# 1. OSNOVE KOMBINATORIKE

- *Kombinatorika* – grana matematike koja se bavi problemima prebrajanja konačnih skupova, odnosno konačnim skupovima i strukturama općenito
- *Osnovna pitanja kombinatorike*: Koliko ima skupova/brojeva/objekata koji…?, Na koliko međusobno različitih načina se može…?
- Npr. *Koliko ima* troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je prva znamenka jednaka zbroju druge i treće? *Na koliko* međusobno različitih *načina* se između 153 saborska zastupnika može izabrati peteročlano predsjedništvo Sabora?

# 1.1. OSNOVNA PRAVILA PREBROJAVANJA

- *Pravilo zbroja*: Neka su $n$ proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj, te $S_1, \ldots, S_n$ *konačni međusobno disjunktni* skupovi (presjek bilo kojih dvaju od njih je prazan skup).
- Tada je skup $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ konačan.
- Za svaki $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ vrijedi: $card(T) = \sum_{i=1}^{n} card(T \cap S_i)$
- 
- Posebno, vrijedi: $card\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card(S_i)$

# 1.1. OSNOVNA PRAVILA PREBROJAVANJA

- <u>*Pravilo množenja*</u>: Neka su $n$ proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj, te $S_1$, …, $S_n$ *konačni* skupovi. (Ti skupovi ne moraju biti međusobno disjunktni.)
- Neka je $T \subseteq S_1 \times \ldots \times S_n$ skup *uređenih* $n$-torki takav da za svaki $i = 1, \ldots, n$ $i$ - tu komponentu toga skupa možemo izabrati među elementima skupa $S_i$ na $n_i$ različitih načina.
- Tada je $card(T) = \prod_{i=1}^{n} n_i$

# 1.2. PRIMJER 1.

- **a**) Iz Špičkovine u Bedekovčinu može se doći trima različitim cestama, a iz Bedekovčine u Sračinec dvama različitim cestama. Na koliko se različitih načina može doći iz Špičkovine u Sračinec *via* Bedekovčina?
- **b)** U 100-članoj skupini studenata nalazi se 60 muškaraca. Za sastanak s pročelnikom studija treba odabrati dvočlano izaslanstvo u kojemu će biti točno jedna žena. Na koliko je različitih načina to moguće učiniti?
- **c)** Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je prva znamenka jednaka zbroju druge i treće?

# 1.3. PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

- *Problem*: Na raspolaganju nam je $n \in \mathbf{N}$ međusobno različitih objekata. *Na koliko različitih načina* te objekte možemo poredati u *uređen niz* (tako da znamo koji objekt je prvi, koji drugi itd.)?
- Svaki od načina slaganja različitih objekata u uređen niz nazivamo *permutacija* toga skupa objekata.
- Zadani problem zapravo traži određivanje ukupnoga broja permutacija skupa od $n$ različitih elemenata. Taj broj označava se s $P_n$.
- *Rezultat*: $P_n = n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$ = umnožak prvih $n$ prirodnih brojeva.

# 1.4. PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

- *Problem*: Za svaki $i = 1, \ldots, m$ na raspolaganju nam je $m_i \in \mathbf{N}$ međusobno različitih objekata vrste $V_i$. *Na koliko različitih načina* te objekte možemo poredati u *uređen niz* (tako da znamo koji objekt je prvi, koji drugi itd.)?
- U ovom slučaju riječ je o *permutaciji s ponavljanjem* jer su neki objekti međusobno jednaki.
- *Rješenje*: $P_n^{m_1,\ldots,m_m} = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m} m_i\right)!}{\prod_{i=1}^{m}(m_i!)} = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{m}(m_i!)}$, gdje je $n := \sum_{i=1}^{m} m_i$

# 1.5. PRIMJER 2.

- Odredite ukupan broj međusobno različitih permutacija riječi:
- **a**) RIJEKA;
- **b)** MENADŽMENT;
- **c**) OUAGADOUGOU;
- **d**) POPOCATEPETL.

# 1.6. K-PERMUTACIJA

- Neka je $S$ bilo koji $n$-člani skup ($n \in \mathbf{N}$).
- Svaka uređena $k$ – torka elemenata iz $S$ čiji su elementi međusobno različiti naziva se *k-permutacija n-članoga skupa*. (Pritom je očito $k \in \mathbf{N}$.)
- *Problem*: Odrediti ukupan broj različitih $k$-permutacija $n$-članoga skupa.
- *Rezultat*:

$$P(n,k) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

# 1.7. K-PERMUTACIJA S PONAVLJANJEM

- Pri nizanju elemenata skupa $S$ u uređen niz možemo dozvoliti ponavljanje elemenata skupa $S$.
- Svaka uređena $k$ – torka ne nužno različitih elemenata iz $S$ naziva se $k$ – permutacija s ponavljanjem $n$ – članoga skupa.
- <u>*Problem*</u>: Odrediti ukupan broj različitih $k$ – permutacija s ponavljanjem $n$ – članoga skupa.
- <u>*Rezultat*</u>: $\overline{P}(n,k) = n^k$

# 1.8. PRIMJER 3.

- **a)** U UEFA-inoj Ligi prvaka natječe se ukupno 32 nogometna kluba. Na koliko različitih načina strastveni kladioničar Zdravko M. može prognozirati koji će klubovi zauzeti svako od prva četiri mjesta u konačnom poretku (nakon završetka natjecanja)?
- **b)** Odredite ukupan broj svih međusobno različitih podskupova $n$-članoga skupa $S$. (U podskupove ubrajamo i prazan skup i cijeli skup $S$.)

# 1.9. K-KOMBINACIJA

- Neka su $n$, $k \in \mathbf{N}$ takvi da je $k \leq n$ i neka je $S$ bilo koji $n$ – člani skup.
- Svaki $k$ – člani podskup (u kojemu nema međusobno jednakih elemenata) skupa $S$ naziva se *k-kombinacija n-članoga skupa*.
- *Problem*: Odrediti ukupan broj svih $k$ – kombinacija $n$ – članoga skupa.
- *Rezultat*:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

# 1.10. BINOMNI KOEFICIJENT

- Broj $\binom{n}{k}$ naziva se *binomni koeficijent* i čita se "*en povrh ka*".
- Taj je broj *uvijek* ili prirodan broj ili 0 (ako je $k > n$).
- Iz *interpretacije* binomnoga koeficijenta lako slijede identiteti: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$ . Dokažite ih.
- Iz *definicije* binomnoga koeficijenta lako slijede identiteti $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Pokušajte ih dokazati koristeći interpretaciju toga koeficijenta.

# 1.11. K-KOMBINACIJA S PONAVLJANJEM

- Neka su $n$, $k \in \mathbf{N}$ takvi da je $k \leq n$ i neka je $S$ bilo koji $n$ – člani skup.
- Svaki $k$ – člani podskup (u kojemu može biti i međusobno jednakih elemenata) skupa $S$ naziva se *k-kombinacija s ponavljanjem n-*članoga skupa.
- <u>*Problem*</u>: Odrediti ukupan broj svih $k$ – kombinacija s ponavljanjem $n$ – članoga skupa.
- <u>*Rezultat*</u>:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

# 1.12. PRIMJER 4.

- **a)** Na koliko se različitih načina u istom izvlačenju igre LOTO 7/39 mogu izvući kombinacija od 7 brojeva i jedan dopunski broj (vraćanje izvučene kuglice u bubanj nije dozvoljeno)?
- Riješite zadatak i u slučaju da je dozvoljeno vraćanje izvučene kuglice u bubanj.
- **b)** Na koliko se različitih načina između 153 saborska zastupnika može izabrati šesteročlano predsjedništvo Sabora (predsjednik i pet potpredsjednika)? Pritom svih šest članova predsjedništva tretiramo kao međusobno ravnopravne.
- Riješite zadatak u slučaju da su svi članovi predsjedništva Sabora rangirani prema važnosti (npr. prema kriteriju tko će voditi sjednicu Sabora.)

# 1.13. BINOMNI POUČAK

- Može se pokazati da vrijedi sljedeći:
- **<u>Poučak 1.</u>** (*binomni poučak*) Za bilo koja dva kompleksna broja $x$, $y \in$ **C** i bilo koji prirodan broj $n \in$ **N** vrijedi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

# 1.14. PRIMJER 5.

- Neka je $n \in \mathbf{N}$ proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj. Neka je $S$ proizvoljan $n$-člani skup.
- Označimo s $P$ skup kojega tvore svi podskupovi skupa $S$ koji imaju paran broj elemenata, a s $N$ skup kojega tvore svi podskupovi skupa $S$ koji imaju neparan broj elemenata. (Broj 0 tretiramo kao paran cijeli broj.)
- Pokažite da je $\mathrm{card}(P) = \mathrm{card}(N)$ i izračunajte jedan od tih brojeva kao funkciju varijable $n$.