1. Odredite integralni zbroj S_n za funkciju $f(x) = x$ definiranu na segmentu $[0, 1]$ tako da pripadnim diobenim točkama taj segment bude podijeljen na jednake dijelove. Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ i objasnite dobiveni rezultat.

2. Izračunajte sljedeće određene integrale:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x;$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cdot y)\cdot e^{\sin y} \cdot \mathrm{d}y.$

3. Neka su f integrabilna funkcija, F njezina standardna antiderivacija i $p(x) = a\cdot x + b$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Odredite standardnu antiderivaciju funkcije $g = f \circ p$.

b) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Koristeći rješenje **a)** podzadatka odredite standardne antiderivacije sljedećih funkcija

$$f_1(x) = \frac{1}{a\cdot x + b},$$
$$f_2(x) = \sqrt{a\cdot x + b},$$
$$f_3(x) = \ln(a\cdot x + b),$$
$$f_4(x) = e^{a\cdot x + b},$$
$$f_5(x) = \sin(a\cdot x + b),$$
$$f_6(x) = \cos(a\cdot x + b).$$

4. Neka su $a > 0$ i $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Ako je f parna funkcija, onda je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int\limits_0^a f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int\limits_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$

b) Ako je f neparna funkcija, onda je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 0.$

5. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$

a) integriranjem po varijabli x;
b) integriranjem po varijabli y.

6. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$

a) integriranjem po varijabli x;
b) integriranjem po varijabli y.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Diobene točke su $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. Stavimo li $x_0 = 0$, $x_n = 1$, onda za svaki $i = 1$, ..., $n - 1$ vrijedi $x_i = \frac{i}{n}$, $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, te $f(x_i) = x_i = \frac{i}{n}$. Zbog toga je:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 - n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n}.$$

Odatle slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, površina krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = x$, $x = 0$ i $x = 1$ iznosi $P = \frac{1}{2}$ kv. jed. No, taj je lik zapravo jednakokračan pravokutan trokut kojemu su duljine kateta jednake $a = 1$, pa je njegova površina jednaka $P = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$ kv. jed.

2.

a) $$\int \cos\sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} t := \sqrt{x}, \\ x = t^2, \\ \mathrm{d}x = 2 \cdot t \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right\} = 2 \cdot \int t \cdot \cos t \cdot \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{ll} u = t & v = \sin t \\ \mathrm{d}u = 1 \cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = \cos t \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right\} = 2 \cdot \left(t \cdot \sin t - \int \sin t \cdot dt \right) =$$

$$= 2 \cdot (t \cdot \sin t + \cos t) = 2 \cdot \left(\sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} \right) + C \Rightarrow$$

$$F(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = F\left(\frac{\pi^2}{4} \right) - F(0) = \pi - 2;$$

b) $\int \sin(2\cdot y)\cdot e^{\sin y}\cdot \mathrm{d}y = 2\cdot\int \sin y\cdot\cos y\cdot e^{\sin y}\cdot \mathrm{d}y = \left\{\begin{matrix} t := \sin y \\ \mathrm{d}x = \cos y\cdot \mathrm{d}y\end{matrix}\right\} = 2\cdot\int t\cdot e^t\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{matrix} u = t & v = e^t \\ \mathrm{d}u = 1\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = e^t\cdot \mathrm{d}t\end{matrix}\right\} =$

$= 2\cdot\left(t\cdot e^t - \int e^t dt\right) = 2\cdot\left(t\cdot e^t - e^t\right) = 2\cdot e^t\cdot(t-1) = 2\cdot e^{\sin y}\cdot(\sin y - 1) + C \Rightarrow$

$F(y) = 2\cdot e^{\sin y}\cdot(\sin y - 1) \Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cdot y)\cdot e^{\sin y}\cdot \mathrm{d}y = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 2.$$

3. **a)** Označimo traženu standardnu antiderivaciju s G. Odredimo najprije neodređeni integral funkcije g. Imamo redom:

$$\int g(x)\cdot \mathrm{d}x = \int (f\circ p)(x)\cdot \mathrm{d}x = \int f(p(x))\cdot \mathrm{d}x = \int f(a\cdot x + b)\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} \text{zamjena:} \\ t := a\cdot x + b, \\ \mathrm{d}t = a\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot \mathrm{d}t\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{1}{a}\cdot f(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{a}\cdot\int f(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{a}\cdot\left(F(t) + C\right) = \frac{1}{a}\cdot\left(F(a\cdot x + b) + C\right),\ C\in\mathbb{R}.$$

Odatle izravno iz definicije standardne antiderivacije slijedi:

$$G(x) = \frac{1}{a}\cdot F(a\cdot x + b) \Leftrightarrow G = \frac{1}{a}\cdot(F\circ p).$$

b) Koristeći tablicu osnovnih integrala i rješenje **a)** podzadatka odmah dobivamo ($C\in\mathbb{R}$ je konstanta):

$$\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x = \ln|x| + C \Rightarrow \int f_1(x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\ln|a\cdot x + b| + C \Rightarrow F_1(x) = \frac{1}{a}\cdot\ln|a\cdot x + b|,$$

$$\int \sqrt{x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow \int f_2(x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{3\cdot a}\cdot(a\cdot x + b)^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow F_2(x) = \frac{2}{3\cdot a}\cdot(a\cdot x + b)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int \ln x\cdot \mathrm{d}x = x\cdot\ln x - x + C \Rightarrow \int f_3(x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\left((a\cdot x + b)\cdot\ln(a\cdot x + b) - (a\cdot x + b)\right) + C \Rightarrow$$
$$F_3(x) = \frac{1}{a}\cdot\left((a\cdot x + b)\cdot\ln(a\cdot x + b) - (a\cdot x + b)\right),$$

$$\int e^x\cdot \mathrm{d}x = e^x + C \Rightarrow \int f_4(x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x + b} + C \Rightarrow F_4(x) = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x + b},$$

$$\int \sin x\cdot \mathrm{d}x = -\cos x + C \Rightarrow \int f_5(x)\cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\cos(a\cdot x + b) + C \Rightarrow F_5(x) = -\frac{1}{a}\cdot\cos(a\cdot x + b),$$

$$\int \cos x\cdot \mathrm{d}x = \sin x + C \Rightarrow \int f_6(x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\sin(a\cdot x + b) + C \Rightarrow F_6(x) = \frac{1}{a}\cdot\sin(a\cdot x + b).$$

4. Dokaz I. Primijetimo da za svaki $a > 0$ vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Prvi pribrojnik na desnoj strani te jednakosti transformirajmo ovako:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := -x \Leftrightarrow x = -t \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t, \\ -a \to a,\ 0 \to 0 \end{array}\right\} = \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-\mathrm{d}t) = -\int_{a}^{0} f(-t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\cdot \mathrm{d}t.$$

U članu na lijevoj strani i u drugom pribrojniku promijenimo oznaku varijable:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t,\ \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t.$$

Tako dobivamo da je polazni određeni integral jednak:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{0}^{a} \big(f(t) + f(-t)\big)\cdot \mathrm{d}t,$$

odnosno, ako nezavisnu varijablu označimo s x,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)\cdot \mathrm{d}x.$$

a) Iz definicije parne funkcije slijedi da za svaki $x \in [-a, a]$ vrijedi jednakost $f(-x) = f(x)$. Zbog toga je:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(x)\big)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Jednakosti $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x$ i $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x$ imaju međusobno jednake lijeve strane. Zbog toga takve moraju biti i desne strane tih jednakosti, pa slijedi:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u jednakost $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x$ dobivamo:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int_{-a}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x.$$

b) Iz definicije neparne funkcije slijedi da za svaki $x\in[-a,a]$ vrijedi jednakost $f(-x)=-f(x)$. Zbog toga je:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a}\big(f(x)+f(-x)\big)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a}\big(f(x)+(-f(x))\big)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a}\big(f(x)-f(x)\big)\cdot \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} 0\cdot \mathrm{d}x = 0.$$

Dokaz II. Najprije dokažimo da je (prva) derivacija parne funkcije neparna funkcija. Neka je $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ parna funkcija. Koristeći definiciju derivacije funkcije u točki i definiciju parne funkcije, za bilo koji $c\in[-a,a]$ imamo:

$$g'(-c)=\lim_{x\to -c}\frac{g(x)-g(-c)}{x-(-c)}=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=-x\Rightarrow x=-t,\\ \text{kad } x\to -c, \text{ onda } t\to c\end{array}\right\}=\lim_{t\to c}\frac{g(-t)-g(-c)}{-t-(-c)}=$$
$$=\lim_{t\to c}\frac{g(t)-g(c)}{-(t-c)}=-\lim_{t\to c}\frac{g(t)-g(c)}{t-c}=-g'(c),$$

a odavde izravno slijedi tvrdnja.

Dokažimo i da je (prva) derivacija neparne funkcije parna funkcija. Neka je $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ neparna funkcija. Koristeći definiciju derivacije funkcije u točki i definiciju neparne funkcije, za bilo koji $c\in[-a,a]$ imamo:

$$g'(-c)=\lim_{x\to -c}\frac{g(x)-g(-c)}{x-(-c)}=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=-x\Rightarrow x=-t,\\ \text{kad } x\to -c, \text{ onda } t\to c\end{array}\right\}=\lim_{t\to c}\frac{g(-t)-g(-c)}{-t-(-c)}=$$
$$=\lim_{t\to c}\frac{-g(t)-(-g(c))}{-t-(-c)}=-\lim_{t\to c}\frac{-(g(t)-g(c))}{-(t-c)}=\lim_{t\to c}\frac{g(t)-g(c)}{t-c}=g'(c),$$

a odavde izravno slijedi tvrdnja.

Iz dokazanih tvrdnji „invertiranjem“ slijedi da je standardna antiderivacija (ali i bilo koja antiderivacija!) neparne funkcije parna funkcija, kao i da je standardna antiderivacija parne funkcije neparna funkcija. (*Oprez*: Antiderivacija parne funkcije je neparna funkcija ako i samo ako je ta antiderivacija jednaka standardnoj antiderivaciji. Naime, dodavanjem realne konstante $C \neq 0$ bilo kojoj neparnoj funkciji dobivamo funkciju koja nije ni parna, ni neparna.)

a) Neka je F standardna antiderivacija funkcije f. Iz pretpostavke da je f parna i gornjih razmatranja slijedi da je F neparna funkcija. Za *bilo koju* neparnu funkciju F definiranu u $c = 0$ je nužno $F(0) = 0$. (Za dokaz vidjeti predavanja iz *Matematike* 1, nastavna cjelina 4.1. *Osnovni pojmovi o funkcijama*) Tako primjenom Newton-Leibnizove formule imamo:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(a) - F(-a) = F(a) - (-F(a)) = F(a) + F(a) = 2 \cdot F(a)$$

i

$$2 \cdot \int_{0}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \big(F(a) - F(0)\big) = 2 \cdot \big(F(a) - 0\big) = 2 \cdot F(a).$$

Desne strane ovih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i lijeve strane. Odatle izravno slijedi prva jednakost u **a)**. Nadalje, i jednakosti

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(a) - F(-a) = F(a) - (-F(a)) = F(a) + F(a) = 2 \cdot F(a)$$

i

$$2 \cdot \int_{-a}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \big(F(0) - F(-a)\big) = 2 \cdot \big(0 - F(-a)\big) = 2 \cdot \Big(0 - \big(-F(a)\big)\Big) = 2 \cdot F(a)$$

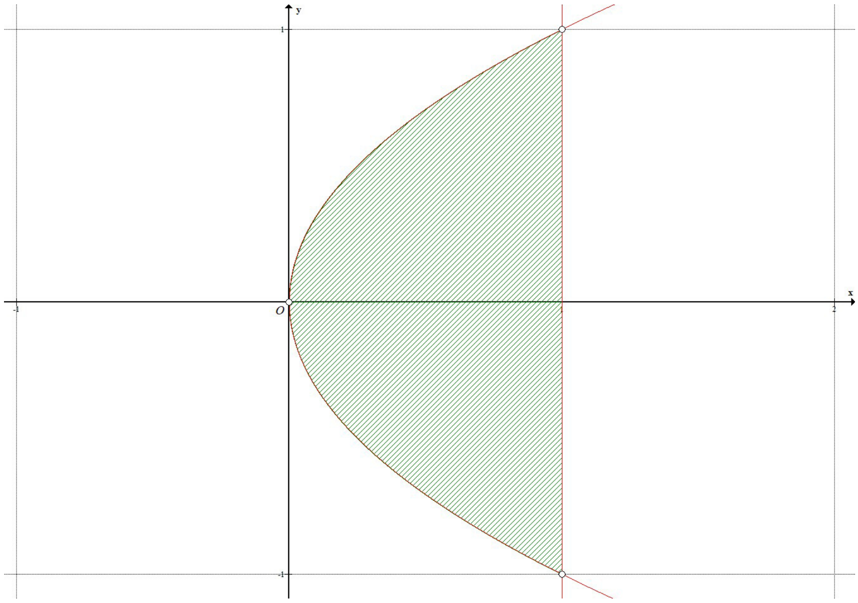
imaju jednake desne strane, pa takve moraju biti i lijeve strane. Odatle slijedi preostala jednakost u **a)**.

b) Neka je F standardna antiderivacija funkcije f. Iz pretpostavke da je f neparna i ranijih razmatranja slijedi da je F parna funkcija. Tako primjenom Newton-Leibnizove formule odmah imamo:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(a) - F(-a) = F(a) - F(a) = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

5. Nacrtajmo ravninski lik iz zadatka. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

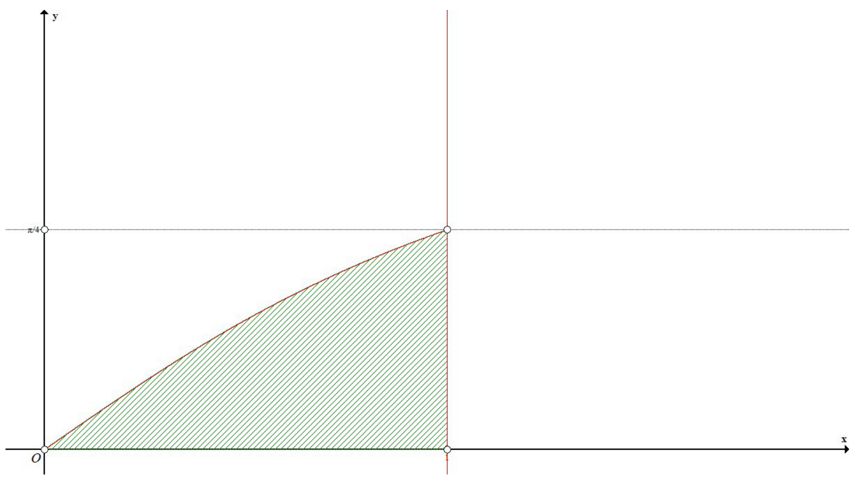
a) Uočimo da je dobiveni ravninski lik simetričan s obzirom na os apscisa. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 0\right) = \frac{4}{3} \text{ kv. jed.}$$

b) Traženu površinu izračunat ćemo tako da od površine pravokutnika s vrhovima u točkama $(-1,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ i $(0,1)$ oduzmemo površinu ravninskoga lika kojega krivulja $x = y^2$ zatvara s pravcima $x = 0$, $y = -1$ i $y = 1$. Tako dobivamo:

$$P = 2 \cdot 1 - \int_{-1}^{1} y^2 \cdot \mathrm{d}y = 2 - \left[\frac{1}{3} \cdot y^3\right]_{-1}^{1} = 2 - \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ kv. jed.}$$

6. Nacrtajmo ravninski lik iz zadatka. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

a) Tražena površina je jednaka:

$$P=\int_0^1 \operatorname{arctg} x\cdot \mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x & v=\int 1\cdot \mathrm{d}x=x \\ \mathrm{d}u=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=\left[x\cdot \operatorname{arctg} x\right]_0^1-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=1\cdot \underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{\frac{\pi}{4}}-0\cdot \underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{=0}-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:} \\ t:=1+x^2, \\ \mathrm{d}t=2\cdot x\cdot \mathrm{d}x\Rightarrow x\cdot \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t, \\ 0\to 1+0=1,\ 1\to 1+1^2=2\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot \left[\ln t\right]_1^2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot (\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{=0})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot \ln 2 \text{ kv. jed.}$$

b) Traženu površinu izračunat ćemo tako da od površine pravokutnika s vrhovima u točkama $(0,0)$, $(1,0)$, $\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ i $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ oduzmemo površinu ravninskoga lika kojega krivulja $x=\operatorname{tg} y$ zatvara s pravcima $x=0$, $y=0$ i $y=\dfrac{\pi}{4}$ Tako dobivamo:

$$P=1\cdot \frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} y\cdot \mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\left[-\ln(\cos y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\left[\ln(\cos y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\left(\underbrace{\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}}-\underbrace{\ln\left(\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right)}_{=0}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot \ln 2 \text{ kv. jed.}$$