1.9.

NEPRAVI INTEGRALI

1.9.1. POJAM NEPRAVOGA INTEGRALA

- Određeni integral definiran je u slučajevima kad je podintegralna funkcija omeđena (najčešće: neprekidna) na segmentu integracije.
- Integrali kod kojih podintegralna funkcija nije omeđena ili kod kojih je barem jedna granica "beskonačna" nazivaju se *nepravi integrali.*
- Izračunavanje takvih integrala svodi se na kombinaciju određivanja standardne antiderivacije i računanja graničnih vrijednosti (limesa).

1.9.2. INTEGRALI S "BESKONAČNIM" GRANICAMA

- **Pretpostavke:** Neka su $a \in \mathbb{R}$ konstanta i f *integrabilna* realna funkcija na segmentu $[a,b]$, za svaki $b \geq a$.
- Ekvivalentno, pretpostavljamo da postoji određeni integral
$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x, \ \forall b \geq a.$$
- Ako postoji
$$\lim_{b \to +\infty} \left(\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \right) =: I \in \mathbb{R}$$
- kažemo da integral pod graničnom vrijednosti *konvergira* i da mu je granična vrijednost jednaka I.
- Ako je $I \in \{-\infty, +\infty\}$, kažemo da integral *divergira*.

1.9.2. INTEGRALI S "BESKONAČNIM" GRANICAMA

- $I \in \mathbb{R}$ naziva se **nepravi integral** funkcije f u granicama od a do $+\infty$. Pišemo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x := I = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

- Analogno se definiraju i nepravi integrali:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\cdot \mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\cdot \mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\cdot \mathrm{d}x,\ \text{za } c\in\mathbb{R}.$$

1.9.3. KRITERIJI USPOREDBE

- Ako se zahtijeva isključivo ispitivanje konvergencije integrala (bez određivanja njegove vrijednosti), mogu se primijeniti sljedeća dva kriterija:
- **Kriterij 1.** Neka su $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran, te f i g zadane realne funkcije.
- Ako za svaki $x \geq a$ vrijedi nejednakost $0 \leq f(x) \leq g(x)$ i ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x) \cdot \mathrm{d}x$ konvergira, onda i integral
- $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ konvergira, te vrijedi nejednakost

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x) \cdot \mathrm{d}x$$

1.9.3. KRITERIJI USPOREDBE

- **Kriterij 2.** Neka su $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran, te f i g zadane realne funkcije.
- Ako za svaki $x \geq a$ vrijedi nejednakost $|f(x)| \leq g(x)$
- i ako integral $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ divergira,
- onda i integral $\int_a^{+\infty} g(x) \cdot \mathrm{d}x$ divergira.
- Navedeni kriteriji nazivaju se **kriteriji usporedbe.**

1.9.3. KRITERIJI USPOREDBE

- Prigodom primjena kriterija usporedbe često se za usporedbu uzima sljedeći rezultat:

- **Rezultat**: Integrali $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^m}$ i $\int_{-\infty}^a \frac{\mathrm{d}x}{x^m}$ konvergiraju za
- $m > 1$, a divergiraju za $m \leq 1$.

- *Posljedica*: Za svaki $a > 0$ integrali $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}, \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}, \ldots$
- divergiraju, a integrali $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}, \ldots$ konvergiraju.

1.9.4. INTEGRALI NEOMEĐENIH FUNKCIJA

- **Pretpostavka:** Realna funkcija f je definirana i integrabilna u svakoj točki intervala $[a, b\rangle$ a u točki $x = b$ funkcija nije definirana ili vrijedi $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.
- Ako postoji

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

- kažemo da *nepravi integral* $\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$ *konvergira.*
- Ako je gornja granična vrijednost jednaka $+\infty$ ili $-\infty$, kažemo da taj integral *divergira.*
- Točka b naziva se *singularna točka.*
- Za ovako definirane integrale vrijede analogna pravila i rezultati kao i za integrale s beskonačnim granicama.

1.9.5. KRITERIJ USPOREDBE ZA INTEGRALE NEOMEĐENIH FUNKCIJA

- **Pretpostavka**: Neka su f i g realne funkcije takve da za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi nejednakost
- $|f(x)| \leq g(x)$.
- Ako integral $\int_a^b g(x) \cdot \mathrm{d}x$ konvergira, onda konvergira i integral $\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$.
- I ovaj se rezultat naziva **kriterij usporedbe**.

1.9.5. KRITERIJ USPOREDBE ZA INTEGRALE NEOMEĐENIH FUNKCIJA

- Prigodom primjene kriterija usporedbe često se koristi sljedeći rezultat:
- **Rezultat**: Za svaki $b \geq a$ integral $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^m}$
- konvergira za $m < 1$;
- divergira za $m \geq 1$.
- *Posljedica*: Integrali $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b-x}}, \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{b-x}}, \dots$ konvergiraju, a integrali $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{b-x}, \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^2}, \dots$
- divergiraju.