visoka poslovna škola par

# POSLOVNA STATISTIKA

## 1.1. OSNOVE KOMBINATORIKE – rješenja primjera

### Primjer 1.

**a)** Na ukupno $3 \cdot 2 = 6$ različitih načina.
**b)** Na ukupno $60 \cdot 40 = 2\,400$ različitih načina.
**c)** Prva znamenka jednoznačno je određena zadamo li i drugu i treću znamenku. Iz istoga razloga zbroj druge i treće znamenke ne smije biti strogo veći od 9. Razlikujemo ukupno 10 različitih slučajeva:
– ako je treća znamenka jednaka nuli, drugu možemo izabrati na 9 različitih načina (sve osim 0);
– ako je treća znamenka jednaka 1, drugu možemo izabrati na 9 različitih načina (sve osim 9);
– ako je treća znamenka jednaka 2, drugu možemo izabrati na 8 različitih načina (sve osim 8 i 9);
– ako je treća znamenka jednaka 3, drugu možemo izabrati na 7 različitih načina (sve osim 7, 8 i 9);
….
– ako je treća znamenka jednaka 8, drugu možemo izabrati na 2 različita načina (1 ili 0);
– ako je treća znamenka jednaka 9, druga znamenka mora biti jednaka 0.
Stoga je traženi broj jednak $9 + 9 + 8 + 7 + \ldots + 2 + 1 = (1 + 2 + \ldots + 9 + 10) - 1 = 54$.

### Primjer 2.

**a)** Sva slova riječi RIJEKA su međusobno različita. Stoga je traženi broj jednak $P_6 = 6! = 720$.
**b)** U zadanoj riječi imamo 2 slova M, 2 slova E, 2 slova N, te po jedno od slova A, DŽ i T. Stoga je traženi broj jednak $P_9^{2,2,2} = \dfrac{9!}{(2!)^3} = 45\,360$.
**c)** U zadanoj riječi imamo 3 slova O, 3 slova U, 2 slova A, 2 slova G i jedno slovo D. Stoga je traženi broj jednak $P_{11}^{3,3,2,2} = \dfrac{11!}{(3!\cdot 2!)^2} = 277\,200$.
**d)** U zadanoj riječi imamo 3 slova P, 2 slova O, 2 slova T, 2 slova E, te po jedno od slova C, A i L. Stoga je traženi broj jednak $P_{12}^{3,2,2,2} = \dfrac{12!}{3!\cdot(2!)^3} = 9\,979\,200$.

### Primjer 3.

**a)** Poredak ekipa je bitan, pa zapravo tražimo ukupan broj 4–permutacija 32-članoga skupa. Taj je broj jednak $P(32, 4) = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 863\,040$.
**b)** Prigodom formiranja bilo kojega podskupa $X$ za svaki element skupa $S$ moramo utvrditi hoće li pripadati podskupu $X$ ili neće. (Ako je u svim slučajevima odgovor „da“, dobit ćemo cijeli skup $S$, a ako je u svim slučajevima odgovor „ne“, dobit ćemo prazan skup.) Tako je traženi broj jednak ukupnom broju $n$–permutacija s ponavljanjem dvočlanoga skupa {„da“, „ne“}, a taj je jednak $\overline{P}(2,n) = 2^n$.

### Primjer 4.

**a)** Ne dozvolimo li vraćanje kuglica u bubanj, onda najprije izvlačimo sedam brojeva koji tvore kombinaciju (i koji su svi međusobno ravnopravni), a potom dopunski broj (kojega tretiramo zasebno). Sedam brojeva koji tvore kombinaciju tvore neuređeni sedmeročlani podskup 39-članoga skupa, a takvih skupova ima ukupno $C(39,7) = \binom{39}{7} = 15\,380\,937$. Nakon što formiramo kombinaciju, dopunski broj možemo izabrati na ukupno $39 - 7 = 32$ različita načina. Stoga je traženi broj jednak $15\,380\,937 \cdot 32 = 492\,189\,984$.
Dozvolimo li vraćanje kuglica u bubanj, onda sedmeročlanu kombinaciju možemo izabrati na ukupno $\overline{C}(39,7) = \binom{39+7-1}{7} = \binom{45}{7} = 45\,379\,620$ različitih načina, a dopunski broj na još 39 različitih načina. Stoga je u ovom slučaju traženi broj jednak $45\,379\,620 \cdot 39 = 1\,769\,805\,180$.

## POSLOVNA STATISTIKA

### 1.1. OSNOVE KOMBINATORIKE – rješenja primjera

**b)** Tretiramo li sve članove predsjedništva Sabora kao međusobno ravnopravne, onda je traženi broj jednak ukupnom broju svih različitih šesteročlanih podskupova 153-članoga skupa. Taj je broj jednak $C(153, 6)=$ $=\binom{153}{6}$ = 16 133 132 940.

Ukoliko postoji hijerarhija među članovima predsjedništva Sabora, onda predsjedništvo Sabora tretiramo kao uređenu šestorku, pa je tada traženi broj jednak ukupnom broju 6–permutacija 153-članoga skupa. Taj je broj jednak $P(153, 6) = 153 \cdot 152 \cdot 151 \cdot 150 \cdot 149 \cdot 148$ = 11 615 855 716 800. (Taj smo broj mogli dobiti i kao umnožak $C(153,6)\cdot 6!$. Zašto?)

**Primjer 5.**

Fiksirajmo neki $s \in S$. Za svaki $A \in P$ definiramo preslikavanje $f : P \to N$ propisom

$$f(A) = \begin{cases} A \setminus \{s\}, \text{ ako } s \in A; \\ A \cup \{s\}, \text{ ako } s \notin A. \end{cases}$$

Lako se provjeri da je $f$ bijekcija (štoviše vrijedi $f^{-1} = f$), pa, prema definiciji bijekcije, slijedi da su skupovi $P$ i $N$ jednakobrojni, tj. $card(P) = card(N)$.

Nadalje, u binomni poučak uvrstimo $x = y = 1$. Dobivamo:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

Lijeva strana ove jednakosti prebraja sve moguće podskupove $n$–članoga skupa $S$: svaki od njih ima ili 0 elemenata (prazan skup!) ili 1 element ili… ili $n$ elemenata (cijeli skup $S$). Stoga svih podskupova $n$–članoga skupa (uobičajeno se označava s $\mathcal{P}(S)$) ima $2^n$, tj.

$$\text{card}(\mathcal{P}(S)) = 2^n.$$

Svaki od tih podskupova ima ili paran ili neparan broj elemenata, pa prema pravilu zbroja vrijedi jednakost

$$card(P) + card(N) = card(\mathcal{P}(S)).$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $card(P) = card(N)$ i $card(\mathcal{P}(S)) = 2^n$, dobit ćemo:

$$2 \cdot \text{card}(P) = 2^n.$$

Otuda je $\text{card}(P) = 2^{n-1}$. Dakle, $\text{card}(P) = \text{card}(N) = 2^{n-1}$.