Zadatak 1. Ispitajte konvergenciju sljedećih nepravih integrala i, ako konvergiraju, izračunajte ih:

a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{1} e^x \cdot dx$;

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Rješenje: Svaki od zadanih integrala izračunat ćemo prema odgovarajućoj definiciji.

a) Prema definiciji, traženi integral je jednak:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\left(\int\limits_1^b \frac{1}{x^2}\cdot dx\right).$$

Odredimo određeni integral u okrugloj zagradi na uobičajen način:

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \int\limits_1^b x^{-2}\cdot dx = \left(\frac{1}{-2+1}\cdot x^{-2+1}\right)\Bigg|_1^b = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{b}.$$

Zbog toga je zadani integral jednak:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1 - 0 = 1.$$

b) Postupimo potpuno analogno kao u prethodnom zadatku. Prema definiciji, traženi integral je jednak:

$$I = \lim_{a\to-\infty}\left(\int\limits_a^1 e^x\cdot dx\right).$$

Odredimo određeni integral u okrugloj zagradi na uobičajen način:

$$\int\limits_a^1 e^x\cdot dx = (e^x)\Big|_a^1 = e^1 - e^a = e - e^a.$$

Zbog toga je zadani integral jednak:

$$I = \lim_{a\to-\infty}\left(e - \underbrace{e^a}_{\to 0}\right) = e - 0 = e.$$

c) Kao „,međutočku" odaberemo $c=0$, pa je zadani nepravi integral jednak:

$$I=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Lijeva strana je „konkretan" realan broj ako i samo ako je svaki od dvaju pribrojnika na desnoj strani „konkretan" realan broj. Ako barem jedan od tih pribrojnika pripada skupu $\{-\infty,+\infty\}$, tj. ako barem jedan od tih pribrojnika divergira, onda divergira i polazni integral.

Analogno kao u prethodnim dvama podzadacima računamo redom:

$$I_1:=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\left(\int_{a}^{0}\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_a^0\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}0}_{=0}-\underbrace{\operatorname{arctg}a}_{=-\frac{\pi}{2}}\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$I_2:=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\int_{0}^{b}\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}b}_{\to\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\operatorname{arctg}0}_{=0}\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Zbog toga je zadani integral jednak:

$$I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Dakle, sva tri zadana integrala konvergiraju i jednaki su redom, 1, e i π.

Primjedba 1. U zadatku 1.c) podintegralna funkcija je parna. Znamo da za *određene* integrale vrijedi svojstvo: ako su $a>0$ i f parna funkcija integrabilna na segmentu $[-a, a]$, onda je:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\int_{-a}^{0}f(x)\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\int_{0}^{a}f(x)\cdot\mathrm{d}x.$$

Može se pokazati da analogno svojstvo vrijedi i za neprave integrale, tj. ako je f parna funkcija integrabilna na $\mathbb{R}$, onda je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\int_{-\infty}^{0}f(x)\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\int_{0}^{+\infty}f(x)\cdot\mathrm{d}x.$$

Tako smo nepravi integral u zadatku 1.c) mogli kraće izračunati i ovako:

$$I = 2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{d}x\right) = 2\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^b\right) = 2\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}b}_{\to\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{arctg}0}_{=0}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Zadatak 2. Izračunajte nepravi integral $I = \int_5^{+\infty}\frac{4}{(\ln 5)\cdot(w^2-4\cdot w)}\cdot\mathrm{d}w$.

Rješenje: Primijetimo da vrijedi identitet:

$$w^2-4\cdot w = (w-2)^2-4.$$

Provedimo *zamjenu varijabli* u nepravom integralu. Nju obavljamo potpuno analogno kao i zamjenu varijabli u određenom integralu. Dakle, zamijenimo:

$$\begin{aligned}
&t := w-2,\\
&\mathrm{d}t = (w-2)'\cdot\mathrm{d}w = 1\cdot\mathrm{d}w = \mathrm{d}w,\\
&5 \mapsto 5-2 = 3,\\
&+\infty \mapsto \lim_{b\to+\infty}(\underbrace{b-2}_{\to+\infty}) = +\infty.
\end{aligned}$$

Tako je polazni nepravi integral jednak:

$$I = \frac{4}{\ln 5}\cdot\int_3^{+\infty}\frac{1}{t^2-4}\cdot\mathrm{d}t = \frac{4}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_3^b\frac{1}{t^2-4}\cdot\mathrm{d}t\right) = \frac{4}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_3^b\frac{1}{t^2-4}\cdot\mathrm{d}t\right) = \frac{4}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_3^b\frac{1}{t^2-2^2}\cdot\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{4}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Big|_3^b\right) = \frac{4}{\ln 5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Big|_3^b\right) = \frac{1}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right| - \ln\left|\frac{3-2}{3+2}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right| - \ln\left|\frac{1}{5}\right|\right) = \frac{1}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right| - \ln\left(5^{-1}\right)\right) = \frac{1}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right| + \ln 5\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 5}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{1-\overbrace{\frac{2}{b}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{b}}_{\to 0}}\right| + \ln 5\right) = \frac{1}{\ln 5}\cdot\left(\ln\left|\frac{1-0}{1+0}\right| + \ln 5\right) = \frac{1}{\ln 5}\cdot\left(\underbrace{\ln 1}_{=0} + \ln 5\right) = \frac{1}{\ln 5}\cdot\ln 5 = 1.$$

Zadatak 3. Izračunajte nepravi integral $I = \int_0^{+\infty}\frac{24\cdot\operatorname{arctg}^2 w}{\pi^3\cdot\left(1+w^2\right)}\cdot\mathrm{d}w$.

Rješenje: Ponovno provedimo zamjenu varijabli u nepravom integralu:

$$\begin{aligned}
&t := \operatorname{arctg} w, \\
&\mathrm{d}t = (\operatorname{arctg} w)' \cdot \mathrm{d}w = \frac{1}{1+w^2} \cdot \mathrm{d}w, \\
&0 \mapsto \operatorname{arctg} 0 = 0, \\
&+\infty \mapsto \lim_{b \to +\infty} (\operatorname{arctg} b) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Kako vidimo, ovom zamjenom polazni nepravi integral prelazi u „obični“ određeni integral. Njega računamo na uobičajen način:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24 \cdot t^2}{\pi^3} \cdot \mathrm{d}t = \frac{24}{\pi^3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \mathrm{d}t = \frac{24}{\pi^3} \cdot \left(\frac{1}{2+1} \cdot t^{2+1} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{24}{\pi^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(t^3\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\pi^3} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - 0^3 \right) = \frac{8}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^3}{8} = 1.$$

Primjedba 2. Pojasnimo u što se u slučaju primjene metode zamjene „preslikaju“ granice -∞ i +∞. Pretpostavimo da smo uveli zamjenu $t := g(x)$. Tada:

$$\begin{aligned}
-\infty &\mapsto \lim_{a \to -\infty} f(a), \\
+\infty &\mapsto \lim_{b \to +\infty} f(b).
\end{aligned}$$

Granične vrijednosti na desnim stranama treba odrediti prema pravilima za određivanje graničnih vrijednosti poznatima iz *Matematike* 1. Ako je moguće (tj. ako izraz pod graničnom vrijednošću ima odgovarajući oblik), za određivanje svih graničnih vrijednosti koje se pojavljuju pri računanju nepravoga integrala **smijemo** primijeniti L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo.

Zadatak 4. Izračunajte nepravi integral $I = \int_0^{+\infty} 4 \cdot w^3 \cdot e^{-w^4} \cdot \mathrm{d}w$.

Rješenje: Zamijenimo:

$$\begin{aligned}
&t := -w^4, \\
&\mathrm{d}t = \left(-w^4\right)' \cdot \mathrm{d}w = -4 \cdot w^3 \cdot \mathrm{d}w \Rightarrow 4 \cdot w^3 \cdot \mathrm{d}w = -\mathrm{d}t, \\
&0 \to -0^4 = -0 = 0, \\
&+\infty \to \lim_{b \to +\infty} \left(-\underbrace{b^4}_{\to +\infty} \right) = -\infty.
\end{aligned}$$

Tako dobivamo nepravi integral:

$$I = \int_0^{-\infty} (-1) \cdot e^t \cdot \mathrm{d}t = (-1) \cdot \int_0^{-\infty} e^t \cdot \mathrm{d}t.$$

Kod određenoga integrala sad bismo zamijenili donju i gornju granicu integracije jer integral ima negativan predznak. Smijemo li postupiti analogno i u slučaju nepravoga integrala? Odgovor je potvrdan, tj. smijemo. Dakle, zamijenimo donju i gornju granicu integracije, pa dalje integral odredimo prema definiciji:

$$I=\int_{-\infty}^{0} e^{t}\cdot \mathrm{d}t=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{t}\cdot \mathrm{d}t=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(e^{t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\underbrace{e^{0}}_{=1}-\underbrace{e^{a}}_{\to 0}\right)=1-0=1.$$

Zadatak 5. Neka je $a>0$ konstanta. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala

$$I=\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\,.$$

Ako integral konvergira, izračunajte ga.

Rješenje: Zadatak ćemo riješiti metodom djelomične integracije. Pogledajmo kako ćemo primijeniti tu metodu u slučaju nepravih integrala.

Početak je standardan: $\left|\begin{matrix} u=x & v=\int e^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot x} \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix}\right|$. (Za zaboravne: integral $\int e^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x$ određuje se metodom zamjene: $\left\{\begin{matrix} t:=-a\cdot x, \\ \mathrm{d}t=-a\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cdot \mathrm{d}t \end{matrix}\right\}$. Provedite taj postupak u cijelosti sami.) No, što sad napraviti? Smijemo li s graničnom vrijednošću „napasti“ dio standardne antiderivacije kojega ćemo dobiti djelomičnom integracijom? (Otprije znamo da to smijemo napraviti s Newton-Leibnizovom formulom.)

U općem slučaju odgovor je negativan. Naime, formula $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\right)\pm\lim\limits_{x\to c}\left(g(x)\right)$ vrijedi **uz pretpostavku da postoje obje granične vrijednosti na desnoj strani**. Zbog toga moramo biti oprezni, te primjenjivati formule samo ako su ispunjene sve potrebne pretpostavke.

U ovom zadatku dobivamo:

$$I=\left(x\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{-a\cdot x}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\left(\left(-\frac{x}{e^{a\cdot x}}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\left(\left(-\frac{x}{e^{a\cdot x}}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}+\left(\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{-a\cdot x}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}\right)=\frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\left(\frac{a\cdot x}{e^{a\cdot x}}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}+\left(\frac{1}{e^{a\cdot x}}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}\right)=\left(-\frac{1}{a^{2}}\right)\cdot\left(\left(\frac{1+a\cdot x}{e^{a\cdot x}}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}\right).$$

U posljednjem koraku smo oba člana stavili u istu zagradu jer imaju jednake segmente integracije. (Koje smo svojstvo *određenoga* integrala ovdje zapravo primijenili?) Dakle, postupili smo kao da se radi o određenim, a ne nepravim integralima, pa smo čak pisali i oznaku $+\infty$ kao gornju granicu segmenta integracije, iako je ta oznaka samo formalna. Preostaje primijeniti odgovarajuću definiciju nepravoga integrala i računati odgovarajuću graničnu vrijednost:

$$I=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1+a\cdot x}{e^{a\cdot x}}\right)\Bigg|_0^b\right)=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1+a\cdot b}{e^{a\cdot b}}-\frac{1+a\cdot 0}{e^{a\cdot 0}}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1+a\cdot b}{e^{a\cdot b}}-1\right)=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1+a\cdot b-e^{a\cdot b}}{e^{a\cdot b}}\right)=(\text{L'Hôpitalovo pravilo})=$$
$$=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{a-a\cdot e^{a\cdot b}}{a\cdot e^{a\cdot b}}\right)=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{a-e^{a\cdot b}}{e^{a\cdot b}}\right)=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{e^{a\cdot b}}_{\to+\infty}}-1\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{a^2}\right)\cdot(0-1)=\frac{1}{a^2}.$$

Primjedba 3. Pretpostavka $a > 0$ je nužna jer za $a\le 0$ integral divergira. Utvrdite na kojemu smo mjestu u rješenju prethodnoga zadatka izravno primijenili tu pretpostavku.

Zadatak 6. Neka su $a>0$ i $p\in\mathbb{R}$ konstante. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$. Ako integral konvergira, izračunajte ga. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Razlikovat ćemo tri slučaja.

Slučaj 1. $p=1.$ Tada je:

$$I=\int\limits_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left((\ln x)\Big|_a^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\underbrace{\ln b}_{\to+\infty}-\underbrace{\ln a}_{=\text{ const.}})=\{+\infty-\text{const.}\}=+\infty.$$

Dakle, u ovom slučaju integral divergira.

Slučaj 2. $p<1.$ Tada je:

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}x^{-p}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{-p+1}\cdot x^{-p+1}\right)\Bigg|_a^b\right)=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-\underbrace{a^{1-p}}_{=\text{ const.}}\right).$$

Prema pretpostavci je $p<1,$ odnosno $1-p>0.$ To znači da je $\lim\limits_{b\to+\infty}b^{1-p}=+\infty$, pa u ovom slučaju zadani integral divergira.

Slučaj 3. $p>1$. Potpuno analogno kao u slučaju 2. dobivamo:

$$I=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\Big(b^{1-p}-\underbrace{a^{1-p}}_{=\text{const.}}\Big)=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{1}{b^{p-1}}-\underbrace{a^{1-p}}_{=\text{const.}}\Big).$$

Prema pretpostavci je $p>1$, odnosno $p-1>0$. To znači da je $\lim\limits_{b\to+\infty}b^{p-1}=+\infty$, odnosno $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=0$. Zbog toga je:

$$I=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{1}{b^{p-1}}-\underbrace{a^{1-p}}_{=\text{const.}}\Big)=\frac{1}{1-p}\cdot\left(0-a^{1-p}\right)=\frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

Dakle, u ovom slučaju integral konvergira i jednak je $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$.

Zaključak: Zadani integral konvergira za $p>1$ i tada je jednak $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$. Za $p\le 1$ integral divergira.

Zadatak 7. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom krivulje $y=\dfrac{1}{x}$ iznad intervala $[1,+\infty\rangle$ oko osi apscisa.

Rješenje: Prema formuli iz točke 1.8., traženi volumen jednak je:

$$V=\pi\cdot\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_1^{+\infty}x^{-2}\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{-2+1}\cdot x^{-2+1}\right)\Bigg|_1^b\right)=$$

$$=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b\right)=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{b}}_{\to 0}-(-1)\Big)=\pi\cdot(0+1)=\pi\text{ kub. jed.}$$

Primjedba 4. Rotacijsko tijelo iz zadatka 6. naziva se *Gabrijelov rog* ili *Toricellijeva truba*. Prvi naziv potječe od predaje da anđeo Gabrijel svirajući u ovaj rog najavljuje Sudnji dan, a drugi od talijanskoga matematičara Evangelista Toricellija (1608. – 1647.) koji je prvi promatrao navedeno tijelo. Uz navedeno tijelo vezan je zanimljiv paradoks: iako ono ima konačan volumen (što smo dokazali u prethodnom zadatku), ono ima beskonačno veliko oplošje. To znači da rog možemo napuniti s π kub. jed. boje, ali ne možemo obojati njegovu vanjsku površinu (ali zato možemo unutrašnju!).

Sljedeće zadatke riješit ćemo koristeći pogodne kriterije usporedbe za neodređene integrale.

Zadatak 8. Ispitajte konvergenciju integrala $I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot \mathrm{d}x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Neodređeni integral $\int e^{-x^2}\cdot \mathrm{d}x$ ne možemo elementarno odrediti. Međutim, u ovom slučaju to nije niti potrebno. Primijetimo da za svaki $x\geq 1$ vrijedi sljedeći lanac nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&x\geq 1 \quad / \cdot x\geq 1>0\\
&x^2\geq x, \quad / \cdot(-1),\\
&-x^2\leq -x, \quad / e^{\wedge}\\
&e^{-x^2}\leq e^{-x}.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost vrijedi jer je $f_1(x)=e^x$ strogo rastuća funkcija na ℝ, pa „čuva nejednakost“ (tj. kad obje strane nejednakosti „napadnemo“ tom funkcijom, znak nejednakosti se ne mijenja). Isto svojstvo, međutim, ima i integral: ako na nekom intervalu $[a,b]$ za dvije funkcije f_2 i g_2 vrijedi nejednakost $f_2(x)\geq g(x)$, onda je $\int f(x)\cdot \mathrm{d}x\geq \int g(x)\cdot \mathrm{d}x.$ Analogna tvrdnja vrijedi i ako znak ≥ zamijenimo znakom ≤.

Tako lagano dobivamo:

$$I=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\cdot \mathrm{d}x+\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\cdot \mathrm{d}x<\int\limits_0^1 e^{-x^2}\cdot \mathrm{d}x+\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\cdot \mathrm{d}x\,.$$

Prvi pribrojnik na desnoj strani nejednakosti je određeni integral i on je „konkretan“ realan broj. No, takav je i drugi pribrojnik jer je

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\cdot \mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} e^{-x}\cdot \mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}-\left(-e^{1}\right)\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\underbrace{e^b}_{\to\infty}}+e\right)=0+e=e.$$

Dakle, oba pribrojnika na desnoj strani nejednakosti su „konkretni“ realni brojevi, pa je i njihov zbroj „konkretan“ realan broj. Označimo taj broj sa *Z*.

Ovaj zaključak još uvijek ne znači da *I* konvergira jer se može dogoditi da njegova „vrijednost“ bude jednaka -∞. Međutim, u ovom slučaju ipak nije tako jer lako vidimo da vrijedi implikacija:

$$e^{-x^2}>0\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot \mathrm{d}x>\int\limits_0^{+\infty} 0\cdot \mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\int\limits_0^{b} 0\cdot \mathrm{d}x\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(0\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(0-0)=0.$$

Dakle, vrijednost polaznoga integrala pripada intervalu $\langle 0, Z]$, pa ta vrijednost mora biti „konkretan“ realan broj. To znači da zadani integral konvergira.

Primjedba 5. Tzv. *prijelazom na polarne koordinate* može se pokazati da je točna (egzaktna) vrijednost integrala jednaka $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Detalje ovdje izostavljamo.

Zadatak 9. Ispitajte konvergenciju integrala $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} \cdot \mathrm{d}x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Podsjetimo najprije (vidjeti rješenje zadatka 1.c) da je:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Tako imamo sljedeći „lanac“ nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&-1 \le \sin x \le 1 \quad / : \frac{1}{x^2+1} > 0 \\
&\frac{-1}{x^2+1} \le \frac{\sin x}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1} \quad / \int_0^{+\infty} \\
&-\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \le \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} \cdot \mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}, \\
&-\frac{\pi}{2} \le I \le \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijednost zadanoga integrala pripada segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pa taj integral konvergira.

Zadatak 10. Ispitajte konvergenciju integrala $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+8}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Za $x \ge 1$ imamo sljedeći „lanac“ nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&x^3 + 8 > x^3 > 0 \\
&0 < \frac{1}{x^3+8} < \frac{1}{x^3}, \\
&0 < \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+8} < \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.
\end{aligned}$$

Prema rješenju zadatka 6., integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ konvergira i vrijednost mu je jednaka $\frac{1^{1-3}}{3-1}=\frac{1}{2}$. Tako zaključujemo da vrijednost zadanoga integrala pripada intervalu $\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$, pa zadani integral konvergira.

Pogledajmo nekoliko primjera nepravih integrala u kojima podintegralna funkcija nije integrabilna na segmentu integracije.

Zadatak 11. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Najprije primijetimo da je zadani integral nepravi jer podintegralna funkcija nije definirana u donjoj granici segmenta integracije (tj. u c = 0). Zbog toga ga računamo kao graničnu vrijednost $\lim\limits_{a\to 0+}\int\limits_a^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Primijetite da točki 0 nužno prilazimo zdesna jer lijevo od nule podintegralna funkcija nije definirana. Tako redom imamo:

$$I=\lim_{a\to 0+}\int\limits_a^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{a\to 0+}\int\limits_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{a\to 0+}\left(\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot x^{-\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_a^1\right)=2\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_a^1\right)=2\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\left(\underbrace{1^{\frac{1}{2}}}_{=1}-\underbrace{a^{\frac{1}{2}}}_{\to 0}\right)\Big|_a^1\right)=2\cdot(1-0)=2.$$

Zadatak 12. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int\limits_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Zadani integral je nepravi jer podintegralna funkcija nije definirana u gornjoj granici segmenta integracije (tj. u c = 2). Zbog toga ga računamo kao graničnu vrijednost $\lim\limits_{b\to 2-}\int\limits_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$. Primijetite da točki 2 nužno prilazimo slijeva jer desno od 2 podintegralna funkcija nije definirana. Tako redom imamo:

$$I=\lim_{b\to 2-}\int\limits_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{b\to 2-}\left(\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^b\right)=\lim_{b\to 2-}\left(\underbrace{\arcsin\left(\frac{b}{2}\right)}_{\to\arcsin\left(\frac{2}{2}\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arcsin\left(\frac{0}{2}\right)}_{=\arcsin 0=0}\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Zadatak 13. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Zadani integral je nepravi jer podintegralna funkcija nije definirana u točki $c = 0$ koja pripada segmentu integracije. Zbog toga ga računamo kao zbroj dviju graničnih vrijednosti:

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}+\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}=\lim_{b\to 0-}\int_{-1}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}+\lim_{a\to 0+}\int_{a}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}=\lim_{b\to 0-}\int_{-1}^{b}x^{-5}\cdot\mathrm{d}x+\lim_{a\to 0+}\int_{a}^{1}x^{-5}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{b\to 0-}\left(\left(\frac{1}{-5+1}\cdot x^{-5+1}\right)\Bigg|_{-1}^{b}\right)+\lim_{a\to 0+}\left(\left(\frac{1}{-5+1}\cdot x^{-5+1}\right)\Bigg|_{a}^{1}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\lim_{b\to 0-}\left(b^{-4}-(-1)^{-4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(1^{-4}-a^{-4}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\lim_{b\to 0-}\left(\frac{1}{\underbrace{b^4}_{\to+\infty}}-1\right)+\lim_{a\to 0+}\left(1-\frac{1}{\underbrace{a^4}_{\to+\infty}}\right)\right)=+\infty+(-\infty).$$

Dakle, oba pribrojnika divergiraju, pa i zadani integral divergira.

Primjedba 6. Pronađite pogrešku u svakom od sljedećih „rješenja“ ovoga zadatka:

I. Uočimo da je podintegralna funkcija neparna i da je segment integracije oblika $[-a,\ a]$. To znači da je zadani integral jednak nuli.

II. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}=\left(\frac{1}{-5+1}\cdot x^{-5+1}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{1^4}-\frac{1}{(-1)^4}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(1-1)=0.$

Zadatak 14. Neka su $a,m\in\mathbb{R}$ i $b\geq a$ konstante. Ispitajte konvergenciju nepravoga integrala $\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^m}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Zamijenimo $t:=b-x$. Tada je $\mathrm{d}t=\underbrace{(b-x)'}_{=-1}\cdot\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x$, a granice integracije prelaze redom u 0, odnosno $b-a$. Zbog toga je:

$$I=\int_{b-a}^{0}\frac{-\mathrm{d}t}{t^m}=-\int_{b-a}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{t^m}=\int_{0}^{b-a}\frac{\mathrm{d}t}{t^m}=\lim_{c\to 0+}\int_{c}^{b-a}t^{-m}\cdot\mathrm{d}t=\lim_{c\to 0+}\left(\frac{1}{-m+1}\cdot t^{-m+1}\Bigg|_{c}^{b-a}\right)=\frac{1}{1-m}\cdot\lim_{c\to 0+}\left(\frac{1}{t^{m-1}}\Bigg|_{c}^{b-a}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-m}\cdot\lim_{c\to 0+}\left(\frac{1}{(b-a)^{m-1}}-\frac{1}{c^{m-1}}\right).$$

Posljednja granična vrijednost će postojati ako i samo ako je $m-1<0$ (tada c^{m-1} prebacujemo iz nazivnika u brojnik, pa „napad“ s graničnom vrijednošću daje 0). Dakle, zadani integral konvergira za $m<1$, a divergira za $m\geq 1$. (Usporedite rezultat za rezultatom zadatka 6.)

Nepravi integrali – domaća zadaća

1. Izračunajte sljedeće neprave integrale:

a) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{6 \cdot x^2}{(x^3+1)^3} \cdot \mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2 \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x}{e^{2 \cdot x} + 2 \cdot e^x + 1}$;

c) $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 \cdot x^2} \cdot \mathrm{d}x$.

2. Izračunajte sljedeće neprave integrale:

a) $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \cdot \mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{64 \cdot \operatorname{arcctg}^3 w}{w^2+1} \cdot \mathrm{d}w$;

c) $\int\limits_{-\infty}^{0} t^2 \cdot e^t \cdot \mathrm{d}t$.

3. Izračunajte integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot \mathrm{d}t}{4 \cdot t^2 + 1}$.

4. Pogodnom usporedbom ispitajte konvergenciju integrala:

a) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \cdot \mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin\left(t^2\right)}{t^2} \cdot \mathrm{d}t$;

c) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-1}$.

Upute i rezultati zadataka za domaću zadaću

1. a) *Uputa*: Zamijenite $t := x^3 + 1$. Rezultat: 1.

b) *Uputa*: Uočite da je $e^{2\cdot x} + 2\cdot e^x + 1 = (e^x + 1)^2$, pa zamijenite $t := e^x + 1$. Rezultat: 1.

c) *Uputa*: Zamijenite $t := \frac{1}{x}$. Rezultat: 1.

2. a) *Uputa*: Zamijenite $t := \frac{1}{x}$. Rezultat: 1.

b) *Uputa*: Zamijenite $t := \operatorname{arcctg} w$. Rezultat: $-\pi^4$.

c) *Uputa*: Dvaput primijenite metodu djelomične integracije. Prvi put je primijenite u obliku $u = t^2,\ \mathrm{d}v = e^t \cdot \mathrm{d}t$, a drugi put u obliku $u = t,\ \mathrm{d}v = e^t \cdot \mathrm{d}t$. Rezultat: 2.

3. π.

4. a) *Uputa*: Pokažite da za svaki $x \geq 0$ vrijedi nejednakost $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Rezultat: Konvergira.

b) Vidite uputu za prethodni podzadatak. Rezultat: konvergira.

c) *Uputa*: Pokažite da za svaki $u \geq 2$ vrijedi nejednakost $0 < \frac{1}{\sqrt{u}} < \frac{1}{\sqrt{u}-1}$. Rezultat:

Divergira.