2.1.

MATRICE

2.1.1. POJAM MATRICE

- **Matrica** – pravokutna tablica s r redaka i s stupaca čiji su elementi realni brojevi $(r, s \in \mathbb{N})$.
- Kao i skupove, i matrice označavamo velikim tiskanim slovima: A, B, C, ...
- Elemente matrice označavamo ovako:
- $a_{ij} =$ element na presjeku i – toga retka i j – toga stupca
- Za matricu koja ima r redaka i s stupaca kraće kažemo da je **matrica tipa** (r, s).
- Za matricu kojoj je broj redaka jednak broju stupaca (tj. $r = s$) kažemo da je **kvadratna matrica reda** r.

2.1.2. JEDNAKOST MATRICA

- Dvije matrice A i B su jednake ako i samo ako vrijede oba sljedeća uvjeta:
- 1.) A i B su istoga tipa;
- 2.) A i B na istim mjestima imaju međusobno jednake elemente, tj. za sve dopustive uređene parove (i, j) vrijedi jednakost:
- $a_{ij} = b_{ij}$.

2.1.3. OSNOVNE OPERACIJE S MATRICAMA

- Osnovne operacije s matricama: zbrajanje, oduzimanje i množenje matrice sa skalarom (tj. s realnim brojem).
- Zbrajanje i oduzimanje definira se ako i samo ako su matrice istoga tipa.
- Za matrice različitih tipova te operacije nisu definirane.
- Množenje matrice sa skalarom definira se za bilo koju matricu (bez ikakvih dodatnih uvjeta).

2.1.4. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE MATRICA

- Neka su A i B matrice tipa (r, s). Tada je:

- a) zbroj matrica A i B matrica C tipa (r, s) takva da za svaki njezin element c_{ij} vrijedi jednakost $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

- b) razlika matrica A i B matrica D tipa (r, s) takva da za svaki njezin element d_{ij} vrijedi jednakost $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$;

- Kažemo da matrice zbrajamo (oduzimamo) prema načelu *član po član*.

2.1.5. MNOŽENJE MATRICE SA SKALAROM

- Neka su A matrica tipa (r, s) i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je:
- umnožak skalara α i matrice A matrica B tipa (r, s) takva da za svaki njezin element b_{ij} vrijedi jednakost:
- $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.
- Pišemo: $B = \alpha \cdot A$.
- Pravilo: Matrica se množi sa skalarom tako da se tim skalarom pomnoži svaki njezin element.

1. Odredite tipove i ispišite sve elemente sljedećih matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0.2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 2022 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2023 \\ -1 & 2024 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) Matrica A je matrica tipa (1,2). Njezini elementi su: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$.

b) Matrica B je matrica tipa (3,1). Njezini elementi su: $b_{11} = -\frac{1}{2}$, $b_{21} = 0.2$, $b_{31} = \frac{4}{3}$.

c) Matrica C je matrica reda 3. Njezini elementi su: $c_{11} = 2022$, $c_{12} = c_{21} = c_{33} = 0$, $c_{13} = c_{31} = -1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = -2023$, $c_{32} = 2024$.

2. Napišite realnu matricu sa sljedećim svojstvima:

a) A je tipa (2, 3), te vrijedi $a_{11} = a_{22} = 1$ i $a_{ij} = 0$ za sve ostale parove (i, j);

b) B je reda 2, te vrijedi $b_{ij} = i + j$, za sve dopustive uređene parove (i, j);

c) C je reda 3, te vrijedi $c_{ij} = i^j$, za sve dopustive uređene parove (i, j).

Rješenje:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

b) Računamo:

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= 1+1 = 2, \\ b_{12} &= 1+2 = 3, \\ b_{21} &= 2+1 = 3, \\ b_{22} &= 2+2 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$$

c) Računamo:

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= 1^1 = 1, \\ c_{12} &= 1^2 = 1, \\ c_{13} &= 1^3 = 1, \\ c_{21} &= 2^1 = 2, \\ c_{22} &= 2^2 = 4, \\ c_{23} &= 2^3 = 8, \\ c_{31} &= 3^1 = 3, \\ c_{32} &= 3^2 = 9, \\ c_{33} &= 3^3 = 27, \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

3. Odredite vrijednosti $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrice A i B budu jednake ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 + x \cdot y & y \\ x & 1 - z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} z & x \cdot z - 1 \\ 1 + y \cdot z & 1 - z^2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Iz zadanih podataka dobivamo sustav četiriju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = z, \\ y = x \cdot z - 1, \\ x = 1 + y \cdot z, \\ 1 - z = 1 - z^2. \end{cases}$$

Iz četvrte jednadžbe sustava slijedi

$$z^2 - z = 0.$$

Odatle je $z_1 = 0,\ z_2 = 1.$

Ako je $z = 0,$ onda uvrštavanjem te vrijednosti u svaku od prvih triju jednadžbi dobivamo:

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = 0, \\ y = x \cdot 0 - 1, \\ x = 1 + y \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = 0, \\ y = -1, \\ x = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) = (1, -1).$$

Ako je $z = 1,$ onda uvrštavanjem te vrijednosti u svaku od prvih triju jednadžbi dobivamo:

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = 1, \\ y = x \cdot 1 - 1, \\ x = 1 + y \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 0, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) \in \{(1, 0), (0, -1)\}.$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$(x, y, z) = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,-1,1)\}$$

4. Odredite matricu $D = 2 \cdot B - A - \frac{1}{2} \cdot C$ ako su A, B i C matrice reda 2, te vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= 2 \cdot i - j, \\ b_{ij} &= 2 \cdot j - i, \\ c_{ij} &= (i + j)^2, \end{aligned} \right\} \text{ za sve dopustive } (i, j).$$

Rješenje: Odredimo najprije sve elemente matrica A, B i C. Imamo redom:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 2 \cdot 1 - 1 = 1, \\ a_{12} &= 2 \cdot 1 - 2 = 0, \\ a_{21} &= 2 \cdot 2 - 1 = 3, \\ a_{22} &= 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= 2 \cdot 1 - 1 = 1, \\ b_{12} &= 2 \cdot 2 - 1 = 3, \\ b_{21} &= 2 \cdot 1 - 2 = 0, \\ b_{22} &= 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= (1+1)^2 = 4, \\ c_{12} &= (1+2)^2 = 9, \\ c_{21} &= (2+1)^2 = 9, \\ c_{22} &= (2+2)^2 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

Zbog toga je:

$$
\begin{aligned}
D &= 2\cdot B - A - \frac{1}{2}\cdot C = \\
&= 2\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}4 & 9\\ 9 & 16\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 4.5\\ 4.5 & 8\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}2-1-2 & 6-0-4.5\\ 0-3-4.5 & 4-2-8\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}-1 & 1.5\\ -7.5 & -6\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$