18^2}_{=2916}-\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 18^3}_{=1944}\right)-\left(\underbrace{9\cdot 0^2}_{=0}-\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 0^3}_{=0}\right)\right)=1458-2916+1944=486\text{ kv. jed.}$$

Zadatak 6. Pokažite da je površina kruga polumjera r jednaka $P=r^2\cdot\pi$ kv. jed.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je krug omeđen središnjom kružnicom (tj. kružnicom sa središtem u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). To znači da je jednadžba pripadne kružnice $K\ldots\ x^2+y^2=r^2$. Budući da kružnica K **nije** graf nijedne realne funkcije jedne realne varijable, promotrimo njezinu četvrtinu koja se nalazi u prvom kvadrantu. Jednadžba te četvrtine je $y=\sqrt{r^2-x^2}$, a ona se nalazi iznad segmenta $[0,r]$. Tako dobivamo:

$$P=4\cdot\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\cdot\mathrm{d}x=4\cdot\left.\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right)\right|_0^r=$$

$$=4\cdot\left(\frac{r}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{r^2-r^2}}_{=0}+\frac{r^2}{2}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\frac{r}{r}\right)}_{=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}}-\left(\underbrace{\frac{0}{2}\cdot\sqrt{r^2-0^2}}_{=0}+\frac{r^2}{2}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\frac{0}{r}\right)}_{=\arcsin 0=0}\right)\right)=$$

$$=4\cdot\left(0+\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-0-0\right)=r^2\cdot\pi \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 7. Neka su $a,b>0$. Pokažite da je površina ravninskoga lika omeđenoga elipsom $b^2x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$ jednaka $P=a\cdot b\cdot\pi$ kv. jed.

Rješenje: Analogno kao i u rješenju prethodnoga zadatka, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je središte elipse u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Promotrimo onu njezinu četvrtinu koja se nalazi u prvom kvadrantu. Jednadžba te četvrtine je $y=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-b^2\cdot x^2}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{b^2\cdot\left(a^2-x^2\right)}=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$, a ona se nalazi iznad segmenta $[0,a]$. Tako dobivamo:

$$P=4\cdot\int_0^r\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\cdot\mathrm{d}x=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\left.\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right|_0^a=$$

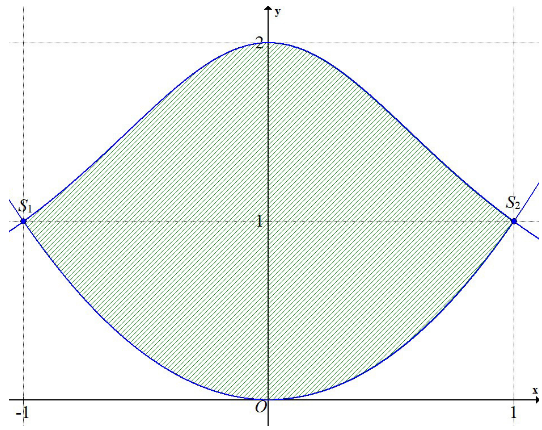
$$=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{a^2-a^2}}_{=0}+\frac{a^2}{2}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)}_{=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}}-\left(\underbrace{\frac{0}{2}\cdot\sqrt{a^2-0^2}}_{=0}+\frac{a^2}{2}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\frac{0}{a}\right)}_{=\arcsin 0=0}\right)\right)=$$

$$=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\left(0+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-0-0\right)=a\cdot b\cdot\pi \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 8. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1\ldots\ y=\frac{2}{x^2+1}$ i $K_2\ldots\ y=x^2$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 6.

Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav $\begin{cases} y=\frac{2}{x^2+1}, \\ y=x^2 \end{cases}$



Slika 6.

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Izjednačavanjem dobivamo jednadžbu

$$\frac{2}{x^2+1}=x^2,$$

odnosno bikvadratnu jednadžbu

$$x^4+x^2-2=0.$$

Zamjenom $t:=x^2$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2+t-2=0.$$

Budući da je $x^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, tražimo nenegativno rješenje dobivene kvadratne jednadžbe. Lako nalazimo da dobivena jednadžba ima jedinstveno nenegativno rješenje $t=1$. Tako iz kvadratne jednadžbe $x^2=1$ slijedi $x_1=-1,\ x_2=1$.

Primijetimo da za svaki $x\in[-1,1]$ vrijedi nejednakost:

$$\frac{2}{x^2+1}\geq x^2,$$

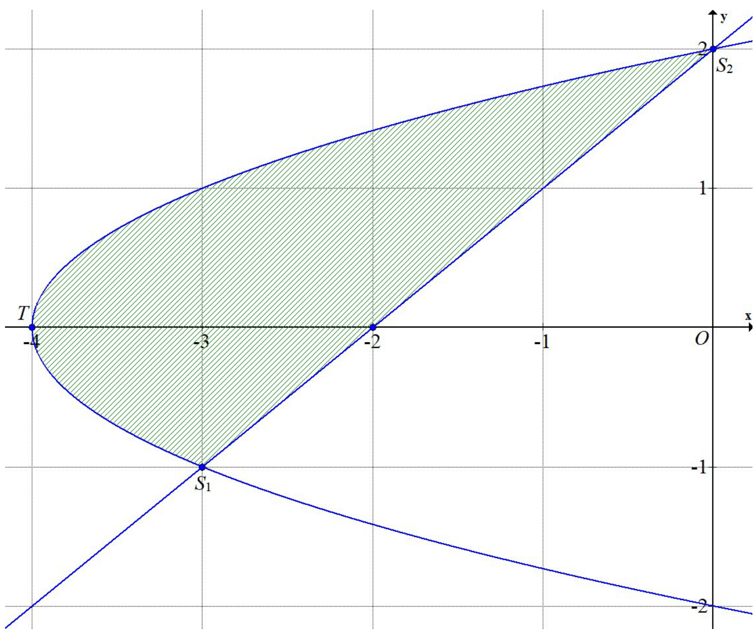
kao i da su funkcije na objema stranama te nejednakosti parne. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1}-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1}-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\left(2\cdot \operatorname{arctg} x-\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2\cdot\left(2\cdot\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{=\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\underbrace{1^3}_{=1}-\left(2\cdot\underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0}+\frac{1}{3}\cdot\underbrace{0^3}_{=0}\right)\right)=2\cdot\left(2\cdot\frac{\pi}{4}-1-0-0\right)=\pi-2 \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 9. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots y^2 = x+4$ i $K_2 \ldots x - y + 2 = 0$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Krivulja K_1 je parabola čije je tjeme u točki $T = (-4, 0)$ i koja je simetrična s obzirom na os apscisa. Krivulja K_2 je pravac čija je jednadžba u eksplicitnom obliku $y = x+2$. U skladu s tim, skicirajmo obje krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 7.



Slika 7.

Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y^2 = x+4, \\ y = x+2. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je $x = y-2$, pa uvrštavanjem te jednakosti u prvu jednadžbu dobivamo $y^2 = y-2+4$, odnosno $y^2 - y - 2 = 0$. Odatle je $y_1 = -1,\ y_2 = 2.$ Sada lako izračunamo $x_1 = -3,\ x_2 = 0$, pa zaključujemo: $S_1 = (-3,-1),\ S_2 = (0,2)$

Lako vidimo da išrafirani ravninski lik možemo dobiti tako da iz ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1,\ y = -1,\ y = 2$ i $x = 0$ izrežemo trokut kojemu su vrhovi S_1, (0, -1) i S_2. Površinu prvoga ravninskoga lika izračunat ćemo pomoću određenoga integrala po varijabli *y*. Pritom, međutim, moramo biti vrlo oprezni: taj lik se nalazi

ispod osi ordinata jer za svaki $y \in [-1,2]$ vrijedi nejednakost $y^2 - 4 \le 0$. Zbog toga prilikom računanja površine moramo primijeniti apsolutnu vrijednost, odnosno jednakost $\left|y^2 - 4\right| = 4 - y^2,\ \forall y \in [-1,2]$. Tako dobivamo:

$$P = \int_{-1}^{2} \left|y^2 - 4\right| \cdot \mathrm{d}y - \frac{3 \cdot 3}{2} = \int_{-1}^{2} \left(4 - y^2\right) \cdot \mathrm{d}y - \frac{9}{2} = \left(4 \cdot y - \frac{1}{2+1} \cdot y^{2+1}\right)\Big|_{-1}^{2} - \frac{9}{2} =$$

$$= \left(\underbrace{4 \cdot 2}_{=8} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} - \left(\underbrace{4 \cdot (-1)}_{=-4} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot (-1)^3}_{=-\frac{1}{3}}\right)\right) - \frac{9}{2} = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \text{ kv. jed.}$$

Primjedba 1. Zadatak je moguće riješiti i integriranjem po varijabli *x*. U tom je slučaju tražena površina jednaka:

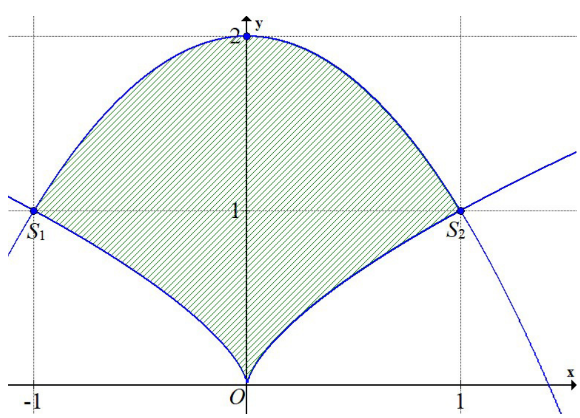
$$P = \int_{-4}^{0} \sqrt{x+4} \cdot \mathrm{d}x - \frac{2 \cdot 2}{2} + \int_{-4}^{-3} \left(-\sqrt{x+4}\right) \cdot \mathrm{d}x + \frac{1 \cdot 1}{2} = 2 \cdot \int_{-4}^{-3} \sqrt{x+4} \cdot \mathrm{d}x + \int_{-3}^{0} \sqrt{x+4} \cdot \mathrm{d}x - \frac{3}{2} =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{1} \sqrt{t} \cdot \mathrm{d}t + \int_{1}^{4} \sqrt{t} \cdot \mathrm{d}t - \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ kv. jed.}$$

Uvjerite se u ispravnost ovoga računa i objasnite svaki njegov korak.

Zadatak 10. Odredite površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots y^3 = x^2$ i $K_2 \ldots y = 2 - x^2$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 8.



Slika 8.

Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y^3 = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je $x^2 = 2 - y$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo kubnu jednadžbu $y^3 = 2 - y$, odnosno $y^3 + y - 2 = 0$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $y = 1$ u što se možemo uvjeriti ovako:

$$y^3 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(y^3 - 1\right) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot\left(y^2 + y + 1\right) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-1)\cdot\left(y^2 + y + 2\right) = 0.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $y^2 + y + 2 = 0$ jednaka je $D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$, pa ta jednadžba nema realnih rješenja. Odatle slijedi tvrdnja.

Uvrštavanjem $y = 1$ u prvu jednadžbu sustava dobijemo $x^2 = 1$, a odatle je $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Dakle, sjecišta zadanih krivulja su točke $S_1 = (-1,1)$ i $S_2 = (1,1)$.

Preostaje primijetiti da za svaki $x \in [-1,1]$ vrijedi nejednakost $2 - x^2 \geq x^{\frac{2}{3}}$, te da su obje strane ove nejednakosti parne funkcije. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = \int_{-1}^{1}\left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{0}^{1}\left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\left.\left(2\cdot x - \frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1} - \frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot x^{\frac{2}{3}+1}\right)\right|_0^1 =$$

$$= 2\cdot\left(2\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot\underbrace{1^3}_{=1} - \frac{3}{5}\cdot\underbrace{1^{\frac{5}{3}}}_{=1} - \left(2\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot\underbrace{0^3}_{=0} - \frac{3}{5}\cdot\underbrace{0^{\frac{5}{3}}}_{=0}\right)\right) = 2\cdot\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} - 0 + 0 + 0\right) = \frac{32}{15} \text{ kv. jed.}$$

Površina ravninskoga lika – domaća zadaća

Napomena: Rješenja svih zadataka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

1. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{2\cdot x}{x-2}$, $y=x$ i $x=6$.

2. Nađite površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x = 1$ i $x = e^2$.

3. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\left(1-x^2\right)\cdot e^x$, $x=-1$, i $x = 1$.

4. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=x^2+4\cdot x$ i $y=x+4$.

5. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y^2=2\cdot x$ i $|y|=x$.

Upute i rezultati zadataka za domaću zadaću

1. *Uputa i rješenje*: Tražena površina je jednaka:

$$P=\frac{(4+6)}{2}\cdot 2-\int_4^6 \frac{2\cdot x}{x-2}\cdot \mathrm{d}x=10-\int_2^4 \frac{2\cdot t+4}{t}\cdot \mathrm{d}t=10-\int_2^4\left(2+4\cdot\frac{1}{t}\right)\cdot \mathrm{d}t=6-4\cdot\ln 2 \text{ kv. jed.}$$

2. *Uputa*: Tražena je površina jednaka $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot \mathrm{d}x$. Primijenite metodu djelomične integracije u obliku $u=\ln x,\ \mathrm{d}v=x^{-\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{d}x$. Dobiva se: $P=4$ kv. jed.

3. *Uputa*: Tražena je površina jednaka $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x$. Dvaput primijenite metodu djelomične integracije. Prvi put je primijenite u obliku $u=1-x^2,\ \mathrm{d}v=e^x\cdot \mathrm{d}x$, a drugi put u obliku $u=x,\ \mathrm{d}v=e^x\cdot \mathrm{d}x$. Dobiva se: $P=\frac{4}{e}$ kv. jed.

4. $P=\int_{-4}^{1}\left(x+4-\left(x^2+4\cdot x\right)\right)\cdot \mathrm{d}x=\int_{-4}^{1}\left(4-3\cdot x-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=\frac{125}{6}$ kv. jed.

5. $P=2\cdot\left(\frac{2\cdot 2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 y^2\cdot \mathrm{d}y\right)=4-\frac{1}{6}\cdot\left(y^3\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}$ kv. jed.