1. OSNOVE KOMBINATORIKE

- *Kombinatorika* – grana matematike koja se bavi problemima prebrajanja konačnih skupova, odnosno konačnim skupovima i strukturama općenito
- *Osnovna pitanja kombinatorike*: Koliko ima skupova/brojeva/objekata koji...?, Na koliko međusobno različitih načina se može...?
- Npr. *Koliko ima* troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je prva znamenka jednaka zbroju druge i treće? *Na koliko* međusobno različitih *načina* se između 153 saborska zastupnika može izabrati peteročlano predsjedništvo Sabora?

1.1. OSNOVNA PRAVILA PREBROJAVANJA

- Pravilo zbroja: Neka su $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran, te $S_1, \ldots, S_n$ *konačni međusobno disjunktni* skupovi (presjek bilo kojih dvaju od njih je prazan skup).
- Tada je skup $\bigcup_{i=1}^{n} S_i := S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ konačan.
- Za svaki $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ vrijedi: $\mathbf{card}(T) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{card}(T \cap S_i)$
-
- Posebno, vrijedi: $\mathbf{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{card}(S_i)$
- Oprez: Ako polazni skupovi **nisu** disjunktni, navedena formula **nije istinita.**

1.1. OSNOVNA PRAVILA PREBROJAVANJA

- Pravilo umnoška: Neka su $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran, te S_1, ..., S_n *konačni* skupovi. (Ti skupovi ne moraju biti međusobno disjunktni.)
- Neka je $T \subseteq S_1 \times ... \times S_n$ skup *uređenih* n-torki takav da za svaki $i = 1$, ..., n i - tu komponentu toga skupa možemo izabrati među elementima skupa S_i na n_i različitih načina.
- Tada je

$$\text{card}(T) = \prod_{i=1}^{n} n_i .$$

1.2. PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

- Neka je $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
- Problem: *Na koliko različitih načina* sve elemente skupa S možemo poredati u *uređen niz* (tako da znamo koji element je prvi, koji drugi itd.)?
- Svaki od načina slaganja svih elemenata skupa S u uređen niz nazivamo *permutacija* (*bez ponavljanja*) toga skupa.
- Ekvivalentno, permutacija (bez ponavljanja) je *bilo koja bijekcija* skupa S na samoga sebe.
- Zadani problem zapravo traži određivanje ukupnoga broja svih različitih permutacija bez ponavljanja skupa S (tj. svih različitih bijekcija skupa S na samoga sebe.)
- Rezultat: $P_n = n! =$ umnožak prvih n prirodnih brojeva.

1.3. MULTISKUP. PERMUTACIJA MULTISKUPA (PERMUTACIJA S PONAVLJANJEM).

- Neka je $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ bilo koji n-člani skup.
- Pretpostavimo da smo od svih elemenata skupa S formirali strukturu A tako da se u A element a_1 pojavljuje točno m_1 puta, element a_2 pojavljuje točno m_2 puta, ..., element a_n pojavljuje točno m_n puta. Pritom je $m_i \in \mathbb{N}_0$, za svaki $i \in [n]$.
- Strukturu A nazivamo (*konačni*) *multiskup na skupu S.* Broj m_i nazivamo *kratnost* elementa a_i u multiskupu S. *Broj elemenata* (*kardinalnost*) *multiskupa A* je nenegativan cijeli broj $\text{card}(A) := m := \sum_{a_i \in S} m_i$.
- *Permutacija multiskupa A* je svaka uređena m-torka elemenata iz A. Za tu permutaciju kažemo i da je *permutacija s ponavljanjem* skupa S.
- Problem: Odrediti ukupan broj svih različitih permutacija multiskupa A.
- Rješenje:

$$\binom{m}{m_1, \ldots, m_n} := P_n^{m_1, \ldots, m_m} = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{m} (m_i!)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} m_i\right)!}{\prod_{i=1}^{m} (m_i!)}.$$

1.4. K-PERMUTACIJA BEZ PONAVLJANJA

- Neka su k, $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $k \leq n$.
- Neka je S bilo koji n-člani skup.
- Svaka uređena k-torka međusobno različitih elemenata skupa S čiji su elementi međusobno različiti naziva se *k-permutacija bez ponavljanja* (ili, kraće, *k-permutacija*) *skupa S*.
- Za $k = n$ dobivamo „običnu" permutaciju skupa S.
- Problem: Odrediti ukupan broj svih različitih k-permutacija skupa S.
- Rezultat: $$P(n,k) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

1.5. *R*-PERMUTACIJA S PONAVLJANJEM

- Neka su n, $r \in \mathbb{N}$.
- Neka je S bilo koji n-člani skup.
- Pri nizanju elemenata skupa S u uređen niz možemo dozvoliti ponavljanje elemenata toga skupa.
- Svaka uređena r–torka u kojoj se na svakoj poziciji (komponenti) može pojaviti svaki element skupa S naziva se *r-permutacija s ponavljanjem skupa S*.
- Problem: Odrediti ukupan broj svih različitih r-permutacija s ponavljanjem skupa S.
- Rezultat: $\overline{P}(n,r) = n^r$

1.6. *K*-KOMBINACIJA (BEZ PONAVLJANJA)

- Neka su k, $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $k \leq n$.
- Neka je S bilo koji n-člani skup.
- Svaki k-člani podskup skupa S naziva se *k-kombinacija bez ponavljanja* (ili kraće: *k-kombinacija*) *skupa S*.
- Problem: Odrediti ukupan broj svih različitih k-kombinacija skupa S.
- Rezultat:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.7. BINOMNI KOEFICIJENT

- Broj $\binom{n}{k}$ naziva se *binomni koeficijent* i čita se "*en povrh ka*".
- Taj je broj *uvijek* ili prirodan broj ili 0 (ako je $k > n$).
- Zadatak 1. Iz *interpretacije* binomnoga koeficijenta lako slijede identiteti: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$. Dokažite ih.
- Zadatak 2. Iz *definicije* binomnoga koeficijenta lako slijede identiteti $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Dokažite ih koristeći *interpretaciju* toga koeficijenta.

1.8. *R*-KOMBINACIJA S PONAVLJANJEM

- Neka su n, $r \in \mathbb{N}$.
- Neka je S bilo koji n-člani skup.
- *r-kombinacija s ponavljanjem skupa S* je bilo koji r-člani multiskup na S. (Za definiciciju multiskupa vidjeti točku 1.3.)
- Problem: Odrediti ukupan broj svih različitih r-kombinacija s ponavljanjem skupa S.
- Rezultat: $$\overline{C}(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

1.9. BINOMNI TEOREM.

- Može se pokazati da vrijedi sljedeći:
- Teorem 1. (*binomni teorem*) Za bilo koje x, $y \in \mathbb{C}$ i bilo koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

- On se najčešće dokazuje algebarski matematičkom indukcijom, ali ga je moguće dokazati i kombinatorno (za kombinatorni dokaz vidjeti npr. D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.).

1. a) Iz Špičkovine u Bedekovčinu može se doći trima različitim cestama, a iz Bedekovčine u Sračinec dvjema različitim cestama. Na koliko se različitih načina može doći iz Špičkovine u Sračinec preko Bedekovčine?

Rješenje: Na ukupno $3 \cdot 2 = 6$ različitih načina.

b) U stočlanoj skupini studenata nalazi se točno 60 muškaraca. Za sastanak s voditeljem studija treba odabrati dvočlano izaslanstvo u kojemu će biti točno jedna žena. Na koliko je različitih načina to moguće učiniti?

Rješenje: Na ukupno $60 \cdot 40 = 2400$ različitih načina.

c) Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je prva znamenka jednaka zbroju druge i treće?

Rješenje: Prva je znamenka jednoznačno određena zadamo li drugu i treću. Iz istoga razloga zbroj druge i treće znamenke ne smije biti strogo veći od 9. Razlikujemo ukupno 10 različitih slučajeva:

- ako je treća znamenka jednaka nuli, drugu možemo izabrati na 9 različitih načina (sve osim 0);
- ako je treća znamenka jednaka 1, drugu možemo izabrati na 9 različitih načina (sve osim 9);
- ako je treća znamenka jednaka 2, drugu možemo izabrati na 8 različitih načina (sve osim 8 i 9);
- ako je treća znamenka jednaka 3, drugu možemo izabrati na 7 različitih načina (sve osim 7, 8 i 9);

....

- ako je treća znamenka jednaka 8, drugu možemo izabrati na 2 različita načina (1 ili 0);
- ako je treća znamenka jednaka 9, druga znamenka mora biti jednaka 0.

Zbog toga je traženi broj jednak:

$$
\begin{aligned}
9+9+8+7+6+\ldots+3+2+1 &= (1+2+3+\ldots+9+10)-1 = \\
&= \frac{10}{2}\cdot(1+10)-1 = \\
&= 54.
\end{aligned}
$$

2. Odredite ukupan broj međusobno različitih permutacija riječi:

a) ZAGREB;

Rješenje: Sva slova riječi ZAGREB su međusobno različita. Zbog toga je traženi broj jednak $P_6 = 6! = 720$.

b) ELEKTROTEHNIKA;

Rješenje: Traženi broj je jednak broju svih permutacija multiskupa $M = \{A, E^3, H, I, K^2, L, N, O, R, T^2\}$, a taj je jednak:

$$\binom{1+3+1+1+2+1+1+1+1+2}{3,2,2} = \binom{14}{3,2,2} = \frac{14!}{3! \cdot (2!)^2} = 3\ 632\ 428\ 800.$$

c) OUAGADOUGOU;

Rješenje: Traženi broj je jednak broju svih permutacija multiskupa $M = \{A^2, D, G^2, O^3, U^3\}$, a taj je jednak:

$$\binom{2+1+2+3+3}{2,2,3,3} = \binom{11}{2,2,3,3} = \frac{11!}{(2! \cdot 3!)^2} = 277\ 200.$$

d) POPOCATEPETL.

Rješenje: Traženi broj je jednak broju svih permutacija multiskupa $M = \{A, C, E^2, L, O^2, P^3, T^2\}$, a taj je jednak:

$$\binom{1+1+2+1+2+3+2}{2,2,3,2} = \binom{12}{2,2,3,2} = \frac{12!}{3! \cdot (2!)^3} = 9\ 979\ 200.$$

3. a) U UEFA-inoj Ligi prvaka natječu se ukupno 32 nogometna kluba. Na koliko različitih načina strastveni kladioničar Zdravko može prognozirati koji će klubovi zauzeti svako od prva četiri mjesta u konačnom poretku (nakon završetka natjecanja)?

Rješenje: Poredak klubova je bitan, pa zapravo tražimo ukupan broj 4–permutacija 32-članoga skupa. Taj je broj jednak:

$$\begin{aligned} P(32,4) &= 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29 = \\ &= 863\ 040. \end{aligned}$$

b) Odredite ukupan broj svih međusobno različitih podskupova n-članoga skupa S kao funkciju prirodnoga broja n. (U podskupove ubrajamo prazan skup i cijeli skup S.)

Rješenje: Prigodom formiranja bilo kojega podskupa X za svaki element skupa S moramo utvrditi hoće li pripadati podskupu X ili neće. (Ako je u svim slučajevima odgovor „da“, dobit ćemo cijeli skup S, a ako je u svim slučajevima odgovor „ne“, dobit ćemo prazan skup.) Tako je traženi broj jednak ukupnom broju n–permutacija s ponavljanjem dvočlanoga skupa {„da“, „ne“}, a taj je jednak

$$\overline{P}(2,n) = 2^n.$$

4. a) Na koliko se različitih načina u istom izvlačenju igre LOTO 7/35 mogu izvući kombinacija od 7 brojeva i jedan dopunski broj (vraćanje izvučene kuglice u bubanj nije dozvoljeno)?

Rješenje: Ne dozvolimo li vraćanje kuglica u bubanj, onda najprije izvlačimo sedam brojeva koji tvore kombinaciju (i koji su svi međusobno ravnopravni), a potom dopunski broj (kojega tretiramo zasebno). Sedam brojeva koji tvore kombinaciju tvore neuređeni sedmeročlani podskup 35-članoga skupa, a takvih skupova ima ukupno:

$$\binom{35}{7} = 6\ 724\ 520.$$

Nakon što formiramo kombinaciju, dopunski broj možemo izabrati na ukupno $35-7=28$ različita načina. Zbog toga je traženi broj jednak:

$$6\ 724\ 520 \cdot 28 = 188\ 286\ 560.$$

b) Riješite a) podzadatak u slučaju da je dozvoljeno vraćanje izvučene kuglice u bubanj.

Rješenje: Dozvolimo li vraćanje kuglica u bubanj, onda sedmeročlanu kombinaciju možemo izabrati na ukupno

$$\binom{35+7-1}{7} = \binom{41}{7} =$$
$$= 22\ 481\ 940$$

različitih načina, a dopunski broj na još 35 različitih načina. Zbog toga je u ovom slučaju traženi broj jednak:

$$22\ 481\ 940 \cdot 35 = 786\ 867\ 900.$$

5. a) Na koliko se različitih načina između 153 saborska zastupnika može izabrati šesteročlano predsjedništvo Sabora (predsjednik i pet potpredsjednika)? Pritom svih šest članova predsjedništva tretiramo kao međusobno ravnopravne.

Rješenje: Smatramo li sve članove predsjedništva Sabora kao međusobno ravnopravne, onda je traženi broj jednak ukupnom broju svih različitih šesteročlanih podskupova 153-članoga skupa. Taj je broj jednak

$$\binom{153}{6} = 16\ 133\ 132\ 940.$$

b) Riješite a) podzadatak u slučaju da su svi članovi predsjedništva Sabora rangirani prema važnosti (npr. prema kriteriju tko će voditi sjednicu Sabora).

Rješenje: Sada predsjedništvo Sabora tretiramo kao uređenu šestorku, pa je traženi broj jednak ukupnom broju 6–permutacija 153-članoga skupa. Taj je broj jednak

$$153 \cdot 152 \cdot 151 \cdot 150 \cdot 149 \cdot 148 = 11\ 615\ 855\ 716\ 800.$$

(Taj smo broj mogli dobiti i kao umnožak $C(153,6) \cdot 6!$. Zašto?)

6. **a)** Izračunajte zbrojeve $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ i $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}$.

Rješenje: U binomni teorem uvrstimo $x = y = 1$, pa dobijemo:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 1^k,$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Nadalje, u binomni teorem uvrstimo $x=1,\ y=-1$, pa dobijemo:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot(-1)^k,$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k} = 0.$$

b) Koristeći rezultat **a)** podzadatka odredite ukupan broj svih podskupova n-članoga skupa čiji je kardinalitet neparan prirodan broj.

Rješenje: Prema zadatku 4., traženi je broj jednak

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2\cdot k+1} = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots .$$

Oduzmemo li drugu jednakost dobivenu u **a)** podzadatku od prve jednakosti u tom podzadatku, dobit ćemo:

$$2\cdot\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots\right) = 2^n,$$

a odavde je odmah

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = 2^{n-1}.$$

Napomena: Budući da vrijedi jednakost

$$2^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^n,$$

to znači da podskupova koji imaju neparan kardinalitet ima jednako mnogo kao i podskupova koji imaju paran kardinalitet. Zbog toga se može konstruirati bijekcija sa skupa svih neparnih podskupova na skup svih parnih podskupova n-članoga skupa S. Ona je definirana pravilom:

$$f(A) = \begin{cases} A \setminus \{s\}, \text{ ako } s \in A, \\ A \cup \{s\}, \text{ ako } s \notin A, \end{cases}$$

za neki element $s \in S$ i svaki skup $A \subseteq S$ čiji je kardinalitet neparan broj. Za vježbu dokažite da je f bijekcija.