

 <b>TVŽ</b> <small>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel</small>	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Osnove kombinatorike</b> - zadaci
--	--	--

1. a) Iz Špičkovine u Bedekovčinu može se doći trima različitim cestama, a iz Bedekovčine u Sračinec dvjema različitim cestama. Na koliko se različitih načina može doći iz Špičkovine u Sračinec preko Bedekovčine?

*Rješenje:* Na ukupno  $3 \cdot 2 = 6$  različitih načina.

- b) U stočlanoj skupini studenata nalazi se točno 60 muškaraca. Za sastanak s voditeljem studija treba odabratи dvočlano izaslanstvo u kojem će biti točno jedna žena. Na koliko je različitih načina to moguće učiniti?

*Rješenje:* Na ukupno  $60 \cdot 40 = 2400$  različitih načina.

- c) Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je prva znamenka jednaka zbroju druge i treće?

*Rješenje:* Prva znamenka jednoznačno je određena zadamo li i drugu i treću znamenku. Iz istoga razloga zbroj druge i treće znamenke ne smije biti strogo veći od 9. Razlikujemo ukupno 10 različitih slučajeva:

- ako je treća znamenka jednaka nuli, drugu možemo izabrati na 9 različitih načina (sve osim 0);
- ako je treća znamenka jednaka 1, drugu možemo izabrati na 9 različitih načina (sve osim 9);
- ako je treća znamenka jednaka 2, drugu možemo izabrati na 8 različitih načina (sve osim 8 i 9);
- ako je treća znamenka jednaka 3, drugu možemo izabrati na 7 različitih načina (sve osim 7, 8 i 9);
- ⋮
- ako je treća znamenka jednaka 8, drugu možemo izabrati na 2 različita načina (1 ili 0);
- ako je treća znamenka jednaka 9, druga znamenka mora biti jednaka 0.

Zbog toga je traženi broj jednak:

$$9 + 9 + 8 + 7 + 6 + \dots + 3 + 2 + 1 = (1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10) - 1 = \frac{10}{2} \cdot (1 + 10) - 1 = 54.$$

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Osnove kombinatorike</b> - zadaci
--	--	--

2. Odredite ukupan broj međusobno različitih permutacija riječi:

- a) ZAGREB;
- b) ELEKTROTEHNIKA;
- c) OUAGADOUGOU;
- d) POPOCATEPETL.

*Rješenje:*

- a) Sva slova riječi ZAGREB su međusobno različita. Zbog toga je traženi broj jednak  $P_6 = 6! = 720$ .
- b) Traženi broj je jednak broju svih permutacija multiskupa  $M = \{A, E^3, H, I, K^2, L, N, O, R, T^2\}$ , a taj je jednak:
- $$\binom{1+3+1+1+2+1+1+1+2}{3,2,2} = \binom{14}{3,2,2} = P_{14}^{3,2,2} = \frac{14!}{3!(2!)^2} = 3\ 632\ 428\ 800.$$
- c) Traženi broj je jednak broju svih permutacija multiskupa  $M = \{A^2, D, G^2, O^3, U^3\}$ , a taj je jednak  $\binom{2+1+2+3+3}{2,2,3,3} = \binom{11}{2,2,3,3} = P_{11}^{2,2,3,3} = \frac{11!}{(2!3!)^2} = 277\ 200$ .
- d) Traženi broj je jednak broju svih permutacija multiskupa  $M = \{A, C, E^2, L, O^2, P^3, T^2\}$ , a taj je jednak

$$\binom{1+1+2+1+2+3+2}{2,2,3,2} = \binom{12}{2,2,3,2} = P_{12}^{2,2,3,2} = \frac{12!}{3!(2!)^3} = 9\ 979\ 200.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Osnove kombinatorike</b> - zadaci
---	--	--

3. a) U UEFA-inoj Ligi prvaka natječu se ukupno 32 nogometna kluba. Na koliko različitih načina strastveni kladioničar Zdravko može prognozirati koji će klubovi zauzeti svako od prva četiri mesta u konačnom poretku (nakon završetka natjecanja)?

*Rješenje:* Poredak klubova je bitan, pa zapravo tražimo ukupan broj 4-permutacija 32-članoga skupa. Taj je broj jednak:

$$P(32, 4) = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 863\,040.$$

- b) Odredite ukupan broj svih međusobno različitih podskupova  $n$ -članoga skupa  $S$  kao funkciju prirodnoga broja  $n$ . (U podskupove ubrajamo prazan skup i cijeli skup  $S$ .)

*Rješenje:* Prigodom formiranja bilo kojega podskupa  $X$  za svaki element skupa  $S$  moramo utvrditi hoće li pripadati podskupu  $X$  ili neće. (Ako je u svim slučajevima odgovor „da“, dobit ćemo cijeli skup  $S$ , a ako je u svim slučajevima odgovor „ne“, dobit ćemo prazan skup.) Tako je traženi broj jednak ukupnom broju  $n$ -permutacija s ponavljanjem dvočlanoga skupa {„da“, „ne“}, a taj je jednak:

$$\overline{P}(2, n) = 2^n.$$

 <b>TVŽ</b> TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Osnove kombinatorike</b> - zadaci
---	--	--

4. a) Na koliko se različitih načina u istom izvlačenju igre LOTO 7/35 mogu izvući kombinacija od 7 brojeva i jedan dopunski broj (vraćanje izvučene kuglice u bубанj nije dozvoljeno)?

*Rješenje:* Ne dozvolimo li vraćanje kuglica u bубанj, onda najprije izvlačimo sedam brojeva koji tvore kombinaciju (i koji su svi međusobno ravnopravni), a potom dopunski broj (kojega tretiramo zasebno). Sedam brojeva koji tvore kombinaciju tvore neuređeni sedmeročlani podskup 35-članoga skupa, a takvih skupova ima ukupno:

$$C(35, 7) = \binom{35}{7} = 6\ 724\ 520.$$

Nakon što formiramo kombinaciju, dopunski broj možemo izabrati na ukupno  $35 - 7 = 28$  različita načina. Zbog toga je traženi broj jednak:

$$6\ 724\ 520 \cdot 28 = 188\ 286\ 560.$$

- b) Riješite a) podzadatak u slučaju da je dozvoljeno vraćanje izvučene kuglice u bубанj.

*Rješenje:* Dozvolimo li vraćanje kuglica u bубанj, onda sedmeročlanu kombinaciju možemo izabrati na ukupno

$$\bar{C}(35, 7) = \binom{35+7-1}{7} = \binom{41}{7} = 22\ 481\ 940$$

različitih načina, a dopunski broj na još 35 različitih načina. Zbog toga je u ovom slučaju traženi broj jednak  $22\ 481\ 940 \cdot 35 = 786\ 867\ 900$ .

- c) Na koliko se različitih načina između 153 saborska zastupnika može izabrati šesteročlano predsjedništvo Sabora (predsjednik i pet potpredsjednika)? Pritom svih šest članova predsjedništva tretiramo kao međusobno ravnopravne.

*Rješenje:* Smatramo li sve članove predsjedništva Sabora kao međusobno ravnopravne, onda je traženi broj jednak ukupnom broju svih različitih šesteročlanih podskupova 153-članoga skupa. Taj je broj jednak

$$C(153, 6) = \binom{153}{6} = 16\ 133\ 132\ 940.$$

- d) Riješite c) podzadatak u slučaju da su svi članovi predsjedništva Sabora rangirani prema važnosti (npr. prema kriteriju tko će voditi sjednicu Sabora).

*Rješenje:* Ako postoji hijerarhija među članovima predsjedništva Sabora, onda predsjedništvo Sabora tretiramo kao uređenu šestorku, pa je tada traženi broj jednak

 <b>TVŽ</b> TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>1. Osnove kombinatorike</b> - zadaci
---	--	--

ukupnom broju 6-permutacija 153-članoga skupa, tj.:

$$P(153,6) = 153 \cdot 152 \cdot 151 \cdot 150 \cdot 149 \cdot 148 = 11\,615\,855\,716\,800.$$

(Taj smo broj mogli dobiti i kao umnožak  $C(153,6) \cdot 6!$ . Zašto?)

5. a) Izračunajte zbrojeve  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  i  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k}$ .
- b) Koristeći rezultat a) podzadatka odredite ukupan broj svih podskupova  $n$ -članoga skupa čiji je kardinalitet neparan prirodan broj.

*Rješenje:*

- a) U binomni teorem uvrstimo  $x = y = 1$ , pa dobijemo:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Nadalje, u binomni teorem uvrstimo  $x = 1$ ,  $y = -1$ , pa dobijemo:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k,$$

$$\text{odnosno } \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

- b) Prema zadatku 4., traženi je broj jednak

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2 \cdot k + 1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

Oduzmemmo li drugu jednakost dobivenu u a) podzadatku od prve jednakosti u tom podzadatku, dobit ćemo:

$$2 \cdot \left( \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots \right) = 2^n,$$

a odavde je odmah

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$